МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

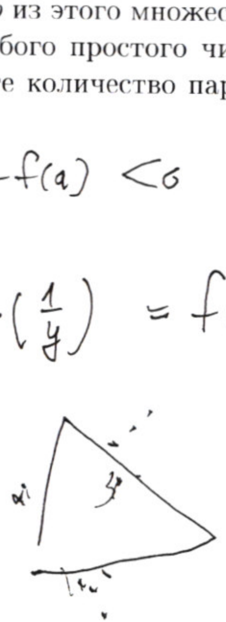
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

$f(p) > 0$ $\quad f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a) < 0$ $\quad 210$

$f(z) > 0$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$ $\quad 210 - 29 = 181$

$f(x) - f(y) < 0$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть, ~~частное прогресс~~ любые два соседних члена прогрессии отличаются в K раз. Тогда, $b = Ka$; $c = K^2a$, а 4-й член прогрессии $- K^3a$

Значит, $a \cdot (K^3a)^2 - 2 \cdot (Ka) \cdot (K^3a) + K^2a = 0$

$a^3 \cdot K^6 - 2a^2K^4 + K^2a = 0$

$K^2a(K^4a^2 - 2K^2a + 1) = 0$; нужно найти 3-й член: $K^2a = c$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

$c(c-1)^2 = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} c=0 \\ (c-1)^2=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$

Значит, $c=0$ или $c=1$. Заметим, что оба варианта возможны:

если $K=0$; $a=0$; $b=0$; $c=0$; 4-й член $- 0$, то условие выполнено

и если $K=1$; $a=1$; $b=1$; $c=1$; 4-й член $- 1$, то условие выполнено.

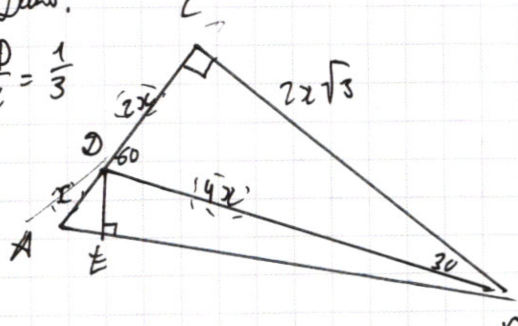
Значит, 3-й член может равняться 0 или 1.

Ответ: 0 или 1.

№4

Дано:

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$



$DE \perp AB$

$\angle CED = 30^\circ$

Найти $tg\ \angle CED = ?$

а) $DCBE$: $\angle DCB + \angle DEB = 90 + 90 = 180^\circ \Rightarrow$ $DCBE$ вписанный $\Rightarrow$ ~~$\angle DEC = \angle$~~ $\angle DBC = \angle DEC = 30^\circ$

Пусть, $DA = x$, тогда, $AC = 3x$; $DC = 3x - x = 2x$

$\triangle DCB$: $\angle C = 90^\circ$; $\angle B = 30^\circ \Rightarrow DB = 2CD = 4x$

По т. Пифагора для $\triangle DCB$:

$4x^2 + BC^2 = 16x^2$; $BC^2 = 12x^2$;

$BC = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$tg\angle BAC = $ (из $\triangle ABC$) $\frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $tg \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\angle BAC = \alpha$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sin\alpha = z$; $3z = 2\sqrt{3}\sqrt{1-z^2}$

$9z^2 = 12(1-z^2)$

~~$9x^2 = 12 - 12x^2$~~ $3z^2 = 4(1-z^2)$

$3z^2 = 4 - 4z^2$; $7z^2 = 4$; $z^2 = \frac{4}{7}$

$x = \sin\alpha$; α — острый угол (как угол прямоуг. треуг. ABC)

$\Rightarrow z = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$;

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$; $\sin\alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{x}$; $\frac{DE}{x} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$;
(Δ ADE)

$DE = \frac{2\sqrt{7}x}{7}$; $AC = \sqrt{7}$; $AC = 3x$; $3x = \sqrt{7}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Из т. Пифагора для $\triangle ADE$: $\frac{7}{9} = \frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 9} + AE^2$; $\frac{7}{9} = \frac{4}{9} + AE^2$

$AE^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $AE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Из т. Пифагора для $\triangle ABC$; $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$9x^2 + 12x^2 = AB^2$; $AB^2 = 21x^2$; $AB = x\sqrt{21} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{21} =$

$\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$; $AB = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$EB = AB - AE = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$; $EB = 2\sqrt{3}$

$\triangle DEB$: $DE = \frac{2\sqrt{7}x}{7} = \frac{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{3\cdot 7} = \frac{2\cdot 7}{3\cdot 7} = \frac{2}{3}$

$EB = 2\sqrt{3}$

$BD^2 = 12 + \frac{4}{9} = \frac{112}{9}$; $BD = \frac{\sqrt{112}}{3} = \frac{2\sqrt{28}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$
(т. Пифагора)

$\sin\angle EDB = \frac{EB}{BD} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{4\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$

$\cos\angle EDB = \sqrt{1-\frac{27}{28}} = \sqrt{\frac{1}{28}} = \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{28}}{28} = \frac{2\sqrt{7}}{28} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\angle EDC = \sin\angle(\angle EDB + \angle BDC)$; пусть; $\angle EDB = \beta$

$\sin\beta = \frac{3\sqrt{21}}{14}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{14}$

$\sin(\beta + 60^\circ) = \sin(\beta)\cdot\cos(60) + \cos(\beta)\cdot\sin(60) =$

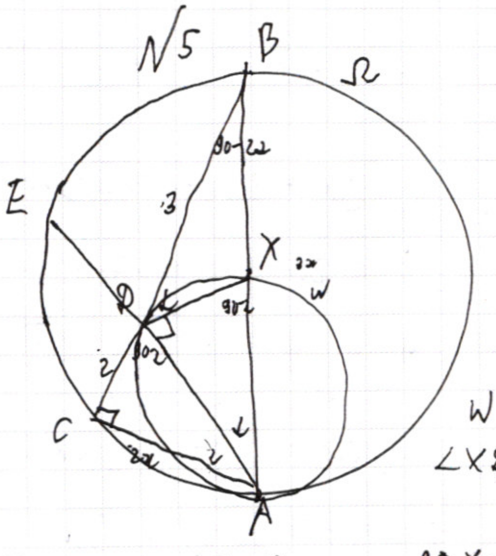
$\frac{3\sqrt{21}}{14}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{28} + \frac{\sqrt{21}}{28} = \frac{4\sqrt{21}}{28} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

