МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c - члены геометрич. прогр. =>

$b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$

$ax^2 + 2bx + c = 0$ имеет корни:

$$x_1 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \cdot a \cdot q + \sqrt{4a^2q^2 - 4a^2q^2}}{2a} = -q$$

$$x_2 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} \quad \frac{-2aq - \sqrt{4a^2q^2 - 4a^2q^2}}{2a} = -q$$

=> $-q$ - четвертый член прогрессии =>

$-q = a \cdot q^3$ => ~~[illegible]~~

либо $\begin{cases} q^2 = -\dfrac{1}{a} \\ q \neq 0 \end{cases}$ ← т.к прогрессия не постоянная

1) $q^2 = -\dfrac{1}{a}$ => $c = a \cdot q^2 = a \cdot -\dfrac{1}{a} = -1$

~~2) [illegible]~~

Ответ: -1 ~~[illegible]~~

№~~2~~ 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

пусть $a = y - 2$, $b = 2x - 2$

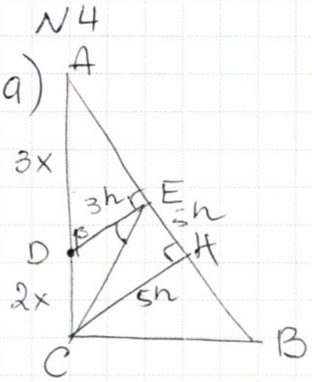
тогда $y - 2x = a - b$

$xy - 2x - y + 2 = \dfrac{ab}{2}$ =>

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 2a^2 + 2b^2 - 3$ -

$$\begin{cases} a - b = \sqrt{\dfrac{ab}{2}} \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = \dfrac{ab}{2} \\ a^2 + 2b^2 = 3 \\ \dfrac{ab}{2} \geq 0 \\ a \geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 = \dfrac{ab}{2} \\ a^2 + 2b^2 = 3 \\ ab \geq 0 \\ a \geq b \end{cases}$$

№4

а) 

Дано: прямоуг. $\triangle ABC$

$AD : AC = 3 : 5$

$AC = 5x \Rightarrow AD = 3x$

$DE \perp AB$

$\angle DEC = 45^\circ$

Решение: проведем $CH \perp AB \Rightarrow CH \parallel DE$

$\angle DEC = 45^\circ \Rightarrow \angle ECH = 45^\circ$ ($\angle$ $DE \parallel CH$, секущая EC, углы накрест лежащие)

$\angle CEH = \angle DEH - \angle DEC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$

$\angle CEH = \angle ECH$

Пусть $CH = 5h \Rightarrow EH = 5h$ ($\triangle CHE$ - р/б т.к $\angle CEH = \angle ECH$)

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$ (по 2ем углам

$\angle A$ - общий $\angle DEA = \angle CHA = 90^\circ$

$\Rightarrow$ и $\angle ADE = \angle ACH$ (по сумме углов $\triangle$))

$\Rightarrow DE : CH = AD : AC = 3 : 5 \Rightarrow DE = 3h$

Пусть $AE = p \Rightarrow$ ~~tgβ~~ ($\angle ADE = \beta$) $tg\beta = \frac{AE}{DE}$ ($\triangle DAE$) $= \frac{p}{3h}$ и ($\angle ACH = \angle ADE = \beta$) $tg\beta = \frac{AH}{CH} = \frac{p+5h}{5h} \Rightarrow$

$\frac{p}{3h} = \frac{p+5h}{5h} \Rightarrow 5hp = 3hp + 15h^2 \Rightarrow$

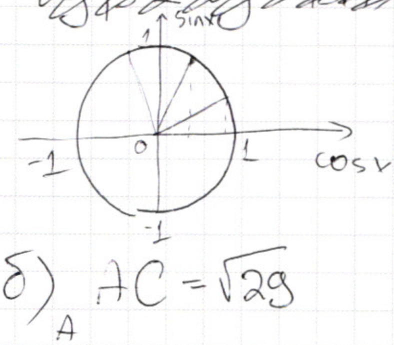
$2hp = 15h^2 \Rightarrow$

$p = \frac{15}{2}h \Rightarrow tg\beta = \frac{p}{3h} = \frac{\frac{15}{2}h}{3h} = \frac{5}{2}$

$\angle ADE = \beta = 90 - \angle A = \angle CBA$ (из $\triangle ABC$)

~~tgβ = tg∠BA~~

$tg\beta = \frac{1}{tg(90-\beta)} \Rightarrow tg(90-\beta) = \frac{1}{tg\beta} = \frac{2}{5}$

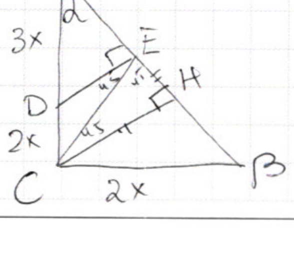


(из $\triangle ABC$)

$\angle DAE = 90 - \angle ADE = 90 - \beta \Rightarrow$

искомый тангенс $\frac{2}{5}$

б) $AC = \sqrt{29}$



$tg\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{2}{5}$ $CA = 5x \Rightarrow CB = 2x$

По теореме Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$

$25x^2 + 4x^2 = 29 \Rightarrow 29x^2 = 29 \Rightarrow x = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} 2a^2-4ab+2b^2=ab \\ a^2+2b^2=3 \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-5ab+2b^2=0 \\ a^2+2b^2=3 \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases}$$

I вар $b\neq 0$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+2=0 \\ a^2+2b^2=3 \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \text{ w } (a>b) \\ \frac{a}{b}=2 \end{array}\right. \\ a^2+2b^2=3 \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 4b^2+2b^2=3 \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b^2=\frac{1}{2} \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ a=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\sqrt{\frac{1}{2}} \\ a=-\sqrt{2} \end{cases} \text{ w } a<b \end{array}\right. \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a=\sqrt{2} \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases}$$

II вар $b=0$

$$\begin{cases} 2a^2=0 \\ a^2=3 \\ ab\geq 0 \\ a\geq b \end{cases} \text{ w } (0\neq 3)$$

