МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: R (радиус Ω) $= \frac{3\sqrt{5}}{2}$; r (радиус ω) $= \frac{6}{\sqrt{5}}$, $S_{BDCE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

№ 6.

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

~~Заметим:~~ $-\frac{1}{2} \le x \le 1$ $|\cdot 2$

$-1 \le 2x \le 2$

① $8x - 6|2x-1| \le ax + b$, $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Построим 1.1 и 1.1'

1.1 при $2x-1 \le 0$, $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $8x + 12x - 6 \le ax + b$

~~$20x - 6 \le ax + b$~~

$20x - 6 \le ax + b$

при $2x - 1 \ge 0$, $1 \ge x \ge \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $8x - 12x + 6 = -4x + 6$

п. 1'

② $-8x^2 + 6x + 7 \ge ax + b$

$x_B = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$;

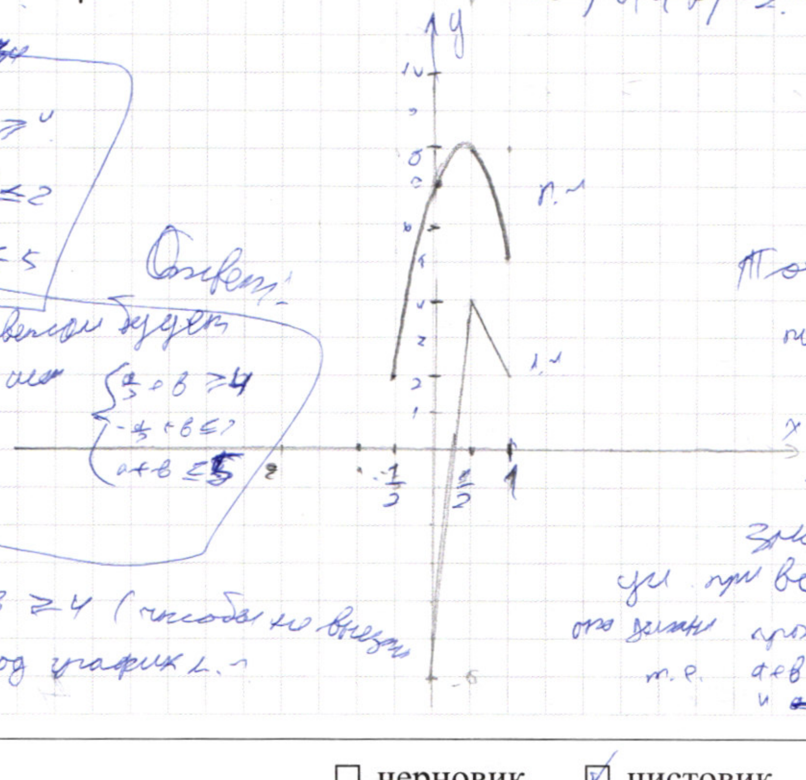
x	1	0	$-\frac{1}{2}$
y	5	7	2

$-8x^2 + 6x + 7$

$-8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 + 3 + 7$

$-8 + 6 + 7 =$

$-8 \cdot \frac{1}{4} - 3 + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$



Итого: $\wedge$

~~$\frac{a}{2} + b \ge 4$~~

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b \ge 4 \\ -\frac{a}{2} + b \le 2 \\ a + b \le 5 \end{cases}$$

Ответ: т.е. ответом будет решение сис. $\begin{cases} \frac{a}{2} + b \ge 4 \\ -\frac{a}{2} + b \le 2 \\ a + b \le 5 \end{cases}$

т.е. $ax + b$ — прям,

по $x = -\frac{1}{2} \in [-16; 2]$

по $x = 1 \in [2; 5]$

~~при~~

значит, что бы всё ул при всех x "y, $y = ax + b$" она должна проходит ниже „5" в $x = 1$,

т.е. $a + b \le 5$

и $-\frac{1}{2}a + b \le 2$ (в $x = -\frac{1}{2}$)

и. $\frac{a}{2} + b \ge 4$ (чтобы не вьехать вниз под график 1.1)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Решение: т.к. ω и Ω кас внутр образ, то $A; O_1; O_2; B$ на одной прям (по Т) где $O_1; O_2$ — центры ω и Ω

