МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Если b_{n-1}; b_n; b_{n+1} – последовательные члены геометрической прогрессии, то $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

Тогда $b^2 = ac$

Найдём корни $ax^2 - 2bx + c = 0$.

$a \neq 0$, т.к. если $a = 0$, то геометрическая прогрессия состоит только из нулевых элементов, но в геом прогрессии таких элементов не должно быть.

$D = 4b^2 - 4ac$ $\quad x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2b \pm \sqrt{4ac - 4ac}}{2a} =$

$= \frac{2b \pm 0}{2a} = \frac{b}{a}$

Значит b; c; $\frac{b}{a}$ – последовательные члены геом. прогрессии. Значит

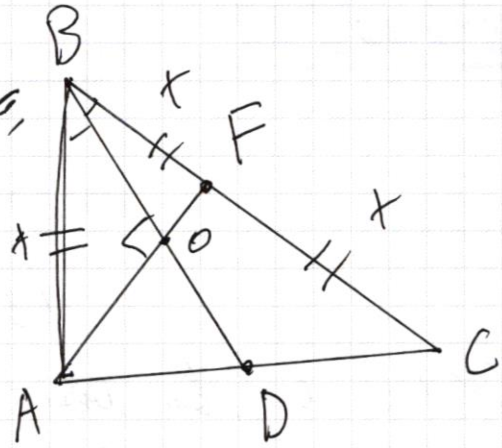
$c^2 = \frac{b^2}{a}$, т.к. $b^2 = ac$ $\quad c^2 = \frac{ac}{a}$ $(a \neq 0)$ $c^2 = c$

$c(c-1) = 0$ $\quad c \neq 0$, т.к. в геом. прогрессии нет нулевых элементов $\Rightarrow c = 1$

Ответ: $c = 1$

№2

Пусть в $\triangle ABC$ AF – медиана, BD – биссектриса.



$\angle AOB = 90^\circ$ (O – $BD \cap AF$)

Тогда $\triangle AOB = \triangle FOB$ по катету (BO – общ) и прилежащему острому углу ($\angle ABO = \angle FBO$)
($\angle BOF = 90^\circ$ как смежный с $\angle AOB = 90^\circ$)

Значит $AB = BF$. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$,
$AC = 900 - 3x$.

Значит нужно найти кол-во $\triangle$ со сторонами $x; 2x; 900-3x$ ($x \in \mathbb{N}$).

В таких $\triangle$ одна из медиан будет перпендикулярна биссектрисе. Медиана проведённая к стороне $2x$ образует р/б $\triangle$ внутри $\triangle(x; 2x; 900-3x)$, в этом р/б$\triangle$ биссектриса угла противолежащего основанию будет и высотой, но это также биссектриса угла $\triangle(x; 2x; 900-3x)$, значит условие биссектриса $\perp$ медиане выполнено.

Для любого $\triangle ABC$: $AB < BC + AC$, поэтому

$x < 2x + 900 - 3x$

$2x < x + 900 - 3x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$900-3x<x+2x$

$$\begin{cases}2x<900\\4x<900\\900<6x\end{cases}\quad \begin{cases}x<450\\x<225\\x>150\end{cases} \Rightarrow x\in(150;225)$$

$$\begin{cases}x\in(150;225)\\x\in N\end{cases} \Rightarrow x\in\{151;152;\ldots;223;224\}$$

При каждом из данных x будет 1 искомый $\triangle$.
Всего таких x: $224-151+1=74$

Ответ: таких $\triangle$ — 74 шт.

№3

$$\begin{cases}x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1)\\x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2)\end{cases}$$

(1): $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$ $\boxed{x-6y\geq 0}$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$

Рассмотрим как кв-е с параметром

y относительно x.

