МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Т.к. a, b, c – последовательные элементы геом. прог., то $b^2=ac$

$ax^2-2bx+c=0$; т.к. x – четвертый эл. прог. $\Rightarrow$
$c^2=bx$

$ax^2-2bx+c=0$
$D=4b^2-4ac=0 \Rightarrow x=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a} \Rightarrow c^2=bx=\frac{b^2}{a}$ (при $a\neq0$)

В то же время:

$c=2bx-ax^2=\frac{2b^2}{a}-\frac{b^2}{a}=\frac{b^2}{a} \Rightarrow c^2=c \Rightarrow c^2-c=0 \Rightarrow$

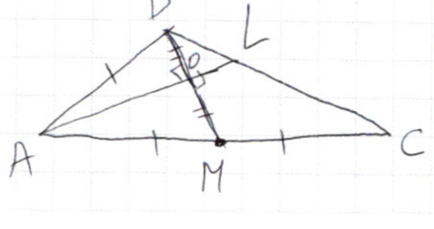
$\left[\begin{array}{l}c=0\\ c=1\end{array}\right.$; ~~Ответ: 0; 1~~

При $a=0$: $a=b=c=x=0$ (т.к. прогр.) $\Rightarrow$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}c=0\\ c=1\end{array}\right.$;

№ 2.

Возьмём произвольный $\triangle ABC$, удовлетв. усл:



1) Пусть BM – мед., AL – бисс.
$AL \cap BM = O$
2) Пусть $AM=MC=x$;
$\triangle ABM$ – равнобедр., т.к. AO – бисс. и

и AO - бис. $\Rightarrow AB = AM = x$

3) По св-ву бисс. AL:

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL} \Rightarrow \frac{\cancel{x}^{1}}{BL} = \frac{2\cancel{x}^{1}}{CL}$$

Пусть $BL = y \Rightarrow CL = \frac{2\cdot y}{1} = 2y \Rightarrow$

4) $3x + 3y = 900 \to x + y = 300$

Т.к. $\triangle ABC$ — треуг., то

$$\begin{cases} AB < BC + AC \\ BC < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2x + 3y \\ 3y < 3x \\ 2x < 3y + x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3y + \cancel{x} > 0 \text{ (из усл.)} \\ x > y \\ x < 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > y \\ x < 3y \end{cases} \overset{\text{т.к. } x = 300 - y}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 300 - y > y \\ 300 - y < 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 150 \\ y > 75 \end{cases} \Rightarrow$$

$y \in \mathbb{N}$ и $y \in [76; 149] \Rightarrow$ кол-во треугольников $=$

$149 - 76 + 1 = 74$.

Ответ: 74.

№3.

Дано:

$\triangle ABC$

$\angle C = 90^0$

$D \in AC$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$E \in AB$

$DE \perp AB$

Решение:

а)

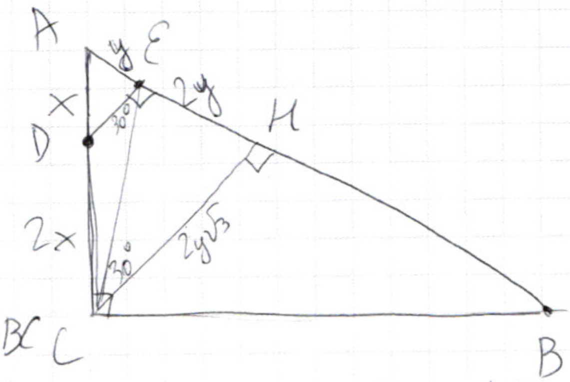
1) Пусть $AD = x \Rightarrow$

$AC = 3x \Rightarrow DC = 2x$

~~2) $\triangle ADE \approx \triangle AC$~~

2) Пусть CH — высота в $\triangle ABC$

3) $\triangle ADE \approx \triangle ACH$ (по 2-м углам), т.к. $\angle A$ - общ.; $\angle AED = \angle AHC =$
$= 90^0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CED = 30^\circ$
б) $AC = \sqrt{7}$

Найти:
а) $tg\angle BAC$?
б) S_{CED}

Пусть $AE = y \Rightarrow EH = 2y$ ($\triangle ADE \approx \triangle ACH$).

4) $DE \parallel CH$, т.к. $DE \perp AB \perp CH$. $\Rightarrow$
$\angle CED = \angle HCE = 30^\circ$ (н.л.у.)