$S_{\triangle EDC} = \frac{ED\cdot DC\cdot\sin\angle EDC}{2}$; $S_{\triangle EDC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{1}{2} =$

$\frac{4\sqrt{7}}{9}\cdot\frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{4\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{9\cdot 14} = \frac{4\cdot 7\cdot\sqrt{3}}{9\cdot 14} = \frac{4\sqrt{3}}{9\cdot 2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
б) $S_{\triangle EDC} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5



Дано:
$CD = 2$
$BD = 3$
$r = ?$
$R = ?$
$S_{BACE} = ?$

Пусть, радиус Ω – R
радиус w – r

$\angle BCA = 90^\circ$ (опирается на диаметр Ω). Пусть, BA повторно пересекает w в точке X
Т.к. Ω и w касаются в точке A и AB – диаметр Ω, то прямая AB проходит и через центр w => XA – диаметр w =>
$\angle XDA = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

Пусть, $\angle CAD = \alpha$; $\angle CDA = 90-\alpha$ ($\triangle DAC$); $\angle BDX = 180-90-\angle ADC = \alpha$
$\angle DAX = \angle BDX = \alpha$ (угол между кас. и хордой) : $\angle DXA = 90-\alpha$ ($\triangle DXA$)
$\angle CBA = 90-2\alpha$ ($\triangle ABC$) ; $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$ ($\triangle CAB$)
по св-ву биссектрисы $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3}$; пусть, $AC = 2x$, тогда, $AB = 3x$

По т. Пифагора для $\triangle ACB$: ~~$4x^2 + 9x^2 = 5^2$~~ ~~$13x^2 = 25$~~ ~~$x^2 = \frac{25}{13}$~~
$x = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$

$\triangle DCA \sim \triangle XDA$ (по 2-м углам), $\angle CDA = DXA = 90-\alpha$; $\angle DCA = \angle XDA = 90° \Rightarrow$

$\frac{CA}{DA} = \frac{DA}{XA}$; $CA = 2x = \frac{10\sqrt{13}}{13}$; $DA^2 = 4 + \frac{100}{13} = \frac{152}{13}$; (т. Пифагора для $\triangle DAC$)

$DA = \sqrt{\frac{152}{13}} = \frac{2\sqrt{38}}{\sqrt{13}} = \frac{2\cdot\sqrt{38}\cdot\sqrt{13}}{13}$

$CA\cdot XA = DA^2$; $\frac{10\sqrt{13}}{13}\cdot XA = \frac{152}{13}$; $10\sqrt{13}\cdot XA = 152$; $5\sqrt{13}\cdot XA = 76$

$XA = \frac{76}{5\sqrt{13}} = \frac{76\cdot\sqrt{13}}{13\cdot 5}$; $XA = 2r$

$r = \frac{76\cdot\sqrt{13}}{13\cdot5\cdot2} = \frac{38\cdot\sqrt{13}}{65} = \frac{38\sqrt{13}}{65}$; $AB = 3x = \frac{15\sqrt{13}}{13}$; $AB = 2R$

$R = \frac{15\sqrt{13}}{26}$

По т. Пифагора для $\triangle ABC$: $4x^2 + 25 = 9x^2$; $25 = 5x^2$; $5 = x^2$; $x = \sqrt{5}$

$AC = 2\sqrt{5}$; $AB = 3\sqrt{5}$; $AB = 2R \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\triangle DCA \sim \triangle XDA$ (по 2-м углам), т.к. $\angle CDA = \angle DXA = 90-\alpha$; $\angle DCA = \angle XDA = 90° \Rightarrow$

$\frac{CA}{DA} = \frac{DA}{XA}$; $CA\cdot XA = DA^2$; Из т. Пифагора для $\triangle DCA$: $DA^2 = DC^2 + CA^2 =$

$4 + 20 = 24$; $2\sqrt{5}\cdot XA = 24$; $\sqrt{5}\cdot XA = 12$; $XA = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$XA = 2r$; $r = \frac{12\sqrt{5}}{5\cdot 2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $DA^2 = 24$ (найдено выше) $\Rightarrow$

$DA = \sqrt{24}$; $DA = 2\sqrt{6}$; $-BD\cdot DC = DA\cdot DE$ (из определения степени точки Ω) $\Rightarrow$

$DE\cdot 2\sqrt{6} = 3\cdot 2$; $\sqrt{6}\cdot DE = 3$; $DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$S_{ABEC} = \frac{AE\cdot BC\cdot \sin\angle ADC}{2}$; $\sin\angle ADC = \frac{AC}{DA}$ (из $\triangle ACD$) $= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} =$

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$; $S_{ABEC} = \frac{(\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6})(3+2)\cdot\sqrt{30}}{6\cdot 2} = \frac{5\sqrt{30}\cdot(\frac{5\sqrt{6}}{2})}{6\cdot 2} =$

$\frac{5\sqrt{30}\cdot 5\sqrt{6}}{2\cdot6\cdot2} = \frac{5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot5\cdot\sqrt{6}}{4\cdot6} = \frac{25\sqrt{5}\cdot6}{4\cdot6} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Покажем, что утверждение задачи равносильно такому: в △ ~~...~~ есть две стороны, длины которых отличаются в 2 раза.

С одной стороны, пусть в △ABC медиана AM ⊥ биссектрисе BL (рис 1)

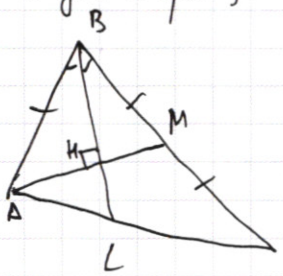


рис 1

$BL \cap AM = H$; △ABM: BH — биссектриса и высота => △ABM равноб. => $AB = BM = \frac{1}{2} BC$. Доказано.

С другой стороны, пусть, в △ABC $BC = 2AB$ (рис 2)

Пусть, M — середина BC: $BM = MC = AB$.

BL — биссектриса. Тогда в равноб. треуг. ABM BL — биссектриса, а значит, и высота => $BL \perp AM$ — доказано.

Осталось найти число △ с $P = 900$ и двумя сторонами, длины которых отличаются в 2 раза.

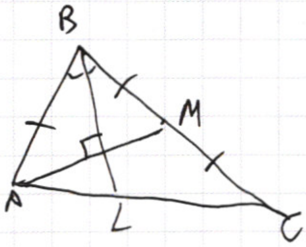


рис 2

Пусть, стороны x; $2x$ и $900-3x$. Они должны удовлетворять неравенству треуг., т.е.