$D = 1 + 169y^2 - 26y - 144y^2 - 24y + 24 = 25y^2 - 50y + 25 =$

$= 5(y - 2y + 1) = (5(y-1))^2$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{13y - 1 + 5y - 5}{2} = 9y - 3 \\ x = \dfrac{13y - 1 - 5y + 5}{2} = \dfrac{8y+4}{2} = 4y + 2 \end{array}\right.$$

I) Подставим $x = 9y - 3$ в (2)

$(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) - 4y + 20 = 0$

$81y^2 - 54y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$

$83y^2 - 166y + 65 = 0 \quad | : 83$

$y^2 - 2y + \frac{65}{83} = 0$

$D = 4 - \frac{4 \cdot 65}{83} = 4\left(1 - \frac{65}{83}\right) = 4 \cdot \frac{18}{83} = 36 \cdot \frac{2}{83}$

$y = \dfrac{2 \pm 6\sqrt{\frac{2}{83}}}{2} = 1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$\underline{x - 6y \geq 0} \quad 9y - 3 - 6y \geq 0 \quad 3y - 3 \geq 0 \Rightarrow \underline{y \geq 1}$

$y = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{83}} < 1 \Rightarrow$ не подходит

$y = 1 + 3\sqrt{\frac{2}{83}} \geq 1$ – верно

$x = 9\left(1 + 3\sqrt{\frac{2}{83}}\right) - 3 = 6 + 27\sqrt{\frac{2}{83}}$

II) Подставим ~~$y=$~~ $x = 4y + 2$ в (2)

$(4y+2)^2 + 2y^2 - 12(4y+2) - 4y + 20 = 0$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$16y^2+16y+4+2y^2-48y-24-4y+20=0$

$18y^2-36y=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

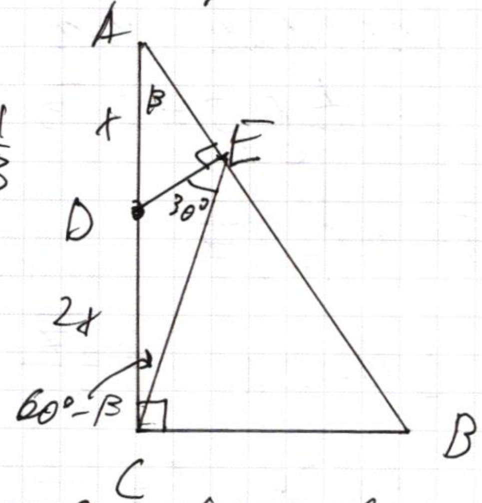
$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$ $\quad x-6y\geq 0 \quad 4y+2-6y\geq 0 \quad 2-2y\geq 0 \Rightarrow$ $y\leq 1$

$y=2$ – не соотв. $y\leq 1$.

$y=0$ – подходит – $x=4\cdot 0+2=2$

Ответ: $(2;0)$; $\left(6+27\sqrt{\frac{2}{83}}; 1+3\sqrt{\frac{2}{83}}\right)$

№4



а) $\triangle ABC$ – прям. $\angle C=90^\circ$, $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$

$DE\perp AB$. $\angle CED=30^\circ$

$tg(\angle BAC)$ – ?

Пусть $AD=x$, $\angle BAC=\beta$, тогда $DC=2x$, $\angle CDE=90^\circ+\beta$ (как внешний угол $\triangle ADE$)

$\angle DCE=180^\circ-\angle CDE-\angle CED=180^\circ-30^\circ-90^\circ-\beta=$
$=60^\circ-\beta$.

№4

По т-ме синусов для $\triangle CDE$

$$\frac{DE}{\sin(60^\circ-\beta)} = \frac{2x}{\sin 30^\circ} \qquad DE = \sin(60^\circ-\beta)\cdot 2x\cdot 2$$

По т-ме синусов для $\triangle ADE$

$$\frac{x}{\sin 90^\circ} = \frac{DE}{\sin\beta} \qquad DE = x\cdot\sin\beta$$

$$x\cdot\sin\beta = 4x\sin(60^\circ-\beta)$$
$$\sin\beta = 4\sin(60^\circ-\beta)$$
$$\sin\beta = 4(\sin 60^\circ\cos\beta - \sin\beta\cos 60^\circ)$$
$$\sin\beta = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta - 4\cdot\frac{1}{2}\sin\beta$$

$$\sin\beta = 2\sqrt{3}\cos\beta - 2\sin\beta$$
$$3\sin\beta = 2\sqrt{3}\cos\beta$$

$\beta\in(0^\circ;90^\circ)$, поэтому $\cos\beta\neq 0$

поделим на $\cos\beta\neq 0$

$$3\,tg\beta = 2\sqrt{3} \qquad tg\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

б) $AC=\sqrt{7}$ $\quad 3x = AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$CD = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$tg^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \qquad \frac{4}{3}+1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \qquad \cos^2\beta = \frac{3}{7}$$