5) Р/м $\triangle HCE$:
$\angle H = 90^\circ$; $\angle C = 30^\circ \Rightarrow$ ~~CH~~ $CE = 2EH = 4y$
$CH = CE \cdot \cos 30^\circ = 4y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2y\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

6) Р/м $\triangle ACH$:
$\angle A = \angle BAH \Rightarrow$
$tg\angle BAH = tg\angle A$; т.к. $\triangle AHC$ – прямоуг. $\Rightarrow$
$tg\angle A = \frac{CH}{AH} = \frac{2y\sqrt{3}}{3y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (а)

б) 7) Р/м $\triangle ABC$:
$tg\angle A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3} \cdot AC}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

8) Т.к. CH – выс. в п/у треуг. $\Rightarrow$
$CH^2 = AH \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12y^2}{3y} = 4y$

9) Пусть $EL \perp AC$ и $L \in AC$
$\triangle AEL \approx \triangle ABC$ (по 2-м углам) ($\angle A$ – общ.; $\angle ALE = \angle ACB = 90^\circ$)
$\Rightarrow \frac{EL}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow EL = \frac{AE \cdot BC}{AB} = \frac{y \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3}}{7y} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$.

10) $S_{CED} = \frac{EL \cdot DC}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{21} \cdot \frac{2}{3}AC}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cancel{7}}{\cancel{21} \cdot 3} =$
$= \frac{2\sqrt{3}}{9}$; Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

№ 7.

Р/м $f(x)$: $f(x)=f\left(\frac{x^2}{x}\right)=f(x^2)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)+f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$

$$f(x)=2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x).\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~При~~ При $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0\Rightarrow f(x)<f(y)$.

Распишем ~~в~~ значения $f(n)$ при $n\in[2;22]$; $n\in\mathbb{N}$:

$f(2)=1$ $f(7)=3$ $f(12)=3$ $f(17)=8$ $f(22)=6$.

$f(3)=1$ $f(8)=3$ $f(13)=6$ $f(18)=3$

$f(4)=2$ $f(9)=2$ $f(14)=4$ $f(19)=9$

$f(5)=2$ $f(10)=3$ $f(15)=3$ $f(20)=4$

$f(6)=2$ $f(11)=5$ $f(16)=4$ $f(21)=4$

~~Найдем кол-во пар $(x;y)$ при $f(x)<f(y)$:~~

$f(n)=1$: 2; 3

$f(n)=2$: 4; 5; 6; 9

$f(n)=3$: 7; 8; 10; 12; 15; 18;

$f(n)=4$: 14; 16; 20; 21

$f(n)=5$: 11

$f(n)=6$: 13; 22

$f(n)=8$: 17

$f(n)=9$: 19

При $f(x)=1: 2\cdot19=38$ пар (*)

$f(x)=2: 4\cdot15=60$ пар

$f(x)=3: 6\cdot9=54$ пары

$f(x)=4: 4\cdot5=20$ пар

$f(x)=5: 1\cdot4=4$ пары

$f(x)=6: 2\cdot2=4$ пары

$f(x)=8: 1\cdot1$ пара.

всего: 181 пара.

Ответ: 181 пара.

(*) Для каждого x берем y при которых $f(x)<f(y)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases};$$

$xy-6y-x+6\geq 0$

$x(y-1)-6(y-1)\geq 0 \to (y-1)(x-6)\geq 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 6 \\ y\geq 1 \end{cases}; \\ \begin{cases} x<6 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

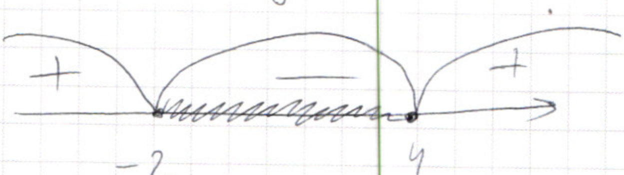
$x-6y\geq 0 \Rightarrow x\geq 6y.$

$x^2-12x+(2y^2-4y+20)=0$

$D_x=144-8y^2+16y-80=64+16y-8y^2\geq 0.$

$y:\ 8y^2-16y-64\leq 0 \Rightarrow y^2-2y-8\leq 0 \quad D_y=4+4\cdot 8=36.$

$\cancel{y_0=}\left[\begin{array}{l} y_0=\frac{2+6}{2}=4 \\ y_0=\frac{2-6}{2}=-2. \end{array}\right.$



$y\in[-2;4].$;

$\left[x=\frac{12+\sqrt{64+16y-8y^2}}{2}=\cancel{6}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\left[x = \frac{12-\sqrt{64+16y-8y^2}}{2} \right.$

$\left(\sqrt{64+16y-8y^2}\right)$ — наиб при $(64+16y-8y^2)$ — наиб.