$x < 2x + 900 - 3x$ (верно, т.к. $2x + 900 - 3x > 2x - x$) и

$$\begin{cases} 2x < x + 900 - 3x \\ 900 - 3x < x + 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x < 900 - 3x \\ 900 - 3x < 3x \end{cases} \quad \begin{cases} 4x < 900 \\ 900 < 6x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 450 \\ 450 < 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 225 \\ x > 150 \end{cases} \quad \& \quad \boxed{151 \leq x \leq 224}$$

. Таким образом, получим

$224 - 150 = 74$ треугольника. Посмотрим, будут ли среди них совпадающие. Если мы посчитали некот-ый треугольник 2 раза, это значит, что в нём есть 2 различные пары сторон, отличающиеся в 2 раза => выполнен один из следующих случаев:

$$\left[\begin{aligned} & x \cdot 2 = 900 - 3x \\ & (900 - 3x) \cdot 2 = x \\ & 2x \cdot 2 = 900 - 3x \\ & (900 - 3x) \cdot 2 = 2x \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x=900-3x \\ 1800-6x=x \\ 4x=900-3x \\ 1800-6x=2x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 900=5x \\ 1800=7x \\ 900=7x \\ 1800=8x \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} x=180 \text{ — входит в ответ} \\ x=\frac{1800}{7} \text{ — нецелое} \Rightarrow \text{не входит} \\ x=\frac{900}{7} \text{ — нецелое} \Rightarrow \text{не входит} \\ x=225 \text{ — не входит в ответ.} \end{array}\right.$

Значит, в ответе 2 раза могут оказаться учтены только треугольник при $x = 180$

Тогда стороны: 180; 360 и $900-180-360=360$.

Но у этого треугольника две стороны совпадают и обе пары сторон, отличающиеся по длине в 2 раза, имеют длину 180 и $360 \Rightarrow$ этот Δ всё же учтён 1 раз при $x=180$.

Значит искомое число треугольников — 74.

Ответ: 74.

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-36-2+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2\cdot(y-1)^2=18 \end{cases}; \quad \text{Замена: } \begin{array}{l} x-6=a \\ y-1=b \end{array}; \quad \begin{array}{l} x=a+6 \\ y=b+1 \end{array}$$

$x-6y=a+6-6b-6=a-6b$; система принимает вид:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2+2b^2=18 \\ a^2+36b^2-12ab=ab \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+2b^2=18 \\ a^2+36b^2=13ab \\ a\geq 6b \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} a^2=18-2b^2 \\ 18-2b^2+36b^2=13ab \\ a>6b \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} a^2=18-2b^2 \\ 18+34b^2=13ab \\ a>6b \end{cases}} \quad \begin{cases} a^2+2b^2=18 \\ a^2-13ab+36b^2=0 \\ a\geq 6b \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $a^2-13ab+36b^2$ как квадратное отн. a

$D=169b^2-4\cdot 36b^2=169b^2-144b^2=25b^2$; $a_{1,2}=\dfrac{13b\pm 5b}{2}$

$a_1=\dfrac{13b+5b}{2}=\dfrac{18b}{2}=9b$; $a_2=\dfrac{13b-5b}{2}=\dfrac{8b}{2}=4b$

$$\begin{cases} a^2+2b^2=18 \\ \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a\geq 6b \end{cases}$$

(продолжение на листе стр 3)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $a=19b$: $361b^2+2b^2=18$; ~~$363b^2+2b^2=1$~~ $363b^2=18$

$121b^2=6$; $b^2=\frac{6}{121}$; $b=\pm\frac{\sqrt{6}}{11}$; $b_1=\frac{\sqrt{6}}{11}$; $b_2=-\frac{\sqrt{6}}{11}$

$a_1=\frac{19\cdot\sqrt{6}}{11}$; $a_2=-\frac{19\sqrt{6}}{11}$; проверим 3-е условие $(a\geq 6b)$

1: $\frac{19\cdot\sqrt{6}}{11}\geq\frac{6\sqrt{6}}{11}$, $19\geq 6$ – верно. $\Rightarrow$ $\boxed{a=\frac{19\sqrt{6}}{11};\ b=\frac{\sqrt{6}}{11}}$ подходит

2: $-\frac{19\sqrt{6}}{11}\geq-\frac{6\sqrt{6}}{11}$; $-19\geq-6$ – неверно $\Rightarrow$ это решение не подходит.

При $a=-6b$, $36b^2+2b^2=18$, $38b^2=18$ $\Rightarrow$ $19b^2=9$; $b^2=\frac{9}{19}$

$b=\pm\frac{3}{\sqrt{19}}=\pm\frac{3\sqrt{19}}{19}$; $b_1=\frac{3\sqrt{19}}{19}$; $a_1=-\frac{18\sqrt{19}}{19}$

$b_2=-\frac{3\sqrt{19}}{19}$; $a_2=\frac{18\sqrt{19}}{19}$

Проверим $a\geq 6b$:

1: $-\frac{18\sqrt{19}}{19}\geq\frac{18\sqrt{19}}{19}$; $-1\geq 1$ – неверно $\Rightarrow$ не подходит

2: $\frac{18\sqrt{19}}{19}\geq-\frac{18\sqrt{19}}{19}$; $1\geq-1$ – верно $\Rightarrow$ $\boxed{a=\frac{18\sqrt{19}}{19};\ b=-\frac{3\sqrt{19}}{19}}$ подходит

Вернёмся к замене. $x=a+6$; $y=b+1$

Получим 2 решения: $x_1=\frac{19\sqrt{6}}{11}+6=\frac{19\sqrt{6}+66}{11}$; $y_1=\frac{\sqrt{6}}{11}+1=\frac{\sqrt{6}+11}{11}$

$x_2=\frac{18\sqrt{19}}{19}+6=\frac{18\sqrt{19}+114}{19}$; $y_2=-\frac{3\sqrt{19}}{19}+1=\frac{19-3\sqrt{19}}{19}$

Ответ: $\left(\frac{19\sqrt{6}+66}{11};\ \frac{\sqrt{6}+11}{11}\right)$; $\left(\frac{18\sqrt{19}+114}{19};\ \frac{19-3\sqrt{19}}{19}\right)$.