$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$, $\beta\in(0^\circ;90^\circ) \Rightarrow$

$\sin\beta > 0 \Rightarrow \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

в $\triangle ADE$ $\sin\angle ADE = \sin\beta = \frac{2}{\sqrt7} = \frac{DE}{AD}$

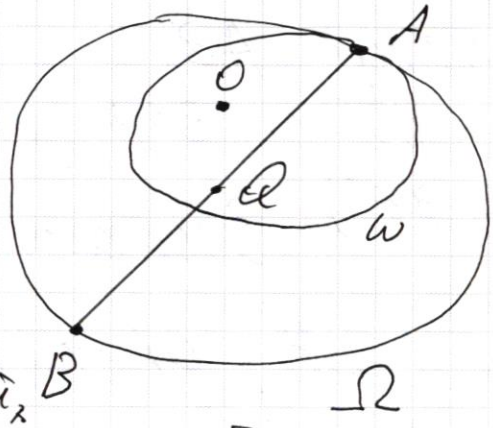
$\frac{2}{\sqrt7} = \frac{DE}{x}$ $DE = \frac{2}{\sqrt7}\cdot\frac{\sqrt7}{3} = \frac{2}{3}$

$S_{\triangle DEC} = \frac12 DE\cdot DC\cdot \sin(\angle CDE) = \frac12\cdot\frac23\cdot\frac{2\sqrt7}{3}\cdot\sin(90^\circ+\beta) =$
$= \frac{2\sqrt7}{9}\cdot\sin\beta = \frac{2\sqrt7}{9}\cdot\frac{2}{\sqrt7} = \frac49$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt3}$; б) $S_{DEC} = \frac49$

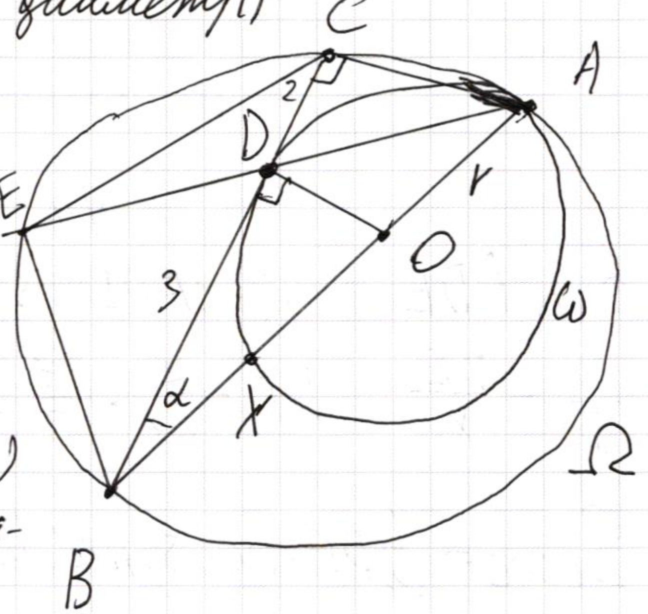
№5

Пусть O - центр ок-сти ω, ~~а Q - центр ок-сти Ω~~, а Q - центр ок-сти Ω.



Допустим O не лежит на AB. Окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через её центр, значит обе ок-сти симметричны относительно OQ. $A\notin OQ$ значит есть вторая точка A' пересечения ок-стей (в силу симметрии)

Это противоречит условию, значит $O \in AQ$
$\Rightarrow D \in AB$ (т.к $Q \in AB$ - диаметр)



X - точка пересечения AB и w ($2^я$ точка).
Пусть радиус ок-сти w — r, а ок-сти Ω — R.
Тогда $AB = 2R$ (диаметр)
$BX = 2R - 2r$ (т.к. AX - диаметр ок-сти w)
По т-ме о квадрате касательной

$BD^2 = BX \cdot BA \qquad 9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

Проведём DO и CA. $DO \perp BD$ как радиус, проведённый в точку касания.
$CA \perp BC$ т.к. $\angle BCA$ - опирается на диаметр AB.
$\triangle BDO \sim \triangle BCA$ по $2^м$ $\angle$ ($\angle B$ - общ, $\angle BDO = \angle BCA = 90°$). Значит $\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA}$ $BO = 2R - r$ т.к.

$AB = 2R$, $OA = r$ (радиус).