1) Пусть $BK \cap \omega = P$, P не совп с A

Тогда из т. B проведено BD — кас к ω и $BA \cap \omega = P \Rightarrow$

$\Rightarrow BP \cdot BA = BD^2$, $BP = (2R - 2r)$, $AB = 2R$

$2R \cdot (2R - 2r) = 3^2$

$4R(R - r) = 9$

2) $O_1D \perp BD$ (как рад в Т кас) $\Rightarrow \triangle BO_1D$ — прям

$\angle BCA$ — вписан в Ω и опир на диам $\Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow \triangle BCA$ — прям $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1BD \sim \triangle ABC$ (по двум уг) с $k = \frac{O_1B}{AB} = \frac{3}{5} \left(= \frac{BD}{BC}\right)$

~~из 1: $4R(R-r) = 9$~~ $\Rightarrow 4 \cdot R\left(R - \frac{3}{5}R\right) = 9$

$4 \cdot R \cdot \frac{2}{5}R = 9$

$\frac{8}{5}R^2 = 9$

$R^2 = \frac{45}{8}$

$R = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ ~~$r = R\frac{3}{5} = \frac{9\sqrt{5}}{10\sqrt{2}}$~~

$\frac{O_1B}{AB} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$

$10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$

$R = \frac{5}{4}r$

из 1: $4R(R - r) = 9$

$4 \cdot \frac{5}{4}r\left(\frac{5}{4}r - r\right) = 9$

$5r \cdot \frac{1}{4}r = 9$

$r^2 = \frac{36}{5}$

$\boxed{r = \frac{6}{\sqrt{5}}} \Rightarrow R = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5} \cdot 3}{2}}$

3) $BC \cap AE = D$ — хорды $\Omega \Rightarrow BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$6 = AD \cdot DE$

4) ан-но $\angle BCA = 90°$ ~~$\angle BEA = 90°$~~, $\angle ADC = \angle EDB$ (как верт) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ADC$ (по 2ум уг) $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$

4) $\triangle BAC$ — прям $\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2$ (по Т Пифагора)

$AC^2 = AB^2 - BC^2 =$ ~~$(2R)^2 - 5^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 - 25 = \frac{45}{2} - 25$~~

~~$(2R)^2 - 5^2 = \left(\frac{\sqrt{5} \cdot 3}{2}\right)^2 - 25$~~

$= (2R)^2 - 25 = (\sqrt{5} \cdot 3)^2 - 25 = 45 - 25 = 20$

Тогда для $\triangle ADC$ — прям: $AD^2 = AC^2 + DC^2 = 20 + 4 = 24$

~~$AD = 2\sqrt{6}$~~ $AD = 2\sqrt{6}$

Значит $\sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

5) $AD \cdot DE = 6$, $AD = 2\sqrt{6}$ $\Rightarrow DE = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AE = AD + DE = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

6) $S_{ABEC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

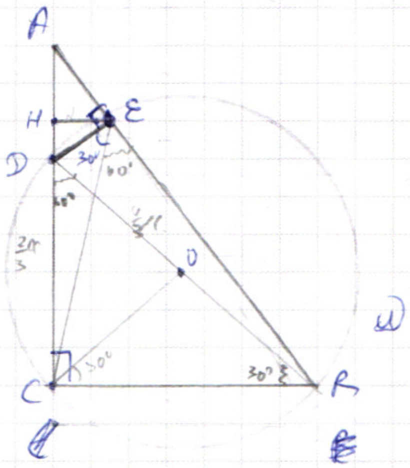
$AD:AC = 1:3$

$DE \perp DB$

$\angle CED = 30^\circ$

$tg\angle BAC$

$AC = \sqrt{2}$



Решение:

1) $\angle DEB$ и $\angle DCB = 90^\circ$ и они опир на DB => вокруг $E; D; C; B$ описывается окр. ω с диам DB (по Т), где O — центр ω и сер. DB

2) $\angle DEC$ — впис в ω, опир на $\smile DC$ и $\angle DEC = 30^\circ$ => $\smile DC = 60^\circ$

3) $\angle DOC$ — центральный угол опир на $\smile DC$ => $\angle DOC = 60^\circ$

Значит $\triangle DCO$ — р/с ($OD = OC$ и $\angle DOC = 60^\circ$)

Значит $DC = OD = OC = OB$ (радиусы)

4) $\angle COB = 180^\circ - \angle DOC = 120^\circ$ (смежные

5) $\triangle COB$: по Т кос.