№7 $\quad f(ab)=f(a)+f(b) \quad (\star)$

~~Подст~~

Подставим $a=1$: $f(b) = f(1)+f(b) \quad \forall b$; $\boxed{f(1)=0}$

Подставим ~~а~~ $b=\frac{1}{a}$: $f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(1) = f(a)+f(\frac{1}{a})$; $0 = f(a)+f(\frac{1}{a})$;

$$\boxed{f(\tfrac{1}{a}) = -f(a)}$$

$$f(\tfrac{x}{y}) = f(x\cdot\tfrac{1}{y}) = f(x)+f(\tfrac{1}{y}) = f(x)-f(y)$$

$f(\frac{x}{y})<0 \iff f(x)-f(y)<0$; $f(x)<f(y)$

Пусть n — целое число $= p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$ — ~~гд~~ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые, возможно, совпадающие.

$f(n) = f(p_1\cdot p_2\cdots p_k) = f(p_1\cdot(p_2\cdots p_k)) = f(p_1)+f(p_2\cdots p_k) = f(p_1)+f(p_2\cdot(p_3\cdots p_k))$

$= f(p_1)+f(p_2)+f(p_3\cdots p_k) = \ldots = f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)+\ldots+f(p_k)$ $(\star)$

т.е. функция от числа равна сумме функций всех простых, входящих в его состав.

Посчитаем функцию для всех простых в $[2;22]$ по формуле $f(p) = [\frac{p}{2}]$

$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(5)=2$
$f(7)=3$
$f(11)=5$
$f(13)=6$
$f(17)=8$
$f(19)=9$

Теперь можем вычислить значение функции для всех нат. чисел из $[2;22]$ по формуле $(\star)$:

$f(2)=1$ ✓
$f(3)=1$ ✓
$f(4)=1+1=2$ ✓
$f(5)=2$ ✓
$f(6)=1+1=2$ ✓
$f(7)=3$ ✓
$f(8)=1+1+1=3$ ✓
$f(9)=1+1=2$ ✓
$f(10)=1+2=3$ ✓
$f(11)=5$ ✓
$f(12)=1+1+1=3$ ✓
$f(13)=6$ ✓
$f(14)=1+3=4$ ✓
$f(15)=1+2=3$ ✓
$f(16)=1+1+1+1=4$ ✓
$f(17)=8$ ✓
$f(18)=1+1+1=3$ ✓
$f(19)=9$ ✓
$f(20)=1+1+2=4$ ✓
$f(21)=1+3=4$ ✓
$f(22)=1+5=6$ ✓

Посчитаем, сколько натуральных чисел ~~их~~ из ~~[2;22]~~ $[2;22]$ принимает каждое значение функции:

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9
количество чисел с таким f	2	4	6	4	1	2	0	1	1

Значения >9 числа из $[2;22]$ принимать не могут.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Всего способов выбрать x и y: $21 \cdot 21 = 441$.

~~Способов~~ Способов выбрать 2 различных числа из $[2;22]$: $\frac{21\cdot 20}{2} = 210$

Способов выбрать два одинаковых числа 21.

Заметим, что если $x = y$, то $f(x) < f(y)$ не может выполняться), т.к. $f(x) = f(y)$.

Значит, можно рассматривать только $x \neq y$. Рассмотрим неупорядоченную пару двух различных чисел из $[2;22]$ (выше мы выяснили, что таких 210).

Возможны 2 случая: 1) $f(x) \neq f(y)$, тогда ровно одно из 2-х равенств $f(x) < f(y)$ и $f(y) < f(x)$ выполнено.

2) $f(y) = f(x)$.

Посчитаем количество таких пар из таблицы на предыдущей странице. Оно равно

$\cancel{C_2^2 + C_4^2 + C_6^2 + C_4^2 + C_2^2}$ $\frac{2\cdot 1}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + \frac{6\cdot 5}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + \frac{2\cdot 1}{2} =$

$1 + 6 + 15 + 6 + 1 = 12 + 15 + 2 = 14 + 15 = 29$.

В этом случае оба равенства $f(x) < f(y)$ и $f(y) < f(x)$ не будут выполнены.

Значит, искомое количество пар равно $210 - 29 = 181$.

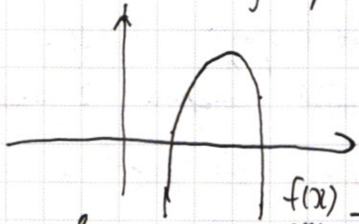
Ответ: 181.

№6

$$\begin{cases} 8x-6|2x-1| \le ax+b \\ ax+b \le -8x^2+6x+7. \end{cases}$$

Посмотрим сначала на 2-е неравенство. Оно перепишется в виде:

$-8x^2 + x(6-a) + (7-b) \ge 0$. В левой части записано уравнение ~~пар~~ параболы в ветвями, направленными вниз. $-f(x)$



Тогда условие на то, что ~~она~~ ≥ 0 на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$ равносильно системе: $\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{8}{4} - \frac{1}{2}(6-a) + (7-b) \ge 0 \\ -8 + 6 - a + 7 - b \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 - 3 + \frac{a}{2} + 7 - b \ge 0 \\ 13 - 8 - a - b \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} - b + 2 \ge 0 \\ 5 - a - b \ge 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} a - 2b + 4 \ge 0 \\ 5 \ge a + b \end{cases}}$$

Теперь рассмотрим ~~2~~-е неравенство. Раскроем модуль:

$$\begin{cases} 8x - 6(2x-1) \le ax - b & ; x \in [\frac{1}{2}; 1] \\ 8x - 6(1-2x) \le ax - b & : x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \end{cases}$$

($\frac{1}{2}$ для удобства отнесу и туда, и туда, это ничего не испортит)

$$\begin{cases} 8x - 12x + 6 \le ax - b & : x \in [\frac{1}{2}; 1] \\ 8x - 6 + 12x \le ax - b & : x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 6 \le ax - b & : x \in [\frac{1}{2}; 1] \\ 20x - 6 \le ax - b & : x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \end{cases} \qquad \begin{cases} x(a+4) - (b+6) \ge 0 : x \in [\frac{1}{2}; 1] \\ x(a-20) + (6-b) \ge 0 : x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \end{cases}$$

В левых частях обоих неравенств стоит уравнение прямой, и утверждается, что эта прямая на некотором интервале принимает значения определенного знака. Тогда, т.к. линейные функции монотонные, то это равносильно тому, что эта функция принимает значения этого знака на ~~обо~~ концах этого интервала. Таким образом, система равносильна такому:

$$\begin{cases} \frac{a+4}{2} - b - 6 \ge 0 \\ a + 4 - b - 6 \ge 0 \\ \frac{20-a}{2} + 6 - b \ge 0 \\ \frac{a-20}{2} + 6 - b \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 4 - 2b - 12 \ge 0 \\ a - b - 2 \ge 0 \\ 20 - a + 12 - 2b \ge 0 \\ a - 20 + 12 - 2b \ge 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\frac{8}{4} - \frac{6}{3} + 7 =$