$a=y-2=\sqrt{2} \Rightarrow y=2+\sqrt{2}$

$b=\frac{1}{\sqrt{2}}=2x-2 \Rightarrow 2x=2+\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ответ: $\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}};\ 2+\sqrt{2}\right)$

$CH = \frac{AC \cdot CB}{AB}$ $\left(S_{\triangle ACB} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{CH \cdot AB}{2}\right) \Rightarrow CH = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}}$

$tg\,\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow$ в $\triangle ADE$ $\frac{DE}{AE} = \frac{2}{5} \Rightarrow DE = \frac{2}{5}AE = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$

$tg\,\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow$ в $\triangle ACH$ $\frac{CH}{HA} = \frac{2}{5} \Rightarrow HA = \frac{5}{2}CH = \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{25}{\sqrt{29}}$

$EH = HC$ по док $\Rightarrow AE = AH - EH = AH - CH = \frac{25}{\sqrt{29}} - \frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{15}{\sqrt{29}}$

$S_{DECH} = S_{ACH} - S_{ADE} = \frac{AH \cdot CH}{2} - \frac{AE \cdot DE}{2} =$

$\frac{\frac{25}{\sqrt{29}} \cdot \frac{10}{\sqrt{29}}}{2} - \frac{\frac{15}{\sqrt{29}} \cdot \frac{6}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{250 - 90}{29 \cdot 2} = \frac{160}{2 \cdot 29} = \frac{80}{29}$

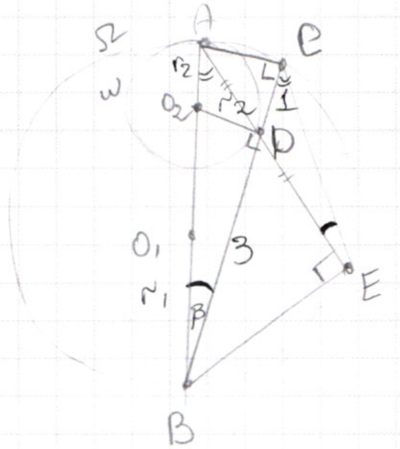
$S_{EHC} = \frac{EH \cdot HC}{2} = \frac{\frac{10}{\sqrt{29}} \cdot \frac{10}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{50}{29}$

$S_{DEC} = S_{DECH} - S_{EHC} = \frac{80}{29} - \frac{50}{29} = \frac{30}{29}$

Ответ: $\frac{2}{5}$ (a) и $\frac{30}{29}$ (b)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Окружности Ω и ω касаются => точка касания лежит на линии центров. => A, O_1 и O_2 на одной прямой

AB - диаметр, BD касат к ω => $O_2D \perp BD$

$\angle ACB$ опирается на диаметр AB => $\angle ACB = 90°$ => $AC \parallel O_2D$

$\angle ABC = \beta$

$\cos\beta = \frac{DB}{O_2B}(\triangle O_2DB) = \frac{CB}{AB}(\triangle ACB)$

$\cos\beta = \frac{3}{2r_1 - r_2} = \frac{4}{2r_1}$ =>

$6r_1 = 8r_1 - 4r_2$ =>

$4r_2 = 2r_1$ => $r_1 = 2r_2$

в $\triangle O_2DB$ $O_2D = r_2$ и $\sin\beta = \frac{r_2}{2r_1 - r_2}$

=> $\sin\beta = \frac{r_2}{3r_2} = \frac{1}{3}$ => $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} =$

$\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ => $\frac{4}{2r_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ =>

$r_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ и $r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

O₂ - центр окр ω

O_1 - центр окр Ω

r_2 - радиус ω

r_1 - радиус Ω

в окр Ω $\angle ABC = \angle AEC$ вписанные углы опираются на одну дугу AC =>

$\angle AEC = B$ => $\sin \angle AEC = \sin\beta = \frac{1}{3}$

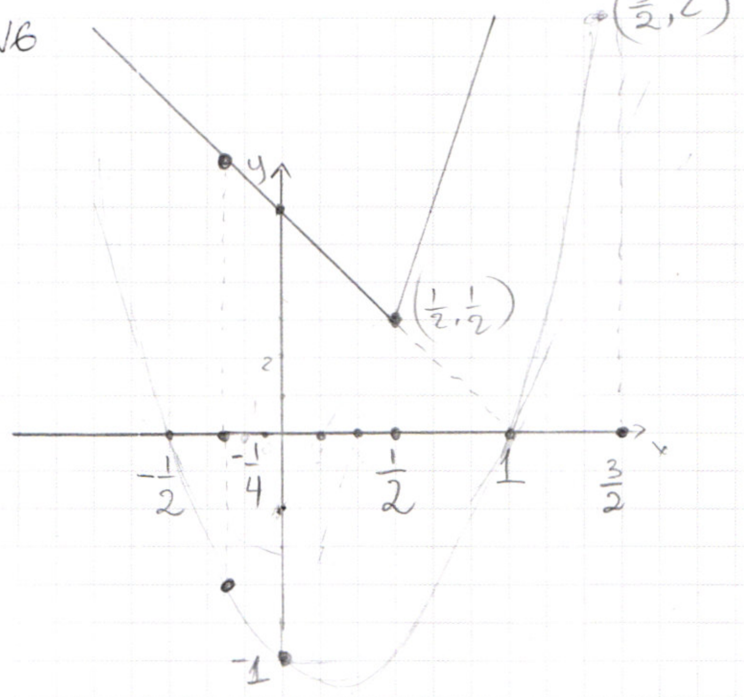
$S_{ACEB} = S_{AEB} + S_{AEC}$

~~S_{AEC}~~ $\triangle BAD \sim \triangle CDE$ (по 2ем углам $\angle ADB = \angle CDE$ вертикальные, $\angle ABD = \angle DEC$ по дое, => по сумме углов $\triangle$-ка $\angle BAD = \angle DCE$)