$(64+16y-8y^2)$ — наиб. при $y = \frac{-16}{-8\cdot 2} = 1$

При $y=1$ $\sqrt{64+16y-8y^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. $\Rightarrow$

$x \in [6-3\sqrt{2}; 6+3\sqrt{2}]$.

При данных x, y — существует

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

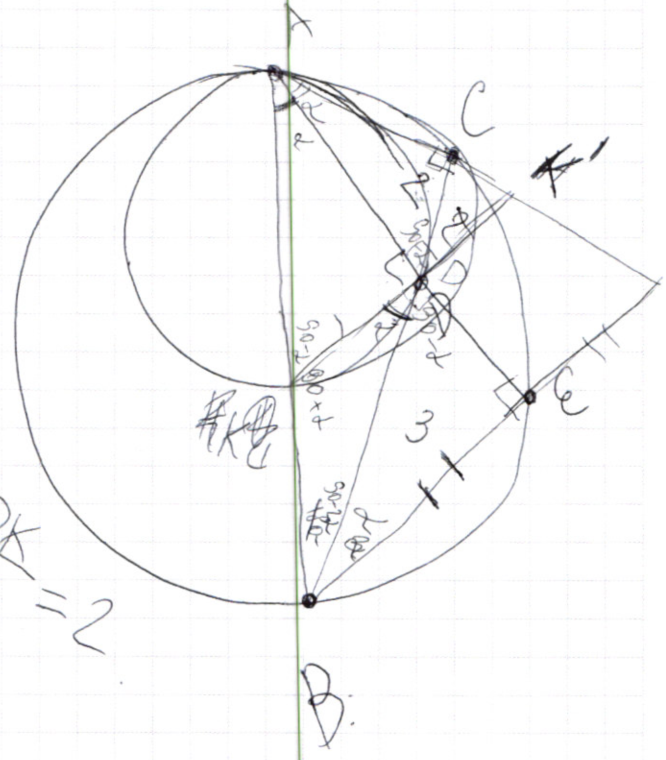
$f(x/y) < 0.$

$\cancel{f(x/y\ \frac{x}{y}) = f(}$

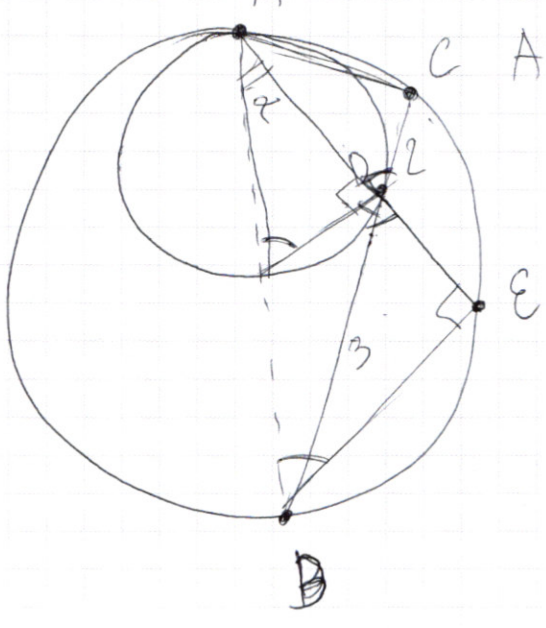
$f(\cancel{x}) = f(\cancel{x}) + f(1)$

$f(1) = 0.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right).$



$\frac{AD \cdot DK}{AK} = 2$



$AB^2 = AC^2 + 25.$

~~r·R~~

$(R-r)\cdot R = 9.$

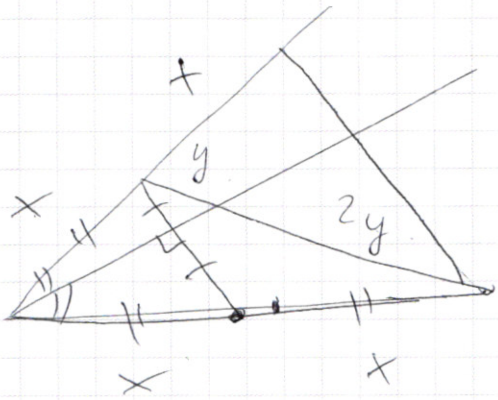
$R^2 - rR - 9 = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