$-2-2+7=3$

$-8+6+7=$ $6-1=5$

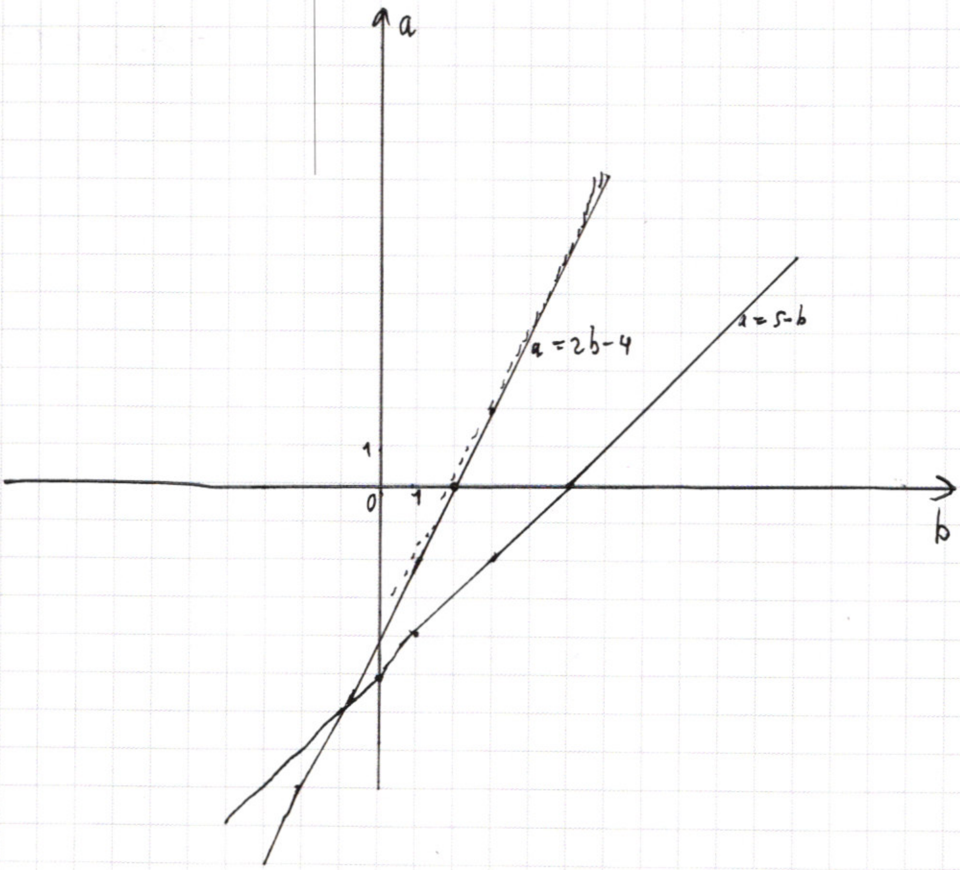
$-8-6+7=-$

$$\begin{cases} a-2b-8\geq 0 \\ a-b-2\geq 0 \\ 32\geq 2b+a \\ a-2b\geq 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2b\geq 8 \\ a-b-2\geq 0 \\ 32\geq 2b+a \\ a-2b\geq 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2b\geq 8 \\ a-b\geq 2 \\ 2b+a\leq 32 \end{cases}$$

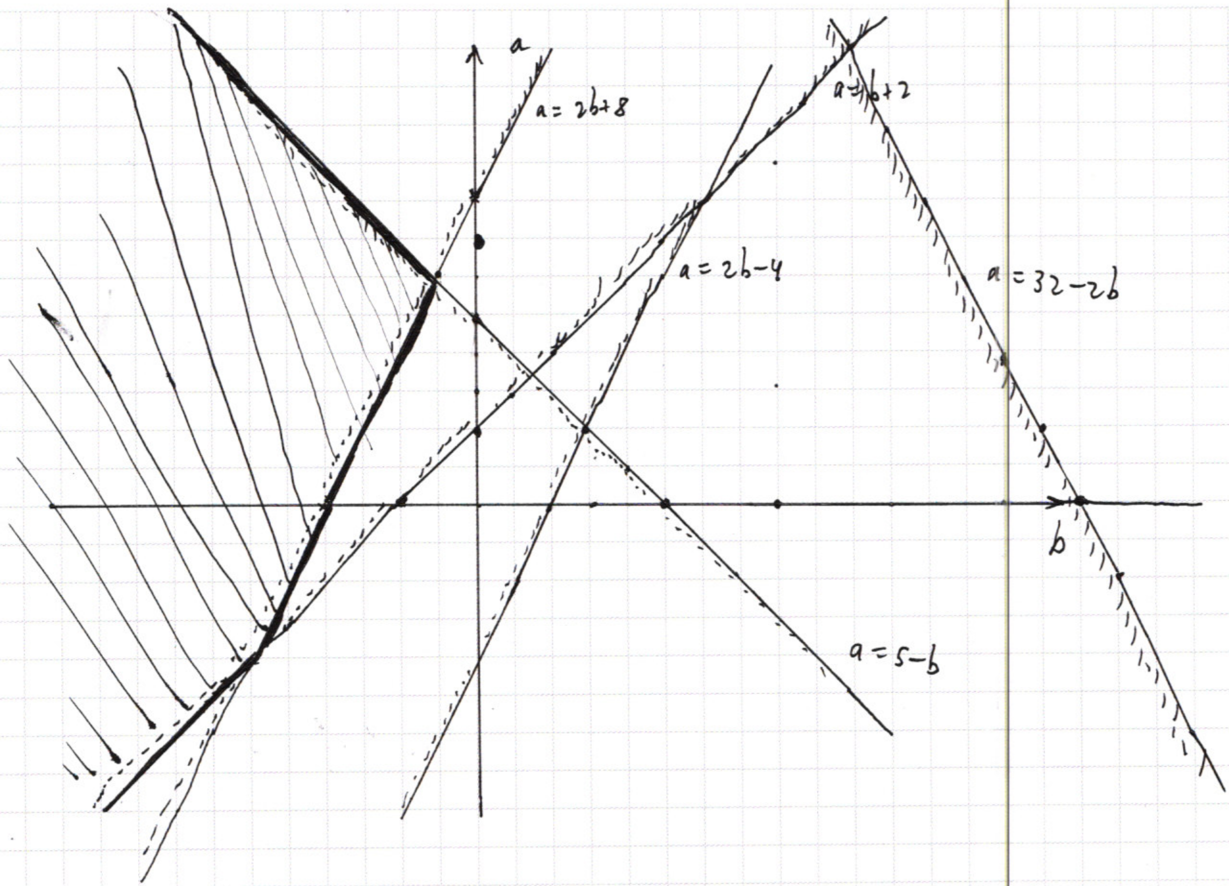
Вместе получим такую систему:

$$\begin{cases} a-2b+4\geq 0 \\ 5\geq a+b \\ a-2b\geq 8 \\ a-b\geq 2 \\ 2b+a\leq 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\geq 2b-4 \\ a\leq 5-b \\ a\geq 2b+8 \\ a\geq b+2 \\ a\leq 32-2b \end{cases}$$