в $\triangle BCA$ $\sin\beta = \frac{AC}{AB}$ => $AC = AB \cdot \sin\beta = 2r_1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}} \frac{1}{3} = \sqrt{2}$

в $\triangle ACD$ (прямоугольный) по теореме Пифагора $AC^2 + CD^2 = AD^2$ =>

№6



$f(x)=2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

при $x=0$ $f(x)=-1$

$g(x)= x + |2x-1|$

при $2x \geq 1$ $x+2x-1=3x-1$

при $2x \leq 1$ $x+1-2x = 1-x$

при $x=0$ $g(x)=1$

~~при~~ при $x=\frac{1}{2}$ $g(x)=\frac{1}{2}$

$ax+b$ - прямая

$f(\frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2} - 1 =$

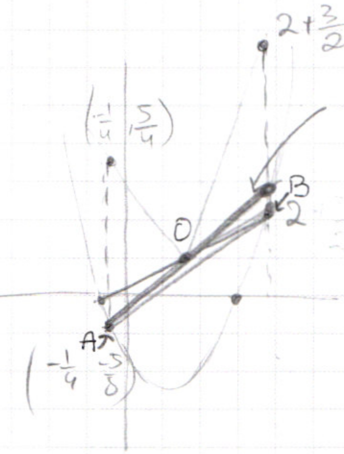
$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 3-1=2$

$g(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + (2\cdot\frac{3}{2}-1) = \frac{3}{2}+2$

$f(-\frac{1}{4}) = 2\cdot(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} - 1 =$

$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - 1 = \frac{3}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$g(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}-1) = \frac{6}{4}-\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$



подходят только прямые такого вида (прямые между прямыми AO и AB и прямые меж. BO и AB)

Прямая через A и O

$y=kx+b$ $\begin{cases} -\frac{5}{8} = k\cdot -\frac{1}{4} + b \\ \frac{1}{2} = k\cdot\frac{1}{2}+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{5}{8} = k\cdot\frac{1}{2} + k\cdot\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} = k\cdot\frac{1}{2}+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{8} = k\cdot\frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{2} - \frac{k}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2}-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} k=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \end{matrix}$

$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$

в точке $-\frac{1}{4}$ $y = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1-\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

Прямая через B и O

$y=kx+b$ $\begin{cases} 2 = \frac{3}{2}k+b \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}k+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = k \\ b = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow$ A, B и O лежат на одной прямой и эта прямая - единственная подходящая $\Rightarrow a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$AD^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{BD}{DE}$ (из подобия $\triangle ADB$ и CDE) $\Rightarrow$

$DE = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\cancel{CE}$ $\frac{AB}{CE} = \sqrt{3}$ (из подобия $\triangle ADB$ и CDE) $\Rightarrow$

$CE = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2r_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$S_{\triangle AEC} = \frac{AE \cdot EC \cdot \sin B}{2} = \frac{(AD + DE) \cdot EC \cdot \sin B}{2} =$

$\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$

$S_{AEB} = \frac{AE \cdot EB}{2}$ ($\triangle AEB$ прямоуг т.к $\angle AEB$ опирается на диаметр)

$= \frac{(AD+DE)\cdot EB}{2}$

в $\triangle BDE$ (прямоуг) $BD^2 = DE^2 + BE^2 \Rightarrow BE^2 = BD^2 - DE^2 = 9 - 3 = 6$

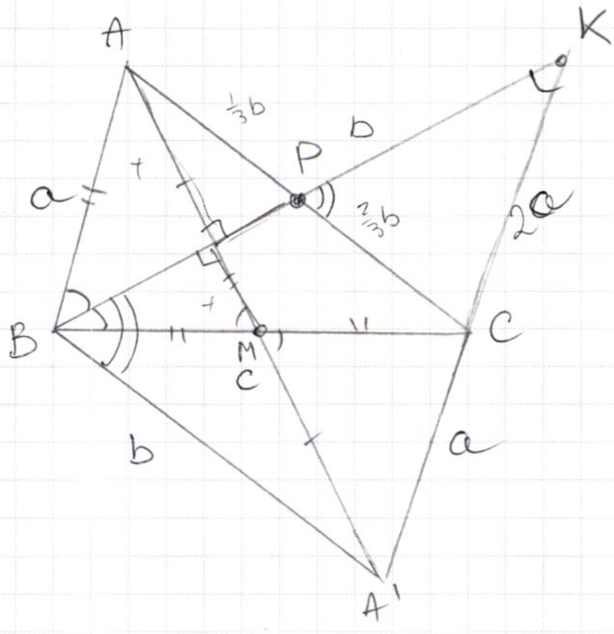
$\Rightarrow BE = \sqrt{6}$

$\Rightarrow S_{AEB} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = 3\cdot\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ACEB} = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: радиус $\Omega = \frac{3}{\sqrt{2}}$ радиус $\omega = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, площадь $BACE = 4\sqrt{2}$

№2



Дано: $\triangle ABC$
AM - медиана
BP - биссектриса
$BP \perp AM$

1) Продлим AM на свою длину ($AM = MA'$)
$\triangle ABM = \triangle MA'C$
по двум сторонам и углу между ними
($BM = MC$, M - середина
$AM = MA'$ по постр.
$\angle AMB = \angle CMA'$ вертик.)
$\Rightarrow \angle MCA' = \angle MBA$ и $AB \parallel A'C$
(накрест лежащие равны)
Продлим A'C до пересечения с BP ($BP \cap A'C = K$)

$A'K \parallel BA \Rightarrow \angle ABK = \angle BKC$ (накрест лежащие)
$\angle ABP = \angle PBC$ (биссектриса BP) $\Rightarrow \angle PBC = \angle PKC \Rightarrow$
$\triangle BCK$ - р/б $\Rightarrow BC = CK$
в $ABA'C$ $AB = A'C$ (из ~~ABC~~ $\triangle ABM = \triangle CMA'$) и
$AB \parallel A'C \Rightarrow ABA'C$ - параллел. $\Rightarrow$
$AC \parallel BA' \Rightarrow \angle PCK = \angle BA'K$ (секущая CA')
и $\angle KPC = \angle KBA'$ (секущая PB)