$\frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R} \quad 6R = 10R - 5r \quad 5r = 4R$

$r = \frac{4}{5}R$, $9 = 4R^2 - 4Rr$.

$9 = 4R^2 - \frac{16R^2}{5} \; | \cdot 5 \qquad 45 = 20R^2 - 16R^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$45=4R^2 \quad R^2=\frac{45}{4} \quad R=\frac{3}{2}\sqrt{5} \quad r=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

$AB=2R=3\sqrt{5} \quad BO=2R-r=2R-\frac{4}{5}R=\frac{6}{5}R=$

$=\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}=\frac{9}{\sqrt{5}}$

Пусть $\angle DBA=\alpha$ из $\triangle DBO$: $\cos\alpha=\frac{BD}{BO}$

$\cos\alpha=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{9}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

По т-ме косинусов для $\triangle BDA$

$DA^2=BD^2+AB^2-2AB\cdot BD\cos\alpha$

$DA^2=9+45-2\cdot3\cdot3\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=54-30=24$

$AD=2\sqrt{6}$.

EA и CB – пересекающиеся хорды $\Rightarrow$

$CD\cdot DB=ED\cdot AD$

$2\cdot3=ED\cdot2\sqrt{6} \quad ED=\frac{3}{\sqrt{6}}$

$EA=ED+AD=\frac{3}{\sqrt{6}}+2\sqrt{6}=\frac{3}{\sqrt{6}}+\frac{12}{\sqrt{6}}=\frac{15}{\sqrt{6}}$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9} \quad \alpha\in(0^\circ;90^\circ)\Rightarrow\sin\alpha>0$

$\sin\alpha=\frac{2}{3}$

Пусть $\angle ADB=\beta$

№5

По т-ме синусов для $\triangle ABD$

$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{DA}{\sin\alpha}$ $\quad$ $\frac{3\sqrt{5}}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{6}\cdot 3}{2}$

$\frac{\sqrt{5}}{\sin\beta} = \sqrt{6}$ $\quad$ $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$S_{ABCE} = \frac{1}{2} CB \cdot AE \cdot \sin\angle BDA = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AE \sin\beta$

$S_{ABCE} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{25 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 6} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $\cancel{S_{ABCE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}}$

$S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

~~№6~~

~~$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$, $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$~~

~~Найдём минимум $y = -8x^2+6x+7$ при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$~~

Это кв-я функция, график парабола, $x_в = -\frac{6}{-16} = \frac{3}{8}$. Значит на $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{8}]$ - возрастает,

а на $x \in [\frac{3}{8}; 1]$ - убывает (т.к. $-8 < 0 \Rightarrow$ ветви вниз)

Значит минимум это $y(-\frac{1}{2})$ или $y(1)$

$y(-\frac{1}{2}) = -2 - 3 + 7 = 1$ $\quad$ $y(1) = -8 + 6 + 7 = 5$

Значит минимальное значение ф-ии — 1.

Если $ax+b \le 1$, то $ax+b \le -8x^2+6x+7$ при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$, т.к. ~~$ax+b$~~ 1 - минимум $-8x^2+6x+7$ на $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$. ~~$ax+b > 1$ - не подходит, т.к.~~ тогда

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$2 \le x \le 22$, $2 \le y \le 22$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$, $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow$

$f(x) > f(y)$

Посчитаем $f(2)$; $f(3)$; ... $f(22)$

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$ $\qquad$ $f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$

$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$ $\qquad$ $f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$ $\qquad$ $f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$ $\qquad$ $f(16) = f(2) + f(8) = 4$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$ $\qquad$ $f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$

$f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$ $\qquad$ $f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(8) = f(2) + f(4) = 3$ $\qquad$ $f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$ $\qquad$ $f(20) = f(2) + f(10) = 4$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$ $\qquad$ $f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$ $\qquad$ $f(22) = f(2) + f(11) = 6$

$f(12) = f(2) + f(6) = 3$

Значение $f(x)$	кол-во повторений
1	2
2	4
3	6
4	4

для каждого значения $f(x)$ будем смотреть кол-во значений $f(x)$ меньше, чем это (для поиска пар $(x;y)$)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№ 7

5	1
6	2
8	1
9	1

Значит для $f(x)=9$ y – любое из ост. 20 числа

для $f(x)=8$ y – осталось ~~20~~ 19 чисел

для $f(x)=6$ (2 варианта) y – осталось ~~18~~ 17 чисел

$f(x)=5$ y – ост. ~~17~~ 16 ~~8~~ чисел

$f(x)=4$ (4 вар) y – ост. 12 чисел

$f(x)=3$ (6 вар) y – ост. 6 чисел

$f(x)=2$ (2 вар) y – ост. 2 числа.