$CB^2 = CO^2 + OB^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\angle COB$

$CB^2 = DC^2 + DC^2 + 2 \cdot DC^2 \cdot \frac{1}{2} = 3DC^2$ => $CB = \sqrt{3}\, DC$

6) $DC = \frac{2}{3} AC$ => $CB = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3} AC$

7) $\triangle ABC$ — прям => $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot AC}{3}}{AC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$

8) $1 + tg^2\angle BAC = \frac{1}{\cos^2\angle BAC}$

$1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{\cos^2\angle BAC}$ => $\frac{5}{3} = \frac{1}{\cos^2\angle BAC}$ => $\cos^2\angle BAC = \frac{3}{5}$ => $\cos\angle BAC = \sqrt{\frac{3}{5}}$ (>0 т.к. $\triangle ABC$ — прям)

из $\sin^2 + \cos^2 = 1$ => $\sin\angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (>0, т.к. θ $\triangle ABC$ — прям)

9) $\triangle AED$: проведём выс EH к AD, тогда $EH \perp AD$

$\left.\begin{array}{l} EH \perp AD \\ CB \perp AD \end{array}\right| \Rightarrow EH \parallel CB$

10) $\triangle AED$ – прям: $AE = AD \cdot \cos \angle BAC = \frac{1}{3} AC \cdot \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{3\sqrt{5}}$

$DE = \frac{1}{3} AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}$

Тогда $HE = \frac{AE \cdot DE}{AD}$ (по ф. ле выс в прям △)

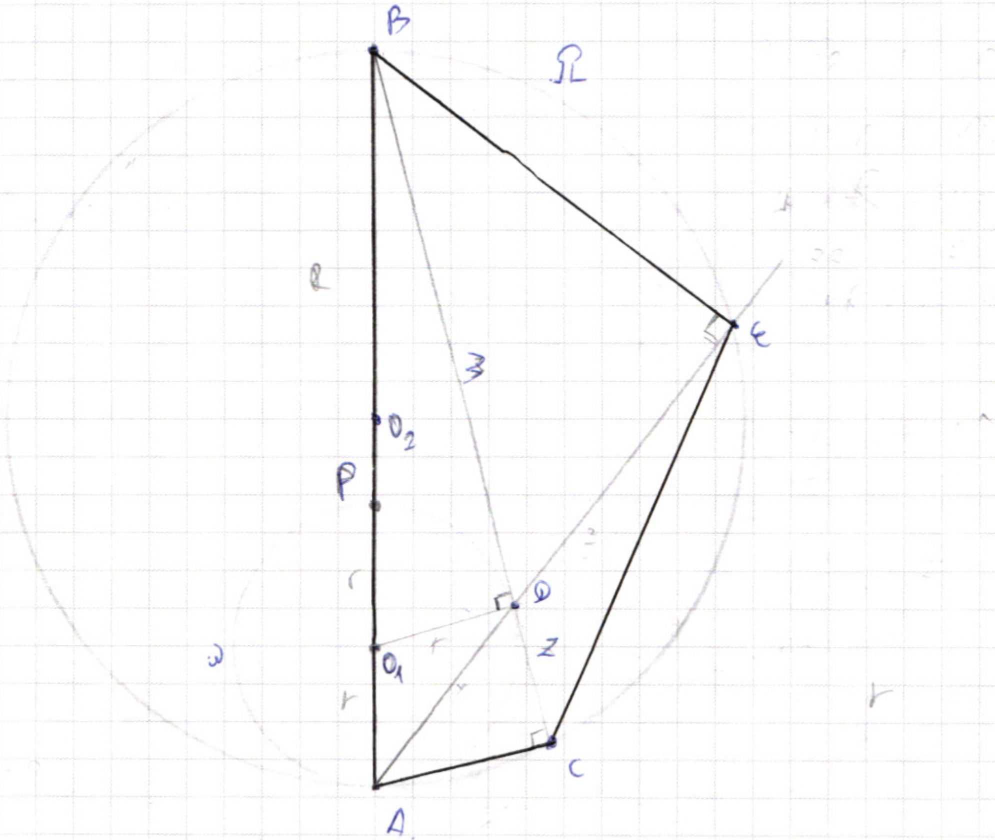
$HE = \frac{\frac{\sqrt{21}}{3\cdot\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{3\cdot\sqrt{5}}}{\frac{1}{3}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\frac{\cancel{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\cancel{3}\cdot 5}}{\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{42}}{15}$