$\Rightarrow$ по 3ем углам $\triangle PKC \sim \triangle KBA'$ ($\angle PKC$ - общий
$\angle KPC = \angle KBA'$
$\angle KCP = \angle KA'B$)

$\Rightarrow \frac{PC}{KC} = \frac{BA'}{A'K}$

~~AB~~ пусть $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$
тогда из $\triangle BCK$ - р/б $CK = CB = c$
из $ABA'C$ - парал $CA' = AB = a$
$BA' = AC = b$

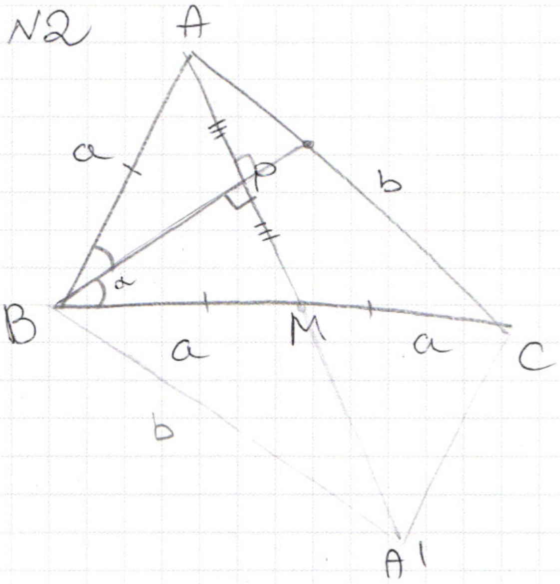
$PC = \frac{BA'}{A'K} \cdot KC = \frac{b \cdot c}{a + c} \Rightarrow PA = AC - PC = b - \frac{b \cdot c}{a + c} = $ ~~b(1-...)~~
$A'K = A'C + CK$
$\frac{2}{3}b$

$\angle KBA' \overset{(\text{по док})}{=} \angle KPC \overset{(\text{вертикальные})}{=} \angle APB \Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle A'BK$ по 3ем углам
($\angle ABP = \angle BKA'$
$\angle APB = \angle KBA'$ $\Rightarrow$ ~~по сумме углов~~
$ABA'C$ - парал $\Rightarrow \angle BAP = \angle BA'C$)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № [illegible]
(Нумеровать только чистовики)

№2



Дано: $\triangle ABC$

AM - медиана (M - середина BC

BP - бисс $\angle ABC$

$P = AM \cap BP$

В $\triangle ABM$ BP - бис и высота => BP медиана и $\triangle ABM$ - р/б

Пусть $BA = a \Rightarrow BC = 2a$

($AB = BM$ т.к $\triangle BAM$ - р/б)

и $BC = 2BM$ т.к ~~B~~ M - середина

Продлим медиану на свою длину $MA' = MA$

$ACA'B$ - параллелограм

($\triangle AMB = \triangle MCA'$ по двум сторонам и углу между ними =>

$A_1C = AB$ и $A_1C \parallel AB$) $\Rightarrow AC = BA'$

Пусть $AC = b \Rightarrow BA' = b$

По теореме Пифагора ($\triangle BPA'$) $b^2 = BP^2 + PA'^2$

($\triangle APM$) $a^2 = BP^2 + PM^2$

$PM = \frac{PA'}{3}$ (т.к $PM = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}MA_1$)

$b^2 - a^2 = PA'^2 - PM^2 = PA'^2 \cdot \frac{8}{9} = PM^2 \cdot 8$

$b = 1200 - 3a = 3(400 - a)$

$\cancel{b^2 = 9(400-a)^2 = a^2 + x^2 \cdot 8}$

$PM = a\cos\alpha$ (из $\triangle BPM$)

$b^2 = a^2 + PM^2 \cdot 8 =$

$a^2 + a^2\cos^2\alpha \cdot 8 =$

$a^2(1 + \cos^2\alpha \cdot 8)$

~~теорема~~ cos 2 $\triangle ABC$

$\cancel{b^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cos 2\alpha}$

$\cancel{b^2 = 5a^2 - 4a^2\cos 2\alpha = 5a^2 - 4a^2(1 - 2\cos^2\alpha) = a^2 + 8a^2\cos^2\alpha}$

$b + a > 2a$ (неравенство $\triangle$-ка)

$\Rightarrow b > a$

$\cancel{b^2 = PM^2 \cdot 8 + a^2 = 3}$

$\cancel{b^2 \geq}$

$3(400 - a) > a$

$1200 - 3a > a$

$4a < 1200 \Rightarrow a < 300$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ | $f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ при $f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_n^{\alpha_n}$ (разложение на простые множители)

тогда $f(x) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) \ldots \alpha_n f(p_n)$ (получаем последовательно применяя операцию $\Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$)

$f(x) < f(y)$ если

$\alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) \ldots \alpha_n f(p_n) \leq \beta_1 f(P_1) + \beta_2 f(P_2) \ldots \beta_m f(P_m)$

~~[illegible]~~ $\cancel{f(1)}$ $f(p) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$1 = 1$ $f(1) = 0$ — при $x = 1$ подходит $y > 1$ $\Rightarrow$ 20 вар

$2 = 2$ $f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$ — при $x = 2$ подходит $f(y) > 1 \Rightarrow$ 18 вар

$3 = 3$ $f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$ — при $x = 3$ подходит $f(y) > 1 \Rightarrow$ 18 вар

$4 = 2 \cdot 2$ $f(4) = 2f(2) = 2$ ✓ — при $x = 4$ подходит $f(y) > 2 \Rightarrow$ 14 вар

$5 = 5$ $f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$ ✓ — при $x = 5$ подходит $f(y) > 2 \Rightarrow$ 14 вар

$6 = 3 \cdot 2$ $f(6) = f(3) + f(2) = 2$ ✓ — при $x = 6$ подходит $f(y) > 2 \Rightarrow$ 14 вар