$f(x)=1$ – y – не осталось.

Значит всего

$$1\cdot 20+1\cdot 19+2\cdot 17+1\cdot 16+4\cdot 12+6\cdot 6+4\cdot 2=$$
$$=20+19+34+16+48+36+8=181$$

Ответ: таких пар 181 шт.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2)=1$

$f(3)$ 1

4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	6
14	4
15	3
16	4
17	8
18	3
19	9
20	4
21	4
22	6

$f(12)=f(3)+f(4)$

$f(2)+f(6)$

$f(3)=1$

$f(2)=1$

f

кол-во	число
2	1
4	2
6	3
4	4
1	5
2	6
0	7
1	8
1	9

$$\frac{\begin{matrix}16\\48\end{matrix}}{64}$$
$$\frac{\begin{matrix}64\\44\end{matrix}}{108}$$
$$\frac{\begin{matrix}108\\73\end{matrix}}{181}$$

$$\frac{\begin{matrix}39\\34\end{matrix}}{73}$$

$$\frac{\begin{matrix}36\\8\end{matrix}}{44}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{9=4R(R-r)}$

$r+\sqrt{9+r^2}=2R$

$9+r^2=4R^2+r^2-4rR$

(b_n): a; b; c; x_4

$ax^2-2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac$

$x=\frac{2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{b}{a}$

$a; b; c; \frac{b}{a}+\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$3^2=(2R-2r)\cdot 2R$

$\boxed{9=4R^2-4Rr}$

$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$

$b^2=ac$ $4R(R-r)$

$a; b; c; \frac{b}{a}$ $c^2=\frac{b^2}{a}$

$b^2=ac$ $c^2=\frac{ac}{a}$ $c^2=c$

$1; 1; 1; 1$

x^2-2x+1

$c(c-1)=0$ $\boxed{c=0}$ $\boxed{c=1}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$D=144-8y^2+16y-80=-8y^2+16y+64=-8(y^2-2y-8)$

$-8(y^2-2y+4-12)$

$-8(y-2)^2+96\geq0$

$\frac{12}{8}$ 96

$x-6y\geq0$

$12\geq(y-2)^2$

$-2\sqrt{3}\leq y-2\leq2\sqrt{3}$

$y\in[2-2\sqrt{3}; 2+2\sqrt{3}]$

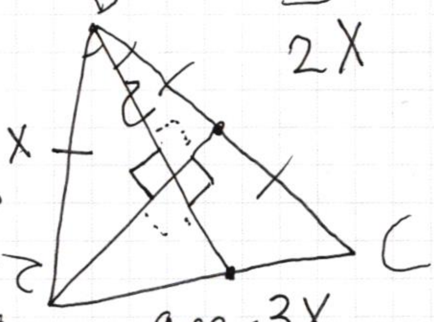
$\sin B=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\cos B=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin(180^\circ-B)$ $\boxed{\sin B}$

$\boxed{\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$P=900$



$2X$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$

$D=144-8y^2+16y-80=$

$=-8y^2+16y+64=$

$x;\ 2x;\ 900-3x$

$\cancel{x>2x+900}-3x \quad x<2x+900-3x$

$2x<x+900-3x$

$900-3x<x+2x$

$2x<900 \quad \boxed{x<450}$

$4x>900 \quad \boxed{x<225}$

179 199

$900<6x \quad 219 \quad 300<x$

159 220

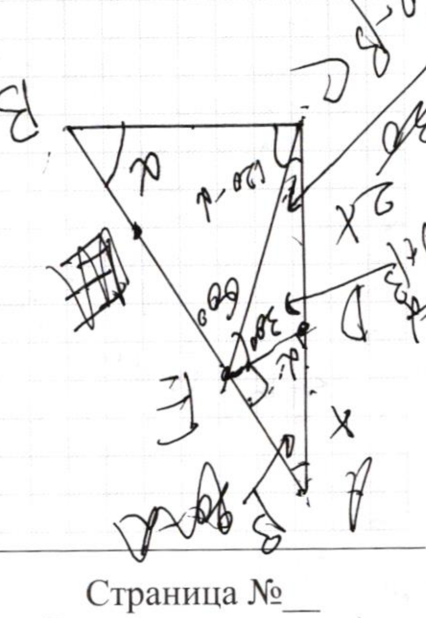
$\boxed{150<x<225}$

$x\in\{151;152;\ldots;223;224\}$

$225-150+1$

76

$\frac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}=\frac{2}{2\cdot x\cdot 2}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2y^2-4y+x^2-12x+20=0$