1) [0; 1] +

2) 74 +

3)

4) ×3, но решил +

5)

6)

7)

$3x+3y=900$

$x+y=300.$

$x<3y$

$3y<3x.$

$y<x.$

$y<300-y$

$2x<3y+x$

$y<150.$

$\cancel{x<3y}.$

$\cancel{145-76}$

$300-y<3y$

$150-1-(75+1)=$

$4y>300$

$y>75.$

$=150-75-2+1=$

$=74.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-z^2=$

$x^2+2y^2-12x-4y+20$

$(x^2-12x+36)+(2y^2-4y+2)\cancel{4}=18.$

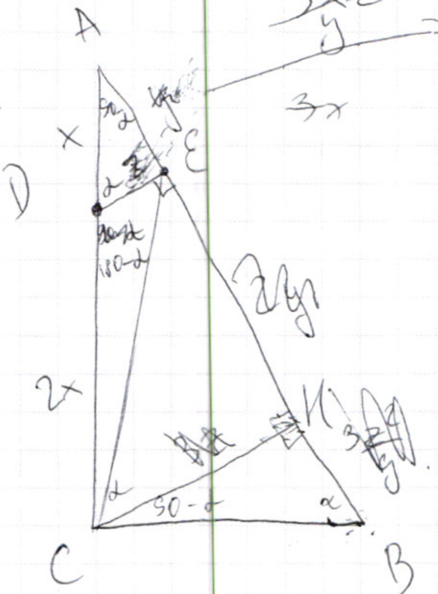
$\cancel{(x-6)^2+(y\sqrt{2}-\sqrt{2})^2=18}.$

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0.$

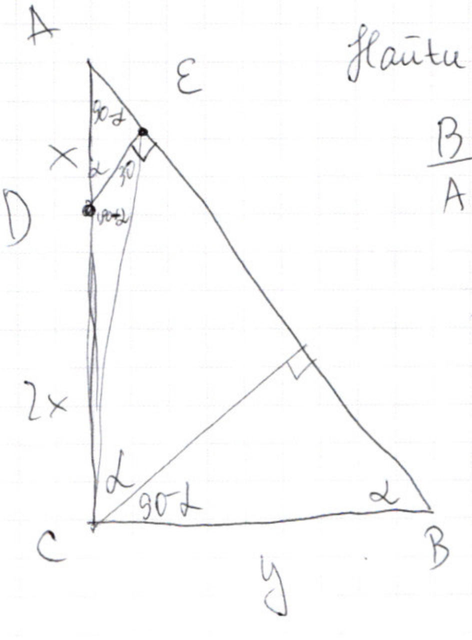
$\cancel{\frac{3xz}{y}}=\frac{z}{y}.$



$\frac{CH}{AH}=\frac{BH}{CH}.$

$CH^2=AH\cdot BH.$

$9z^2=3y\cdot3\frac{z^2}{y}.$



Найти:

$\frac{BC}{AC}$ или $tg\angle BAC$

$\sqrt{9x^2+y^2}$

$\frac{CH}{AH}=\frac{CB}{AC}$

$\frac{3xy}{\sqrt{9x^2+y^2}}$

$\cancel{CB=\frac{3xz}{y}}.$

$\cancel{\frac{z}{y}}=\frac{CB}{3x}$

$CB=\frac{3z\cdot3x}{3y}=\frac{3xz}{y}.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