$7 = 7$ $f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$ ✓ — при $x = 7$ подходит $f(y) > 3 \Rightarrow$ 8 вар

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $f(8) = 3f(2) = 3$ ✓ — при $x = 8$ подходит $f(y) > 3 \Rightarrow$ 8 вар

$9 = 3 \cdot 3$ $f(9) = 2f(3) = 2$ ✓ — при $x = 9$ подходит $f(y) > 2 \Rightarrow$ 14 вар

$10 = 5 \cdot 2$ $f(10) = f(5) + f(2) = 1 + 2 = 3$ ✓ — при $x = 10$ подходит $f(y) > 3 \Rightarrow$ 8 вар

$11 = 11$ $f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$ — при $x = 11$ подходит $f(y) > 5 \Rightarrow$ 3 вар

$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ $f(12) = f(3) + 2f(2) = 1 + 2 = 3$ ✓ — при $x = 12$ подходит $f(y) > 3 =$ 8 вар

$13 = 13$ $f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$ — при $x = 13$ подходит $f(y) > 6 \Rightarrow$ 7 вар

$14 = 7 \cdot 2$ $f(14) = f(7) + f(2) = 4$ ✓ — при $x = 14$ подходит $f(y) > 4 \Rightarrow$ 4 вар

$15 = 5 \cdot 3$ $f(15) = f(5) + f(3) = 3$ ✓ — при $x = 15$ подходит $f(y) > 3 \Rightarrow$ 8 вар

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $f(16) = 4f(2) = 4$ ✓ — при $x = 16$ подходит $f(y) > 4 =$ 4 вар

$17 = 17$ $f(17) = [\frac{17}{2}] = 8$ — при $x = 17$ подходит $f(y) > 8 \Rightarrow$ 0 вар

$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$ $f(18) = 2f(3) + f(2) = 3$ ✓ — при $x = 3$ подходит $f(y) > 3 \Rightarrow$ 8 вар

$19 = 19$ $f(19) = [\frac{19}{2}] = 8$ — при $x = 8$ подходит $f(y) > 8 \Rightarrow$ 0 вар

$20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$ $f(20) = f(5) + 2f(2) = 4$ ✓ — при $x = 20$ подходит $f(y) > 4 \Rightarrow$ 4 вар

$21 = 7 \cdot 3$ $f(21) = f(7) + f(3) = 4$ ✓ — при $x = 21$ подходит $f(y) > 4 \Rightarrow$ 4 вар

$\Rightarrow$ всего $20 + 18 \cdot 2 + 14 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 3 + 2 + 4 \cdot 4 = 181$ вариант