$D=16-4x^2+48x-80=-4x^2+48x-64=-4(x^2-12x+16)=$

$=-4(x^2-12x+36-20)=-4(x-6)^2+80\geq 0$

$(x-6)^2 \leq 20$

$-2\sqrt{5}\leq x-6\leq 2\sqrt{5}$ $\qquad x-6y\geq 0$

$x\in[6-2\sqrt{5};6+2\sqrt{5}]$

$x\geq 6y \qquad \frac{x}{6}\geq y \qquad y\leq\frac{6+2\sqrt{5}}{6}$

$2+2\sqrt{3} \qquad y\leq 1+\frac{\sqrt{5}}{3}$

$x^2-12xy+36y^2-xy+6y+x-6=0$

$x^2-13xy+x+36y^2+6y-6=0$ $\qquad 13y-1$

$D=169y^2-26y+1-144y^2-24y+24=$

$=25y^2-50y+25=25(y^2-2y+1)=$

$=(5(y-1))^2$

$x=\frac{13y-1+5y-5}{2}=\frac{18y-6}{2}=9y-3$

$x=\frac{13y-1-5y+5}{2}=\frac{8y+4}{2}=4y+2$

$x - 6y \geq 0$

1) $x = 9y - 3$

2) $x = 4y + 2$

$9 \cdot 3$

$12 \cdot 9 = 108$

$108 + 4 = 112$, $112 + 54 = 166$

$81y^2 - 54y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$

$108 + 58 = 166$

$83y^2 - 166y + 65 = 0$

56

65

$9y - 3 - 6y \geq 0$ $\quad 3y - 3 \geq 0$ $\quad \boxed{y \geq 1}$

$D = 116^2 - 4 \cdot 83 \cdot 65$

$116 \cdot 116 = 696 + 116 = 13456$

$83 \cdot 65 = 415 + 498 = 5395$, $5395 \cdot 4 = 21580$

$D < 0$ $\quad y \in \varnothing$

$x = 4y + 2$ $\quad 4y + 2 - 6y \geq 0$

$2 - 2y \geq 0$ $\quad \boxed{1 \geq y}$

$48 \quad 12$

$-12 \quad 4$

$16y^2 + 16y + 4 + 2y^2 - 48y - 24 - 4y + 20 = 0$

10

$18y^2 - 36y = 0$

$y^2 - 2y = 0$ $\quad y = 0$

$\cancel{\boxed{y = 2}}$ $\quad 1 \geq y$

$y = 0$ $\quad \boxed{x = 2}$

$x = \sqrt{6 - x}$

$83 - 65 = 18$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$y^2 - 2y + \frac{65}{83} = 0$

$D = 4 - \frac{65 \cdot 4}{83}$

$4\left(1 - \frac{65}{83}\right)$

$4 \cdot \frac{18}{83}$

$36 \cdot \frac{2}{83}$

$y = \frac{2 \pm 6\sqrt{\frac{2}{83}}}{2}$

$y = 1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$3\sqrt{5};\ 3;\ \frac{\sqrt{21}}{4}$

$45 = 9 + \frac{21}{16} - 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{21}}{4}\cos\alpha$

$36 + \frac{21}{16} - \frac{3}{2}\sqrt{21}\cos\alpha$

$\frac{555}{16} = -\frac{3}{2}\sqrt{21}\cos\alpha$

$-\frac{555}{8\cdot 3} = \sqrt{21}\cos\alpha$

$-\frac{185}{8} = \sqrt{21}\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{185}{8\sqrt{21}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{185^2}{64\cdot 21}}$

$f(x)$

$f(x) =$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$ $\quad 3\sqrt{5}$

$x^2 = 9 + 45 - 2\cdot 3\cdot 3\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$