11) $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot \underset{\text{выс}}{HE} \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{42}}{15} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{7} = \frac{7\sqrt{6}}{45}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{7\sqrt{6}}{45}$

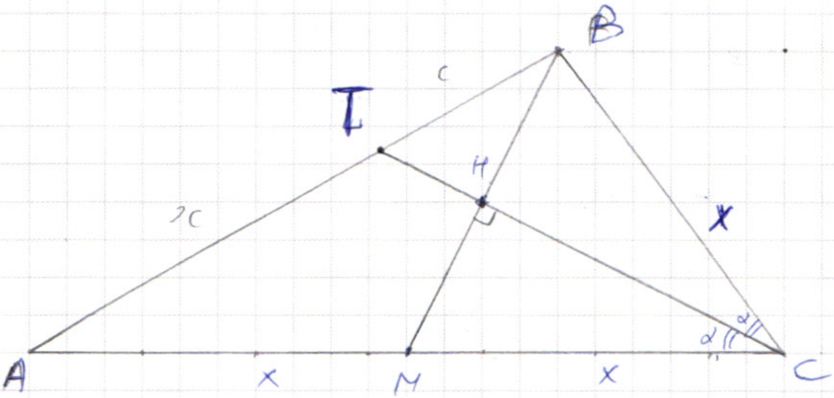
№ 5

$CD = 2$
$BD = 3$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



$\triangle ABC$

CT – бис $\angle BCA$

BM – мед к AC

$P = 900$

$BM \perp CT$

$BM \cap CT = H$

Решение:

обозначим $\angle HCM = \angle HCB = \alpha$

1) $\triangle BHC$: $CH \perp BM$ (выс к BM), CH – бисс $\angle BCM$ $\Rightarrow$ $\triangle MCB$ – р/б с осн MB (по призн)

Тогда CH – мед к осн MB (по св-ву)

H – сер MB

2) $\triangle MBC$ – р/б с осн $MB \Rightarrow BC = MC$ (как бок ст.)

обозначим их за x.

3) $MC = \frac{1}{2} AC$ (BM – мед) $\Rightarrow$ $AC = 2x$

$AM = MC = x$

4) $\triangle MHC$ – прям ($\angle MHC = 90°$) $\Rightarrow$ $MH = MC \cdot \sin\alpha = x \cdot \sin\alpha$

$\triangle HMC$ – прям ($\angle MHC = 90°$) $\quad MH = HB = x \cdot \sin\alpha$, тогда $MB = 2x \cdot \sin\alpha$

5) $\angle HCM = \alpha \quad \Rightarrow \angle HMC = 90° - \alpha$ (по Σ уг. $\triangle$)

Тогда $\angle AMB = 90° + \alpha$ (как смеж.)

6) $\triangle AMB$: по Т кос:

$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\alpha$

~~$AB^2 = x^2 + 4x^2 \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \sin\alpha$~~

$AB^2 = x^2 + (2x \cdot \sin\alpha)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x \cdot \sin\alpha) = (x - 2x \cdot \sin\alpha)^2$

$AB = |x - 2x \cdot \sin\alpha|$; $AB = x|1 - 2\sin\alpha|$ $(x > 0$ как длина$)$

~~III.e. по усл. все стороны $\triangle ABC$ – целые, то $x \in \mathbb{Z}$ $(BC = x)$;~~

$x > 0$, т.е. $x \in \mathbb{N}$

~~$AB \in \mathbb{Z}$ (ст. $\triangle ABC$) $\Rightarrow$ $|1 - 2\sin\alpha| \in \mathbb{Z}$~~

~~$AB > 0$~~

~~т.е. $AB \in \mathbb{N}$~~

Получается $x \in \mathbb{N}$; $AB \in \mathbb{N}$ (т.к. $AB > 0$ и $AB \in \mathbb{Z}$ (по усл.))