Ответ: 181 пара

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

П = 1200

$20\cdot 2=40$ 36 $\quad 14\cdot 4$ $\quad 15\cdot 4 = 60-4$ 36

$14\cdot 28$ 56

$20 + 36 + 56$

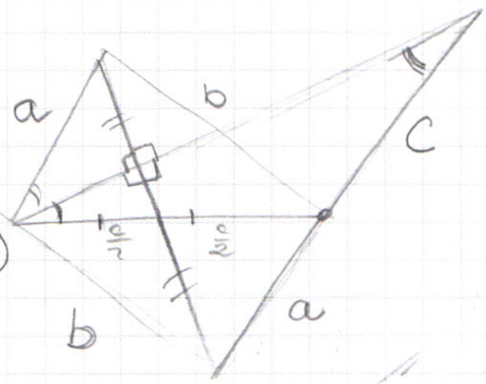
$+ 48 + 3 + 2 + 16$

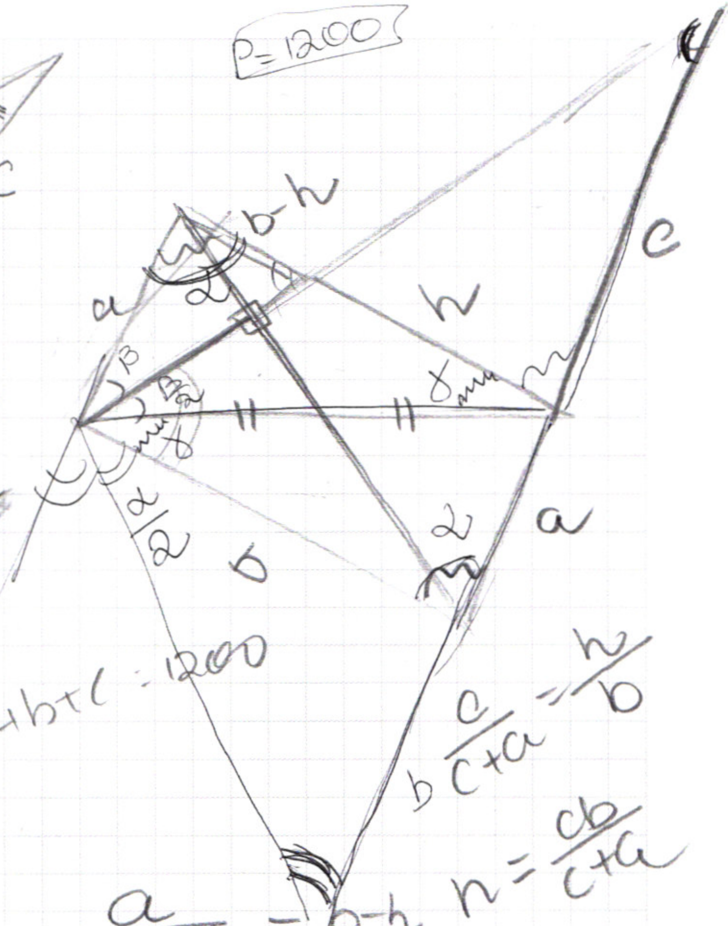
92 5

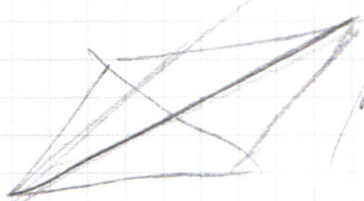
140

160 176

181







$a+b+c=1200$

$\frac{c}{c+a}=\frac{h}{b}$

$h=\frac{cb}{c+a}$

4+2+1 $\quad$ 4+2+1

7 21

14 $\quad$ 7 $\quad$ 6 $\quad$ 8

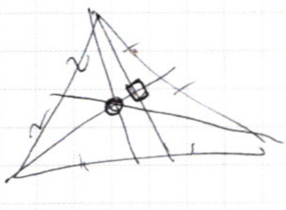
14 $\quad$ 9

$\frac{a}{c+a}=\frac{b-h}{b}$

14 $\quad$ 8 $\quad$ 4 4

4 $\quad$ 5 3

2 6 8



$b-h=\frac{ab}{c+a}$

$h=b-\frac{ab}{c+a}=\frac{cb}{c+a}$

$20+5 \quad 25 \quad 18\cdot 2=36 \quad 8\cdot 5=40$

$14\cdot 4 \quad 8\cdot 6 \quad 36 \quad 8\cdot 8=48$

28 $\quad$ 56 $\quad$ 92

56

16 $\quad$ 108

25 48

73

81

$b=\frac{cb+ab}{c+a}$

$abc=cb+ab$

$ac=a+c$

$a(c-1)=c=2$

$c=2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1K} = \frac{AP}{BA^1} \Rightarrow \frac{a}{a+c} = \frac{b - \frac{bc}{a+c}}{b} \Rightarrow$$

$A^1C + CK$

1 2 3 4 5 6 7 6

1 2 3 4 5 6 7 8

$$\frac{ab}{a+c} = b - \frac{bc}{a+c} \Rightarrow b = \frac{b(a+c)}{a+c}$$

$a+b+c = 1200$

p - отр

-5

$\frac{3}{18}$ $\frac{1}{9}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f(p) = f(p) + f(1)$

$\Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $1 \le x \le 21$, $1 \le y \le 21$

$f(kp) = f(p) + f(k)$

$[p/2] + \cancel{f(k)}$

$f(x) < f(y)$

$\boxed{f(x) - f(y)}$

$x = kp$

$f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$

1 2 3 4 5 $f(x)$ - целое

целое x - предали $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ $[p/2] > 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$ $f(p_1 \dots$ $= f(p_1) + f(p_2) + \dots f(p_n) -$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$\frac{1}{20} =$

$2 \cdot \frac{1}{40}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$

$2 f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(2) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$

$f(x^2) = 2f(x)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c геом

$a \quad a\cdot q \quad a\cdot q^2$

$ax^2+2bx+c=0$

$D = 4b^2-4ac = 4(b^2-ac)$ $\quad \frac{a^2q^2}{a}$

$\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} = a\cdot q^3$

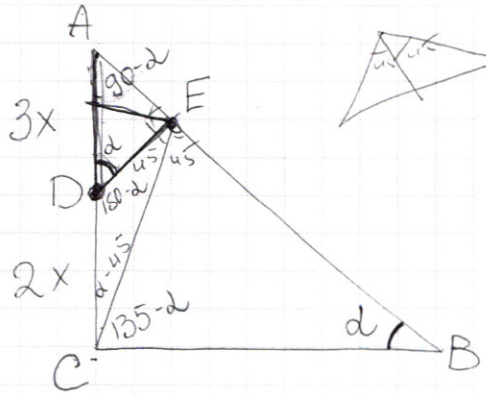
$-aq \pm\sqrt{a^2q^2-a\cdot aq^2}$

$\frac{-b}{a} = a\cdot q^3$

$\frac{-aq}{a} = a\cdot q^3$

$-q = a\cdot q^3$

$-\frac{1}{a} = q^2 \quad a\cdot q^2 = a\cdot\frac{1}{-a} = -1$

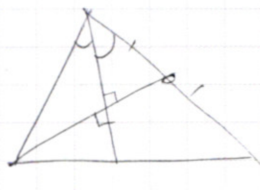


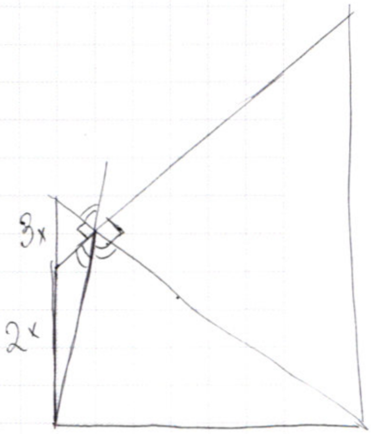
$tg \angle BAC$

$tg BAC = \frac{CB}{CA} = \frac{AE}{DE}$

$ax^2=0$

$=0$





$25-4\cdot2\cdot2=9$ $\quad 16$

3

$\frac{5+3}{4}=2$

$\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

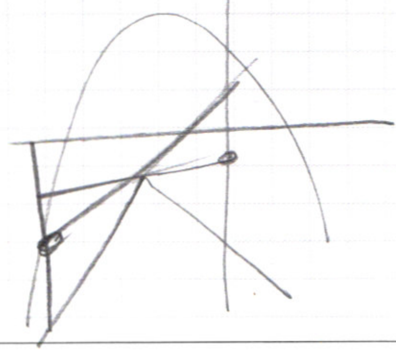
$\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$1<2$



$\frac{08}{9}$ x

$\frac{5}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2xy-4x-2y+4$ $\quad 2x^2+y^2-2xy-1-2y$