$x^2 = 54 - 30$

$x^2 = 24$

$\boxed{x = \sqrt{24}}$

$\boxed{x = 2\sqrt{6}}$

$\frac{2R}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{6}\cdot 9}{2}$

$\boxed{T > 9 + xD}$

$2\sqrt{6} + \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}}$

$\frac{3\sqrt{5}}{\sin\beta} = \sqrt{6}\cdot 9$

$\frac{\sqrt{5}}{\sin\beta} = 3\sqrt{6}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}$; 5 ; $2\sqrt{6} + \frac{3}{\sqrt{6}}$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}\cdot\frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{2\cdot 6} = \frac{25\sqrt{5}}{12}$

555 | 3
25 | 185
15

$36\cdot16 = 576$; $576 - 21 = 555$

64, 21, 64

9·5

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

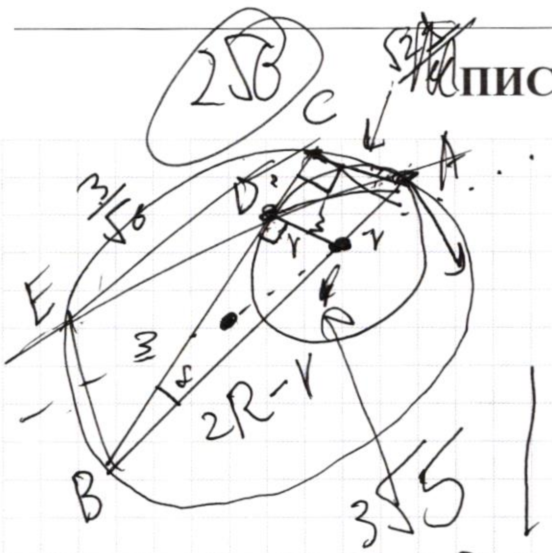
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{3\sqrt5}{6}=\frac{5}{x}$ $x=\frac{10}{\sqrt5}$

$\frac{5}{2R}=\frac{3}{2R-r}$

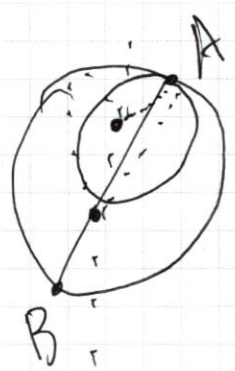
$10R-5r=6R$

$4R=5r$ $r=\frac{4R}{5}$

$9=4R^2-4Rr$

$9=4R^2-\frac{16}{5}R^2$

$45=20R^2-16R^2=4R^2$ $R^2=\frac{45}{4}$



$\boxed{R=\frac{3}{2}\sqrt5}$ $r=\frac{4\cdot3\sqrt5}{2\cdot5\sqrt5}=\frac{6}{\sqrt5}$

$\cos\alpha=\frac{3\cdot5}{6R}=\frac{5}{2R}$

$\cos 2\alpha=\frac{3}{2R-r}=\frac{3}{2R-\frac{4}{5}R}=\frac{3\cdot5}{6R}=\frac{3\cdot5\cdot2}{6\cdot3\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{3}$

$DA^2=9+\frac{9\cdot5}{4}-2\cdot3\cdot\frac{3}{2}\sqrt5\cdot\frac{\sqrt5}{3}$

$DA^2=9\left(1+\frac{5}{4}\right)-15$

$9\cdot\frac{9}{4}-15=\frac{81}{4}-\frac{60}{4}=\frac{21}{4}$

$DA=\frac{\sqrt{21}}{4}$

$\boxed{\frac{\sqrt5}{3}}$

$\frac{\sqrt{21}}{4}\cdot y=2\cdot3$

$y=\frac{24}{\sqrt{21}}$

$\left(\frac{\sqrt{21}}{4}+\frac{24}{\sqrt{21}}\right)$

$\cos\alpha=\frac{5\cdot2}{2\cdot3\sqrt5}$

$x^2=9+\frac{45}{4}-2\cdot\frac{3\sqrt5}{2}\cdot\frac{\sqrt5}{3}$

$x^2=\frac{79}{4}-\frac{60}{4}$ $x^2=\frac{36+45}{4}-15$ $x=\frac{\sqrt{19}}{2}$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b$

$f(2) = f(3) + f\left(\frac{2}{3}\right)$

$x \le \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$8x + 6x - 6 \le ax + b$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f(y) < f(x)$