Изобразим решение системы графически:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Нужно найти ~~сист~~ решение системы этих линейных уравнений. Область, являющаяся решением, заштрихована на рис. сверху. ~~(Внутренние области выделены жирной линией, она не является границей этой области.~~

(граница этой области выделена жирной линией. Таким образом, при данных (a, b) первое условие выполнено.

Ответ: (см. рис. выше).

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

При $a = 9b$: $81b^2 + 2b^2 = 18$; $83b^2 = 18$; $b^2 = \frac{18}{83}$; $b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

проверим 3-е условие: ~~$g \geq 0$~~ $a \geq 6b$; $9b \geq 6b$; $b \geq 0 \Rightarrow$

подходит только $\sqrt{\frac{18}{83}}$

При $a = -4b$: $16b^2 + 2b^2 = 18$; $18b^2 = 18$; $b^2 = 1$; $b = \pm 1$

проверим 3-е условие: $a \geq 6b$; $-4b \geq 6b$; $10b \leq 0$; $b \leq 0 \Rightarrow$

-1 подходит, а 1 — нет.

Таким образом, получаем 2 решения:

$a_1 = 9 \cdot \sqrt{\frac{18}{83}} = \frac{9 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{83}} = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$b_1 = \sqrt{\frac{18}{83}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$;

$a_2 = -4 \cdot (-1) = 4$; $b_2 = -1$

Вернемся к замене:

$x_1 = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 6$; $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 1$

$x_2 = 4 + 6 = 10$; $y_2 = -1 + 1 = 0$

Ответ: $\left(\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 6; \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 1\right)$; $(10; 0)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{100\cdot 13}{13^2} =$

$\frac{100}{13}$

$13 \times 4 = 52$

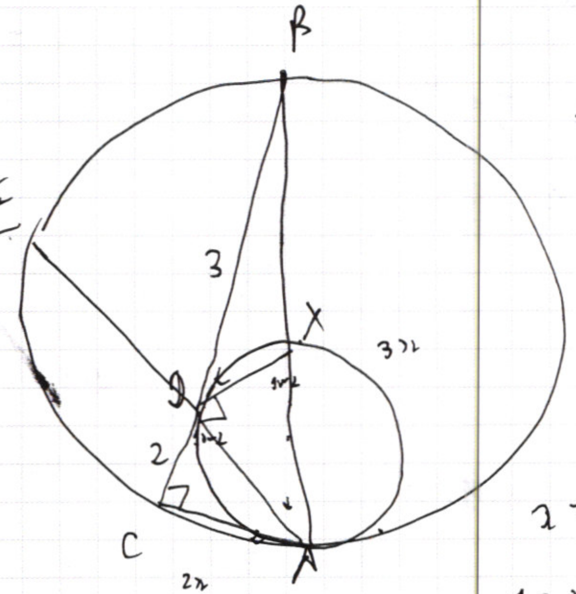
$900 - 540 = 360$

180

360

360

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

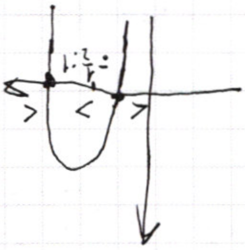


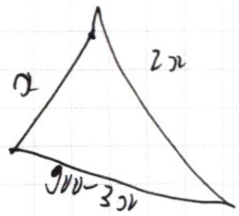
$152 : 4 = 38$

$2 \cdot 19$

$x = \frac{5\sqrt{13}}{13}$

13





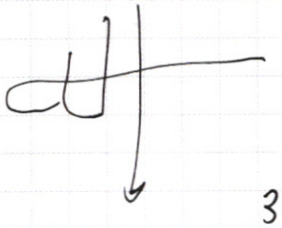
$76 : 2 = 38$

$900 : 6 = 150$

$76 : 4 = 19$

$900 : 4 = 225$

$\frac{38\sqrt{13}}{65} < \frac{15\sqrt{13}}{26}$



$900 : 5 = 180$

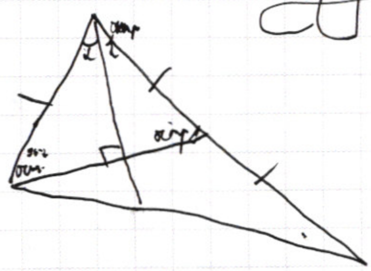
$\frac{38}{65} < \frac{15}{26}$

$38 \cdot 26 = 988$

$38\cdot 26 < 15\cdot 65$

988 <

$65 \cdot 15 = 975$



$900 : 6 = 151$

151 − 1

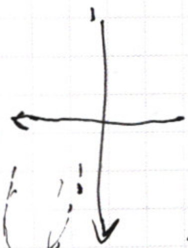
152 − 2

...

224 − x

$224 - x = 150$

$224 - 150 = 74$



$x \; ; \; 2x \; ; \; 900-3x$

$151 \le x \le 224$

$1800 : 8 = 225$

$4 \le \frac{a}{2}+b$

$\boxed{a-2b \ge 32}$

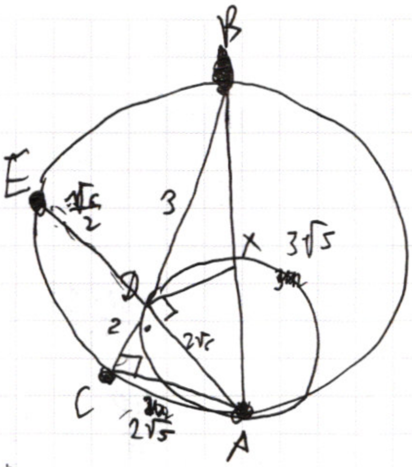
$\boxed{a+2b \ge 8}$ $\boxed{a+b \ge 2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