$2y(x-1)+4(1-x)$ $\quad 2x^2+$

$(y-2x)^2=\cancel{y^2-4xy+}$

$(2y-4)(x-1)$

$(y-x)^2=y^2-2xy+x^2$

$2(y-2)(x-1)$

$+x^2-$ $\quad (a-b)^2=\frac{ab}{2}$

$(y-2)(2x-2)$

$\underset{a}{\shortparallel}\qquad\underset{b}{\shortparallel}$

$y(x-1)-2(x-1)$ $\quad a^2+2b^2=3$

$(y-2)(x-1)$

$a^2-2ab+b^2=\frac{ab}{2}$

y^2-2y+4 $\quad 2(x-1)^2$ $\quad 2a^2-4ab+2b^2=ab$

a^2 $\quad b^2$ $\quad x^2-2x+1$ $\quad 2a^2+2b^2=5ab$

$a-b=\sqrt{\frac{ab}{2}}$

$a^2+2b^2=3$

$y^2+2x^2-2y-4x+2+4$

$+6$

$(a-b)^2=\frac{ab}{2}$

$-3-2y$

$-(a+b)$

$\cancel{(a+b)^2}$

a^2+2b^2

$\frac{2a^2}{b^2}-5\frac{a}{b}+2=0$

$a+b$

y^2-4y+4 $\quad (x-1)^2$ $\quad y-2+2x-1$ $\quad D=25-4\cdot2\cdot2=16$

(x^2-2x+1) $\quad -(y+2x-3)$ $\quad =9$

$y^2-4y+4-x^2+2x-1$ $\quad 3$

$3-2x-y$ $\quad \frac{5+3}{4}=2$

y^2-4y+3

$2x^2\ y^2-2x-3y$ $\quad \frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

$-x^2+2x+3x^2-6x$ $\quad \frac{a}{b}=2\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

$3x(x-2)$ $\quad a^2-b^2+3b^2$ $\quad a=2b$

$(y-2)(x-1)$

$yx-y-2x+2$ $\quad 3(x-1)^2$ $\quad a^2+2b^2-3=0$ $\quad 4b^2+2b^2=3$

$6b^2=3$

$3x^2-6x+3$ $\quad y^2-4y+4+$ $\quad 2b^2=1$

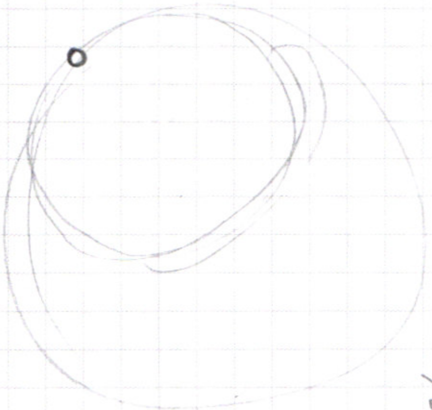
$2x^2-4x+2-3=0$ $\quad b^2=\frac{1}{2}$

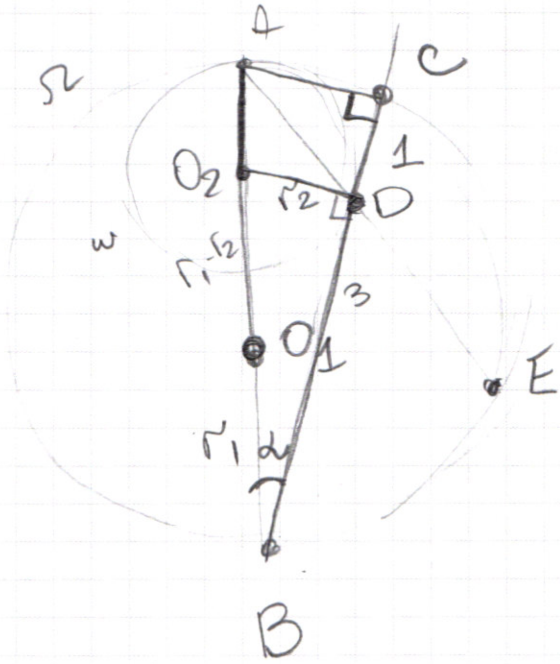
$b=\sqrt{\frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

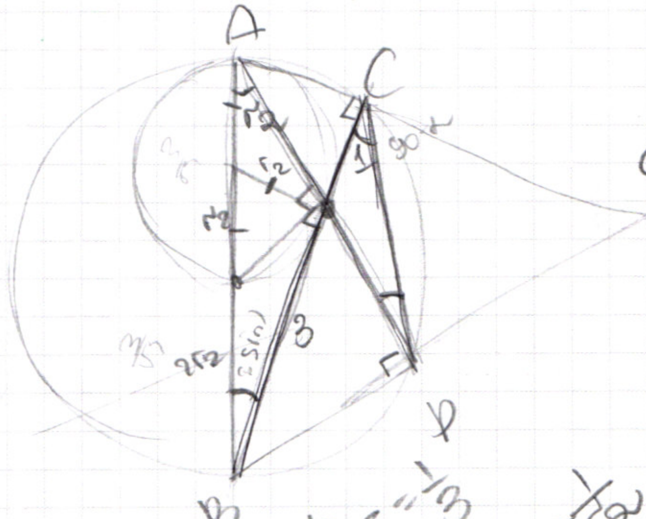
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№5