7) По усл. $P = 900$, т.е. $AB + BC + CA = 900$

$x \cdot |1 - 2\sin\alpha| + x + 2x = 900$

$3x + x|1 - 2\sin\alpha| = 900$

I) Если $1 - 2\sin\alpha \geq 0$, то $|1 - 2\sin\alpha| = 1 - 2\sin\alpha$
$\sin\alpha \leq \frac{1}{2}$

$3x + x - 2x \cdot \sin\alpha = 900$

$4x - 2x \cdot \sin\alpha = 900$

$2x(2 - \sin\alpha) = 900$

$x(2 - \sin\alpha) = 450$

$2 - \sin\alpha = \frac{450}{x}$, $x > 0$

$\begin{cases} \sin\alpha = 2 - \frac{450}{x} \\ -1 \leq \sin\alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \leq 2 - \frac{450}{x} \leq \frac{1}{2}$ $| -2$

$-3 \leq -\frac{450}{x} \leq -\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} \leq \frac{450}{x} \leq 3$

$\frac{1}{2} \leq \frac{150}{x} \leq 1$

$1 \leq \frac{x}{150} \leq 2$

$150 \leq x \leq 300$, $x \in \mathbb{N}$

т.о. здесь $300 - 150 + 1 = 151$ вариант треуг.

II) Если $1 - 2\sin\alpha < 0$, то $|1 - 2\sin\alpha| = -1 + 2\sin\alpha$
$\sin\alpha > \frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\because (b_n)$:

$b_1 = a$ Тогда $b_2 = b_1 \cdot q = aq = b$

$b_2 = b$ $b_3 = b_1 \cdot q^2 = aq^2 = c$

$b_3 = c$. $b_4 = b_1 q^3 = aq^3$

b_4 – корень $ax^2 - 2bx + c = 0$, значит при подст b_4 вместо x будет р-во 0: $a \cdot b_4^2 - 2 \cdot b_4 \cdot b + c = 0$

$a \cdot (aq^3)^2 - 2 \cdot aq^3 \cdot aq + aq^2 = 0$

$a \cdot a^2 \cdot q^6 - 2 \cdot a^2 \cdot q^4 + aq^2 = 0$

$(a \cdot q^2)^3 - 2 \cdot (aq^2)^2 + aq^2 = 0$, $a \cdot q^2 = c \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $c^3 - 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

~~$c = 0$ или c~~

$c \cdot (c-1)^2 = 0$

$c = 0$ или $c = 1$

Но если $c = 0$, то $a = 0$ или $q = 0$ а это не геом прогрессия (по опред) (т.к. будет $a, 0, 0 \ldots 0$)

Тогда $c = 1$ – единств ответ

Ответ: 1

12.

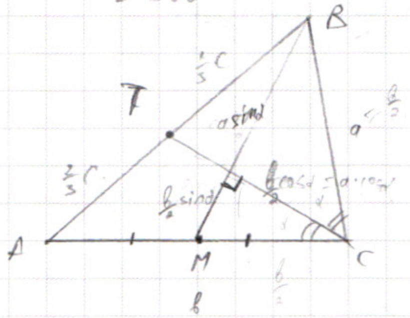
$\frac{1}{2} \le \frac{150}{x} \quad | \cdot x$

$\frac{x}{2} \le 150$

$x \le 300$

$a+b+c=900$

$\frac{3}{2}b+c=900$



$\frac{b}{2}\cos\alpha = a\cdot\cos\alpha$

$\frac{b}{2}=a$

$3x+x|1-2\sin\alpha|=900$

Если $1-2\sin\alpha>0$, $\sin\alpha<\frac{1}{2}$, то

$MB = b\cdot\sin\alpha$

$\frac{BC}{AC}=\frac{BT}{TA}=\frac{1}{2} \Rightarrow BT:TA=1:2$

$3x+x-2x\cdot\sin\alpha=900$

$4x-2x\cdot\sin\alpha=900$

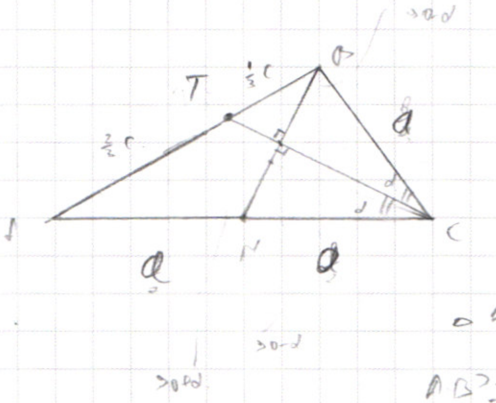
$2x\underbrace{(2-\sin\alpha)}_{\in[1;3]}=900$