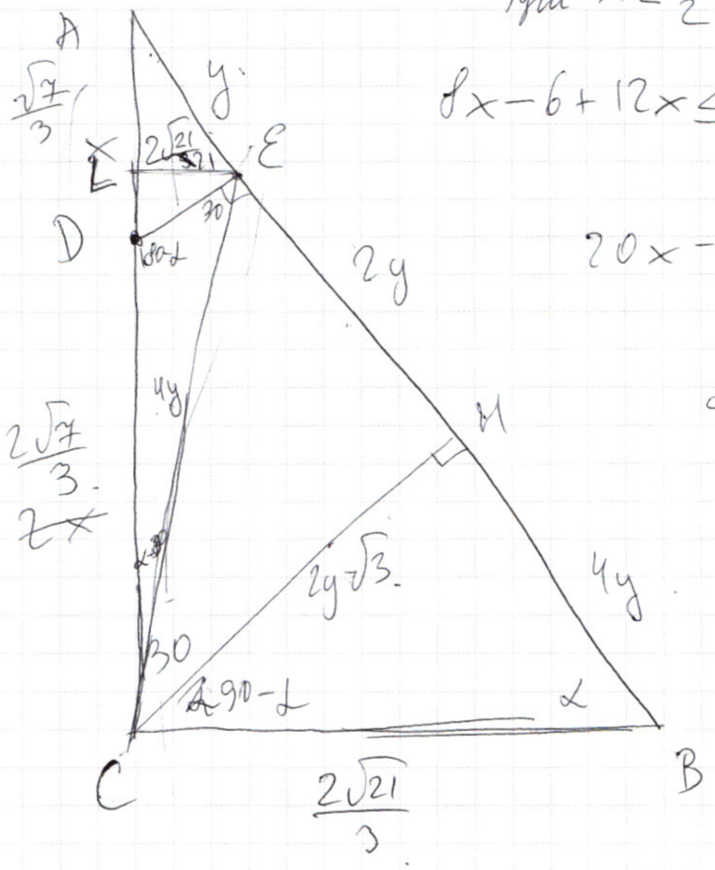
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

При $x < \frac{1}{2}$:

$$8x-6+12x \le ax+b \le -8x^2+6x+7.$$

$$20x-6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$$

$$tg(90-\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$BH = \frac{CH^2}{AH}\quad \frac{12y^2}{3y} = 4y$$

$$9x^2 = 4y^2 \cdot 3 + 9y^2$$

$$\cancel{9x^2 = 21y^2}$$

$$\frac{2y\sqrt{3}}{3y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\frac{8\sqrt{21}}{9}\cdot\sqrt{7}}{8} = \frac{7\cdot\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{BC}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$S = \boxed{\frac{2}{3}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{27}}$$

172

98 74 8 9

38 60 54 20 4 4 1 1

черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

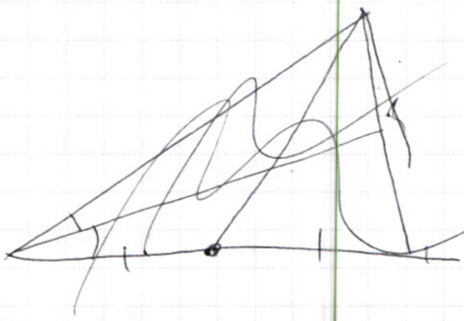
$b^2 = ac$

$a, b, c \leq 450.$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 0$

$x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}.$



~~$c = 2bx - ax^2 = \frac{2b^2}{a} - \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$~~

$x -$

$b^2 = ac$

$c^2 = bx$

$c^2 = \frac{b^2}{a}.$

$D = 4b^2 - 4ac = 0$

$x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$

$c = 2bx - ax^2 = \frac{2b^2}{a} - \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{a}$

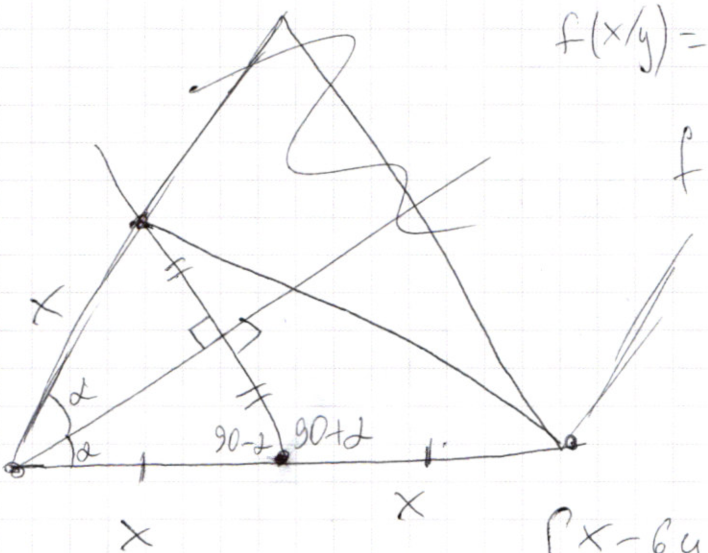
$c^2 = c$

$c^2 - c = 0$

$c(c-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

2: 1
3: 1
4: 2/2 = 2
5: 2
6: 2/3 = 2
7: 3
8: 2/2 = 3
9: 3/3 = 2
10: 2/5 = 3
11: 5
12: 4/3 = 3
13: 6
14: 2/7 = 4
15: 3/5 = 3
16: 2/4 = 4
17: 8
18: 3/6 = 3
19: 9
20: 4/5 = 4
21: 3/7 = 4
22: 2/11 = 6