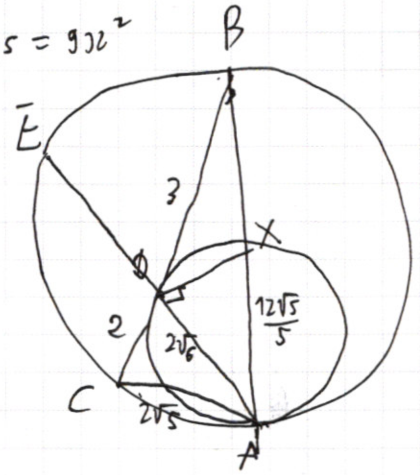
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$4x^2+25=9x^2$

25



$a=4$

$b=1$

$16+36=13\cdot 4$

52

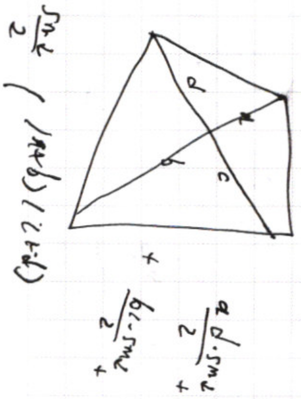
1 $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$

$21 \times 21 = 441$

~~$x-6y=\sqrt{(x-6y)6}$~~

21

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$



$-36-2+20=$

$-38+20=-18$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$19 \times 6 = 114$

$x-6=a$

$y-1=b$

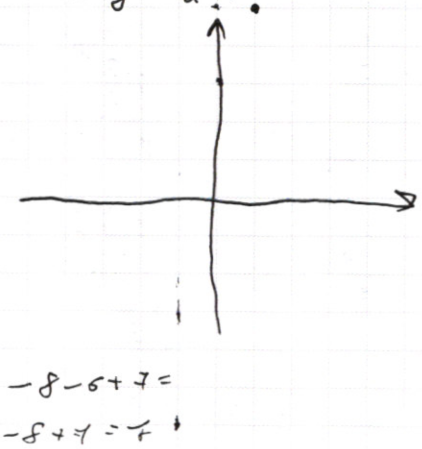
$x=a+6$

$y=b+1$

$x-6y=a+6-6b-6=a-6b$

$169-144=25$

$36 \times 4 = 144$



$a=4 \quad b=1$

$36+16=52$

$19 \times 19 = 171 + 19 = 361$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$169b^2-144=25$

$56 \times 4 = 224 + 36 = 260$

$\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$-8-6+7=$

$-8+1=-7$

$-8-6+7=$

-7

$f(abc)=f(a)+f(bc)=f(a)+f(b)+f(c)$

оси ли b ; $a=0$

$\frac{-6}{-18}=-\frac{1}{3}$ ли $b \leq -8x^2+6x+7$

$36+4\cdot 56=260$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

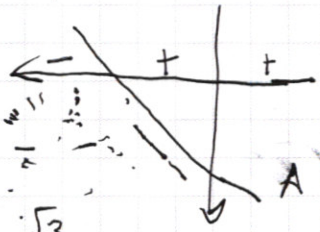
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

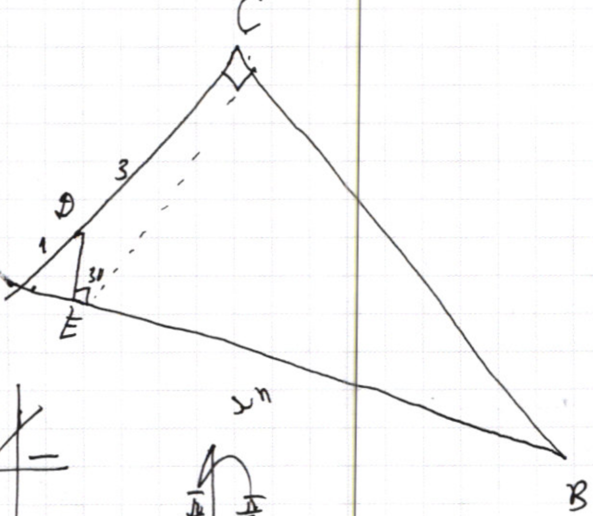
ШИФР

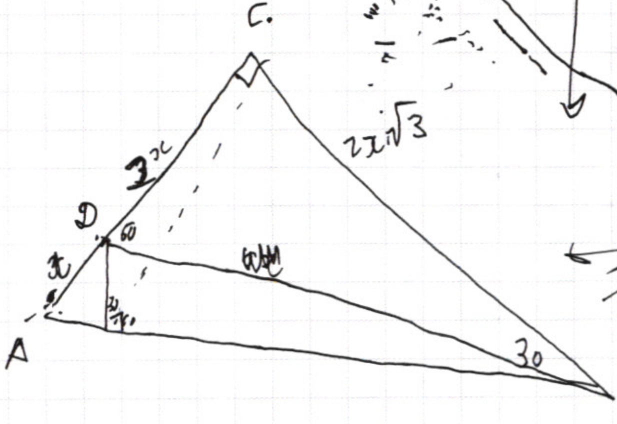
(заполняется секретарём)

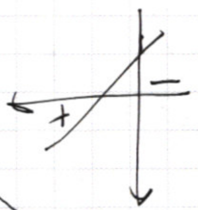
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

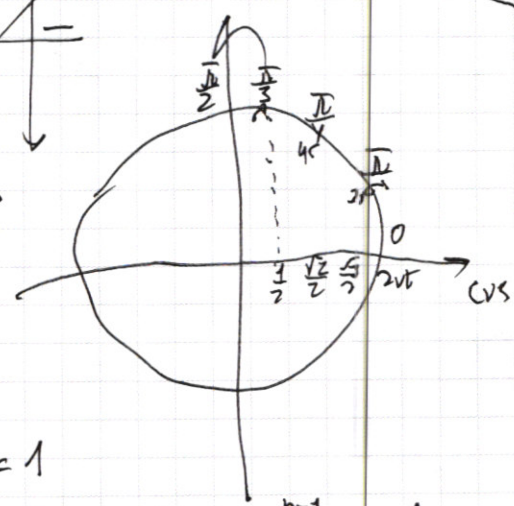
$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{4x}$