$x(2-\sin\alpha)=450$

$450=1\cdot450=2\cdot225=3\cdot$

$2-\sin\alpha=\frac{450}{x}$

$\sin\alpha=2-\frac{450}{x}$



$BM=2a\cdot\sin\alpha$

$\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{2}c$

$2a=c\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=$

$=c\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=$

$=c\cdot(\cos\beta+\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\sin\beta)$

$\triangle AMB$ по Т кос

$AB^2=AM^2+MB^2-2\cdot AM\cdot MB$

$c^2=a^2+4a^2\cdot\sin^2\alpha-2\cdot a\cdot2a\cdot\sin^2\alpha$

$c^2=a^2$

$\sin\alpha\in[-1;1]$

Значит $\frac{450}{x}\in\cancel{[3,1]}$

$[1;3]$

$x\in[150;450]$

$\begin{array}{r} 225 \\ -150 \\ \hline 75 \end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x - x + 2x\cdot\sin\alpha = 900$

$2x + 2x\cdot\sin\alpha = 900$

$2x(1+\sin\alpha) = 900$

$1+\sin\alpha = \frac{450}{x}$

$\begin{cases}\sin\alpha = \frac{450}{x} - 1\\ \sin\alpha \geq \frac{1}{2}\end{cases}$

$\frac{1}{2} < \frac{450}{x} - 1 \leq 1$

$\frac{3}{2} \overset{(*)}{<} \frac{450}{x} \overset{(1)}{<} 2$

(*) $\frac{3}{2} < \frac{450}{x}$

$\frac{1}{3} < \frac{150}{x} \quad |\cdot x,\ x>0$

$\frac{x}{3} < 150$

$x < 200$

(1) $\frac{450}{x} < 2 \quad |\cdot x,\ x>0$

$450 < 2x$

$x > 225$

$162 = 18\cdot 9 = 2\cdot 3^4$

$35b^2 + 54 = 13\sqrt{18-b^2}$

$(35b^2+54)^2 = 13^2\cdot(18-b^2)$

$36b^2 - 13\sqrt{18-b^2} + 54 = 0$

$18 - b^2 - 2\sqrt{18-b^2}\cdot 6b + 36b^2 = (18-b^2)\cdot b$

$\sqrt{18-b^2} - 6b = \sqrt{18-b^2}\cdot b$

$a = \sqrt{18-b^2}$

$a^2 = 18 - b^2$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 18 \\ a - 6b = \sqrt{ab} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

~~$AB^2 = AA^2 + AB^2 - 2$~~

~~$AB^2 = x^2 + (2x \cdot \sin\alpha)^2 - 2x(2\sin\alpha \cdot x) \cdot \cos\alpha$~~

~~$AB^2 = x^2 + 4x^2 \cdot \sin^2\alpha - 4x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$~~

~~$x^2 / /$~~

6) по усл. $P = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB + BC + AC = 900$

$AB + \cancel{BX} + 2x = 900$

$AB = 900 - 3x$

$900 - 3x > 3x$
$900 > 4x$
$x < 225$

$900 - 3x < 3x$
$900 < 6x$
$x < 150$

7) TC - бисс $\angle BCA \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BT}{TA}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow BT : TA = 2 : 1$

тогд $AB = 3TA$

$AB = 900 - 3x$

$\Rightarrow TA = 300 - x$

$AT = 600 - 2x$

~~8) $\triangle ABC$: по Т кос.~~

~~$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle BCA$~~

~~$(900 - 3x)^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos\angle BCA$~~

~~$(900 - 3x)^2 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \cos\angle BCA$~~

~~$\cos\angle BCA = \frac{5x^2 - (900 - 3x)^2}{4x^2} = \frac{(\sqrt{5}x - 900 + 3x)(\sqrt{5}x + 900 - 3x)}{4x^2}$~~

8) для $\triangle ABC$: нер-во $\triangle$:

$AC < AB + BC$
$2x < 900 - 3x + x$
$4x < 900$
$x < 225$

$AB < AC + BC$
$900 - 3x < x + 2x$
$6x > 900$
$x > 150$

$BC < AB + AC$
$x < 900 - 3x + 2x$
$2x < 900$
$x < 450$

$x \in (150; 225)$

~~так это~~ и при чём все эти x подх., о.е. различ. α:

$225 - 150 + 1 = 76$

Ответ: 76

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2\cdot 6\cdot x+36+2(y^2-2y+1)-18=0 \Rightarrow (x-6)^2+(y-1)^2=18 \\ (x-6y)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$, $y-1=b$, тогда $(x-6)^2=a^2$ $x-6y=(x-6)-(y-1)\cdot 6=a-6b$

$$\begin{cases} a^2+b^2=18 \\ (a-6b)=\sqrt{ab} \end{cases}, ab\geq 0$$

$$(1)\begin{cases} \cancel{(a-6b)^2=ab} \; (2) \\ \cancel{a-6b\geq 0} \\ a^2+b^2=18 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a-6b\geq 0 \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$$

(2) $a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$$(1)\left.\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+b^2=18 \\ a-6b\geq 0 \end{cases}\right)(b)$$

(b) $(a^2+b^2)-13ab+35b^2=0$

$$\begin{cases} \cancel{a^2+b^2=18} \\ \cancel{a=6b+\sqrt{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=18-b^2 \\ (a-6b)^2=ab \end{cases}, ab\geq 0 \quad (a-6b)\geq 0$$

$$\begin{cases} a^2=18-b^2 \\ a^2-12ab+36b^2=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=18-b^2 \\ a^2-13ab+36b^2=13ab \\ (a-6b)\geq 0 \end{cases}; 13ab\geq 0$$

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 = 18 - b^2 \\ a - 6b \geq 0 \\ (a^2+36b^2)^2 = 169a^2b^2 \end{cases}$$

$(*)$ $(18-b^2+36b^2)^2 = 169(18-b^2)\cdot b^2$

$(18+35b^2)^2 = 169(18b^2-b^4)$

$324 + 1260b^2 + 1225b^4 = 3042b^2 - 169b^4$

$1394b^4 - 1782b^2 + 324 = 0 \quad |:2$

$697b^4 - 891b^2 + 162 = 0$

Пусть $b^2 = t$, тогда

$697t^2 - 891t + 162 = 0$

$D = 891^2 - 4\cdot 162\cdot 697 = 793881 - 451656 = 342225 =$

$= 5^2\cdot 3^2\cdot 3^2\cdot 13^2 = 5^2\cdot 3^4\cdot 13^2 = (5\cdot 3^2\cdot 13)^2$

$t = \dfrac{891 \pm \sqrt{(5\cdot 3^2\cdot 13)^2}}{2\cdot 697}$

$t = \dfrac{891 \pm 585}{2\cdot 697}$

$t = \dfrac{306}{2\cdot 697}$ или $t = \dfrac{1476}{2\cdot 697}$

$t = \dfrac{153}{697} = \dfrac{3^2\cdot 17}{41\cdot 17} = \dfrac{9}{41}$ $\qquad$ $t = \dfrac{738}{697} = \dfrac{2\cdot 3^2\cdot 41}{17\cdot 41} = \dfrac{18}{17}$

~~тогда~~

$$\begin{cases} b^2 = \frac{9}{41} \\ a^2 = 18 - \frac{9}{41} = \frac{738-9}{41} = \frac{729}{41} = \frac{9^3}{41} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm\frac{3}{\sqrt{41}} \\ a = \pm\frac{27}{\sqrt{41}} \end{cases}$$

т.к. $ab \geq 0$, то

$$\begin{cases} (a;b) = \left(\frac{27}{\sqrt{41}}; \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \text{ или } \left(-\frac{27}{\sqrt{41}}; -\frac{3}{\sqrt{41}}\right) \\ a - 6b \geq 0 \end{cases}$$

$(a;b) = \left(\frac{27}{\sqrt{41}}; \frac{3}{\sqrt{41}}\right)$

$$\begin{cases} x - 6 = \frac{27}{\sqrt{41}} \\ y - 1 = \frac{3}{\sqrt{41}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 + \frac{27}{\sqrt{41}} \\ y = 1 + \frac{3}{\sqrt{41}} \end{cases}$$

Ответ: $\left(6 + \frac{27}{\sqrt{41}}; 1 + \frac{3}{\sqrt{41}}\right)$

$\left(6 - \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}}; 1 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{18}{17} \\ a^2 = 18\left(1 - \frac{1}{17}\right) = 18\cdot\frac{16}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \\ a = \pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a;b) = \left(\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}}; \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right) \text{ или } \left(-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}}; -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right) \\ a - 6b \geq 0 \end{cases}$$

$(a;b) = \left(-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}}; -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$

$$\begin{cases} x - 6 = -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \\ y - 1 = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \\ y = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \end{cases}$$