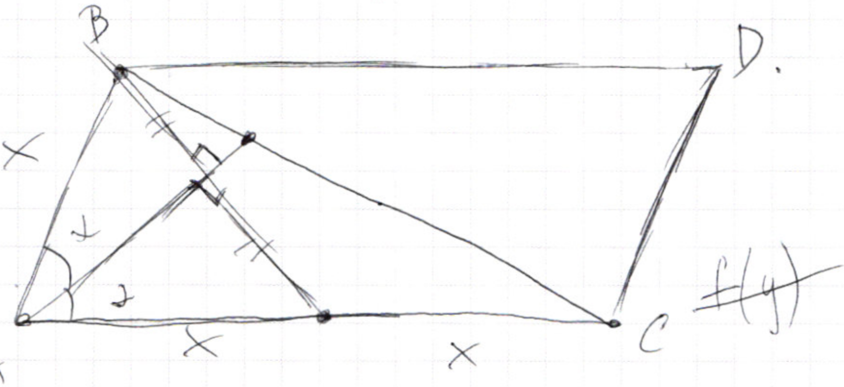
$f(x/y) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(x)$

$f(2) = \cancel{f(1)}\ 1$

$\cancel{(x^2-12x+36)+(2y^2-4y+2}$

$\cancel{16}$

$$\begin{cases} x-6y = 7\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$



$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$=$

$\cancel{f(y)}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(\cancel{x}) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{2}f(x)$

$\cancel{10x^2+4x(1-\cos 2\alpha)-810000=0}$.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 2\alpha$.

$BC^2 = x^2 + 4x^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos 2\alpha =$

$= x^2 + 4x(1-\cos 2\alpha)$

$f(x) = f\left(\frac{x^2}{x}\right) =$

$x^2 + 2x + 7\sqrt{x^2+4x(1-\cos 2\alpha)} = 900$

$= f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) +$

$\cancel{3x - 900 =}$ $900 - 3x = 7\sqrt{x^2+4x(1-\cos 2\alpha)}$ $= f(x))$.

$810000 - 9x^2 = x^2 + 4x(1-\cos 2\alpha)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\cancel{x^2+2y^2-13x+2y+20+(x-6y)=0}$$

$$xy-6y-x+6\geq 0.$$

$$x(y-1)-6(y-1)\geq 0$$

$$(y-1)(x-6)\geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y<1 \\ x<6. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(x-1)(x+1-12)+$$

$$2(y-1)(y+1-4)+7=0.$$

$$x-6y\geq 0.$$

$$x\geq 6y.$$

$$x^2-1 \quad -12x+12$$

$$2y^2-2 \quad -4y+4.$$

$$+7 \quad . = (x^2-1)-12(x-1)+$$

$$+2(y^2-1)\cancel{+}-4(y-1)$$

$$+7.$$

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{x}^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x^2-12x+(2y^2-4y+20)=0$

$D=144-\cancel{?}\,8y^2+16y\,\cancel{4}-80=$

$=64-8y^2+16y$

$x=\frac{12+\sqrt{64-8y^2+16y}}{2}$

$x=\frac{12-\sqrt{64-8y^2+16y}}{2}$

$-8y^2+16y+64\geq0$

$8y^2-16y-64\leq0$

$y-2y-8\leq0$

$D_y=4+4\cdot8=\cancel{40}\,36.$

$y=\frac{2+6}{2}=4$

$y=\frac{2-6}{2}=-2$

$\cancel{16}\ \frac{12+6\sqrt{2}}{2}=6+3\sqrt{2}.$

$36\cdot2$

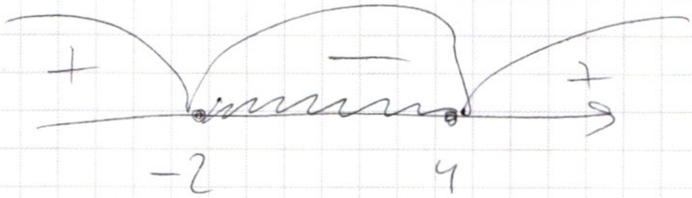
$y_0=\frac{-16}{-16}=1$

$\frac{12-6\sqrt{2}}{2}=$

$6-3\sqrt{2}.$

~~D∈~~

~~8y∈[~~



$y\in[-2;4]$.