$\frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$



$$\cos\alpha = \frac{3}{2r_1 - r_2} = \frac{4}{2r_1}$$

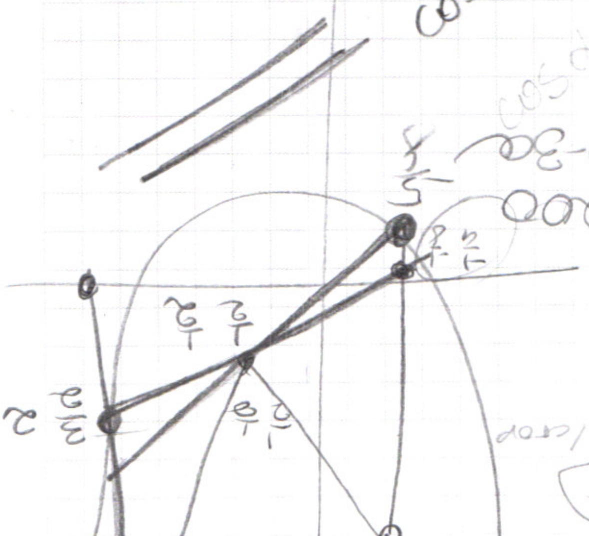
$$6r_1 = 8r_1 - 4r_2$$

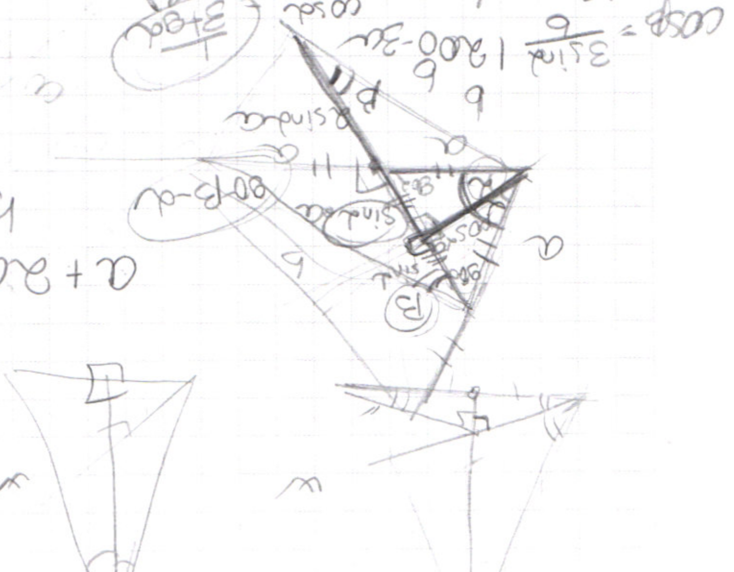
$$4r_2 = 2r_1$$

$$r_1 = 2r_2$$

$\sin\alpha = \frac{r_2}{2r_2} = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \frac{3}{2r_2}$





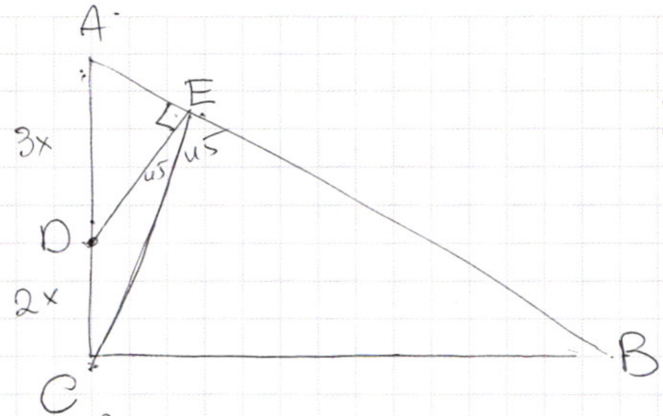
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

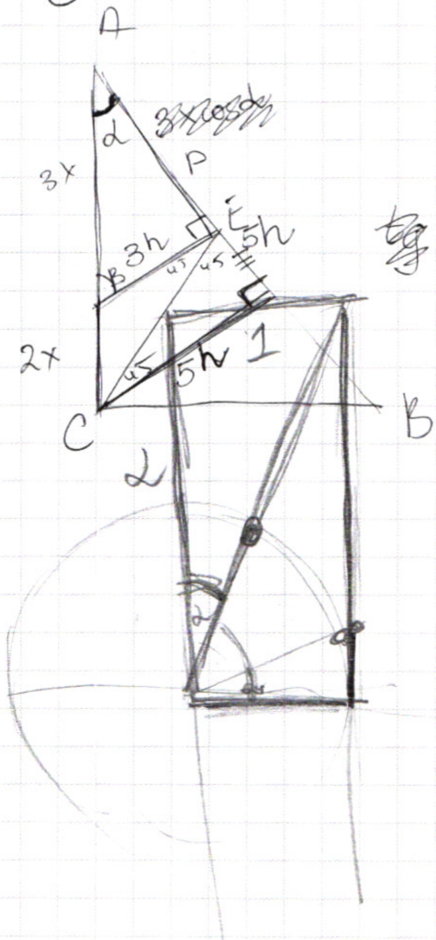


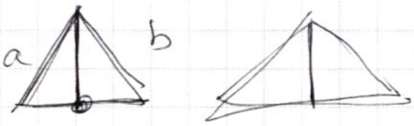
a, b $\quad D = 1 + 4\cdot 2 = 9$

$$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$$

$$\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right] \qquad \frac{1+3}{4} \quad \frac{1-3}{4}$$

$$\cancel{(x-2)(x-1)}$$





$$\frac{a\cdot b}{2} = \frac{h\cdot c}{2}$$

$$a\cdot b = h\cdot c$$

$$h = \frac{a\cdot b}{c}$$

$\cancel{tg}$ $\quad \cos\alpha = \frac{p}{3x}$

$$\cos\alpha = \frac{p+h}{3x}$$

$$1 \quad -\frac{1}{2}$$

$$2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$(x-1)(2x+1)$$

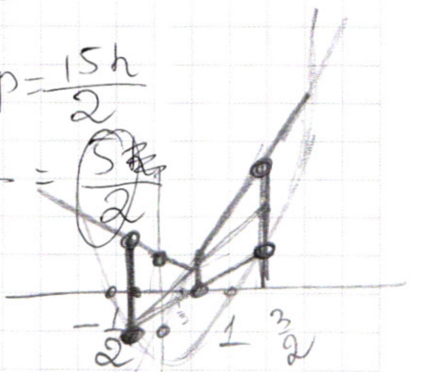
$$tg\beta = \frac{p}{3h} = \frac{p+5h}{5h}$$

$$p5h = p3h + 15h^2$$

$$2p\cancel{h} = 15h^{\cancel{2}}$$

$$2p = 15h \quad p = \frac{15h}{2}$$

$$tg\beta = \frac{p}{3h} = \frac{15h}{6h} = \frac{5}{2}$$



$$2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$2x > 1$$

$$ax + b$$

$$x + |2x-1|$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$x + 2x - 1 = 3x - 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x + 1 - 2x$$

$$1 - x$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)