$a > 0$

$\underline{x(14-a) - 6 - b \le 0}$

$\boxed{7 - a + b \le 0}$

$\cancel{a \ge 14}$

$f(2) = 1 \quad f(3) = 1$

$\overline{x(14-a) - 6 - b \le 0}$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2 \quad f(7) = 3$

$f(6) = 2$

x

$a - b - 7 \ge 0$

$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$\begin{cases} 4x + ax + b - 6 \ge 0 \\ 14x - ax - 6 - b \le 0 \end{cases}$

$b \le$

$a = 0 \quad \begin{cases} b - 6 \ge 0 \\ -6 - b \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b \ge 6 \\ b \ge -6 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + b - 6 \ge 0 \\ 14x - 6 - b \le 0 \end{cases} \quad x = \frac{1}{2} \quad -b \ge 4 \quad \boxed{b \in [1; 4]}$

$x = \frac{1}{2} \quad 1 \le b$

$\underline{a > 0}: \begin{cases} 4x + ax + b - 6 \ge 0 \quad x = \frac{1}{2} \\ \cancel{14x - ax - 6 - b \le 0} \quad x = \end{cases}$

$7 + b \le 0$

$b -$

$ax - 14x + 6 + b \ge 0$

$\begin{cases} x(4+a) + b - 6 \ge 0 \quad x = \frac{1}{2} \\ x(a-14) + 6 + b \ge 0 \quad x = -1 \end{cases}$

$2 + \frac{a}{2} + b - 6$

$\underline{\frac{a}{2} + b \ge 2}$

$a \ge 14 \quad \cancel{2 + \frac{a}{2}}$

$\frac{a}{2} + b - 4 \ge 0$

$a \ge 8 - 2b$

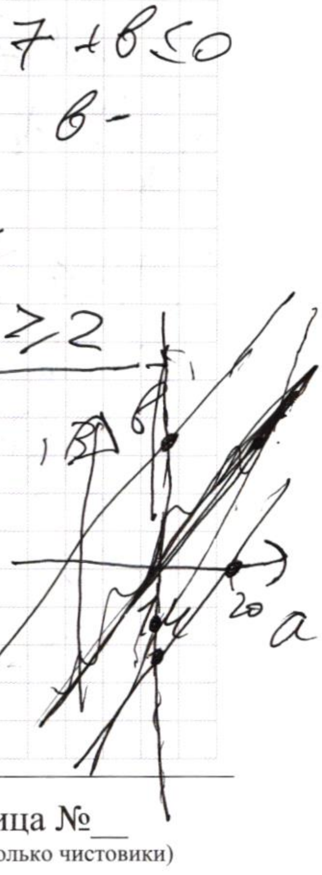
$-a + 14 + 6 + b \ge 0$

$a \ge b + 7$

$b - a + 20 \ge 0$

$a \ge$

$a - b - 7 \ge 0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+b$

$(8x-6|2x-1|)$ MAX-?

$x \geq \frac{1}{2}$ $8x-12x+6=6-4x$ $x=\frac{1}{2}$ $6-2=\boxed{4}$

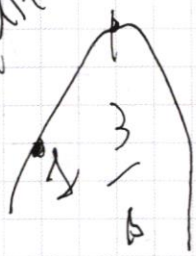
$\cdot 4$

$x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(D)=[\frac{?}{2}]$



$4 \leq \frac{a}{2}+b \leq -2+3+7$

$4 \leq \frac{a}{2}+b \leq 8$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$x \leq \frac{1}{2}$ $8x+12x-6$

$20x-6$

$D=\frac{1}{2}$

$ax+b \leq -8x^2+6x+7$

$8x^2+x(a-6)+b-7 \leq 0$

$f(\frac{x}{y}) < 0$ $x_b=\frac{3}{8}$ $y(-1)$

$8x-6|2x-1| \leq ax+b$

$x \geq \frac{1}{2}$ 1

$8+6-a+b-7 \leq 0$

$\boxed{7-a+b \leq 0}$

$8x-12x+6 \leq ax+b$

$4x+ax+b-6 \geq 0$

$a>0$

$2+\frac{a}{2}+b-6 \geq 0$

$\boxed{\frac{a}{2}+b-4 \geq 0}$ $a>0$

$a<0$ $4+a+b-6 \geq 0$

$\boxed{a+b-2 \geq 0}$