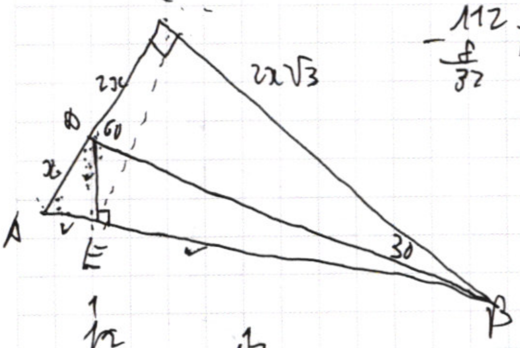








$112 \mid 4$, 8, 32, 28

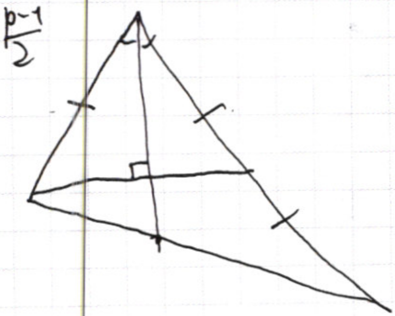


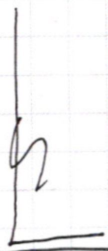
$f(2)=1$

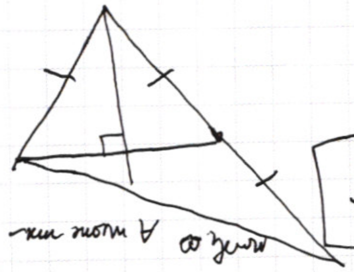
$f(3)=1$ $\quad f(p)=\frac{p-1}{2}$

$f(5)=2$

$12 \times 9 = 108$ $\quad 12 \times 9 = 108$







$\boxed{f(2x)=f(x)+1}$

$\boxed{f(3x)=f(x)+1}$

$\boxed{f(\frac{1}{a})=-f(a)}$

$\frac{6\sqrt5}{5} < \frac{3\sqrt5}{2}$

$12\sqrt5 < 15\sqrt5$

$f(b)=f(1)+f(b)$ $\quad \boxed{f(1)=0}$

$f(0\cdot b)=f(0)+f(b)$

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})$

$f(0)=f(0)+f(b)$

$\boxed{f(b)=0}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

a

$b = ka$

$c = k^2 a$

$ax^2 - 2kax + c = 0 \quad ; x = k^3 a$

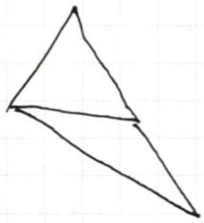
$a k^6 a^2 - 2ka \cdot k^3 a + c = 0$

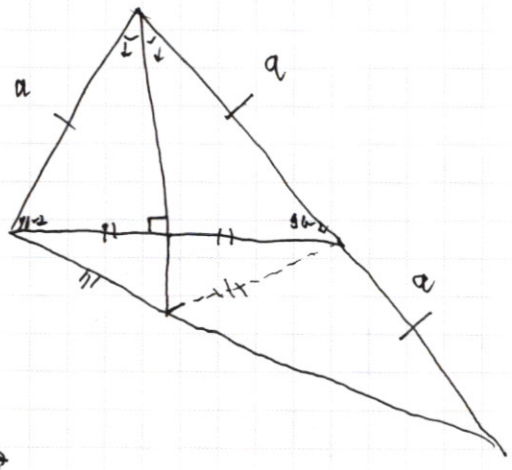
$a^3 k^6 - 2a^2 k^4 + c = 0$

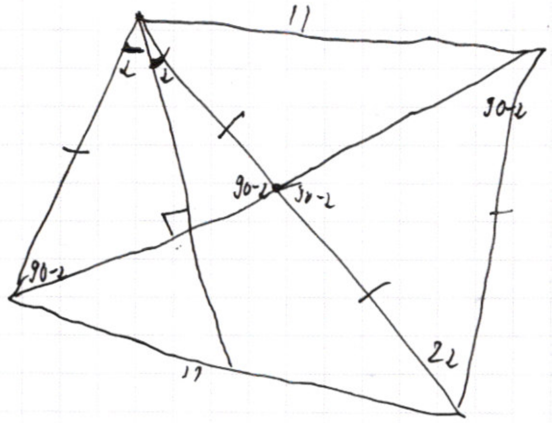
$a^3 k^6 - 2a^2 k^4 + k^2 a = 0$

$a^2 k^6 - 2a k^4 + k^2 = 0$

$a^2 k^4 - 2a k^2 + 1 = 0 \quad ; a k^2 =$







$x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$a + b \geq 2$

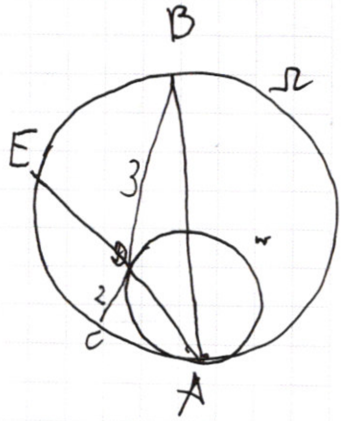
$8 - 6 \leq a + b$

$-4 - 12 \leq -\frac{a}{2} + b$

$-16 \leq -\frac{a}{2} + b$

$\frac{a}{2} - b \geq 16$

$x =$



$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

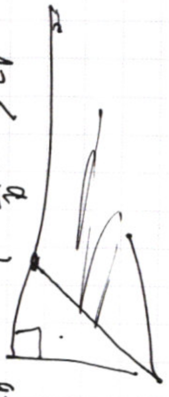
$(x-6)^2 - 36 + 2y^2 - 4y + 20 = 0$

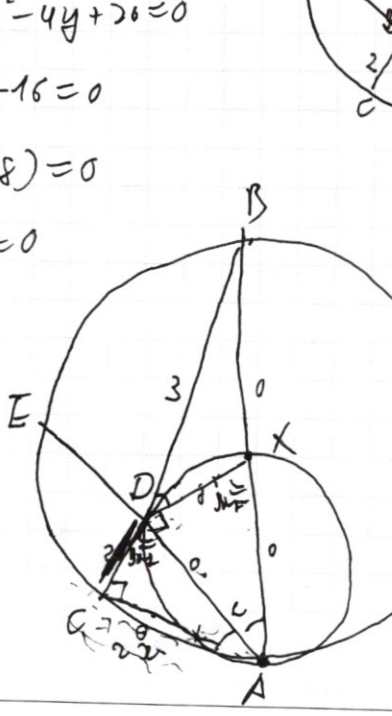
$(x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y^2 - 2y - 8) = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$





$\frac{CD}{DX} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{XA}$

$x = \frac{5\sqrt{13}}{13}$

$\frac{2}{DX} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{2r}$