

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$a, b, c; \quad b = ak; \quad c = ak^2;$$

$$ax^2 - 2bx + c = 0; \quad D = (2b)^2 - 4ac = (2ak)^2 - 4a \cdot ak^2 = 0$$

тогда корень: $\frac{2b}{2a}$; $b = ak$; $\frac{2ak}{2a} = k$ - корень.

тогда четвертый член - ~~0~~ k ;

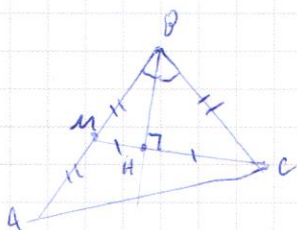
тогда $a \cdot k^3 = k \Rightarrow 4(ak^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ ak^2=1 \end{cases}$

т.е. a, b, c, \dots - члены прогрессии; но $k \neq 0$;

$$\text{тогда } c = ak^2 = 1$$

ответ: 1.

№ 2.



1) пусть CM - мед. $\triangle ABC$;

CH - висс. $\triangle ABC$; $CH \perp CM$

2) ~~тогда~~ $\triangle BMC$ - $2/3$ висс. CM
(по свойс. висс. и висс.)

$$\text{тогда } BM = AM = BC;$$

при $BC \leq 150$; $AB \leq 300$; тогда $AC \leq 900 - 300 - 150$;

$AC \leq 450$; тогда $AC \leq AC \geq AB + BC$ - противоречие
предв. 300 ; значит $BC \geq 150$;

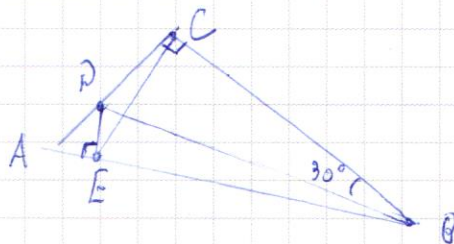
при $BC \geq 300$; $AB \geq 600$; но общий периметр равен 900 - противоречие; тогда $BC < 300$;

при BC от 15190299 ; $302 \leq AB \leq 598$;

тогда 3-я сторона 3-х. вычисляется вычитанием
 AB и BC из 900 ; от $15190299 - 149$ шилл;

тогда получается 149 точек: $302 \leq AB \leq 598$.
 Ответ: 149 .

НУ.



а) Решение:

1) $\angle DCB + \angle DEB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, тогда $DCBE$ - впис.

(по сумме впис. ч-х уг.)

2) $\angle CBD = \angle DEC = 30^\circ$ (как соотв. уг. впис. ч-х уг.);

3) пусть $AD = x$; тогда $AC = 3x$; $DC = 2x$;

$BD = 2 \cdot CD = 4x$ (по св. катета при 30° , лет. гипотенуз
 угла 30°).

4) ~~$\cos \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$~~ $CB = \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} = 2\sqrt{3}x$ (по т.

Пифагора).

5) $\cos \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

6) $AC = \sqrt{7}$; $\cos \angle BAC = \frac{AC}{AD} = \frac{3x}{\sqrt{(2x)^2 + (2\sqrt{3}x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$;

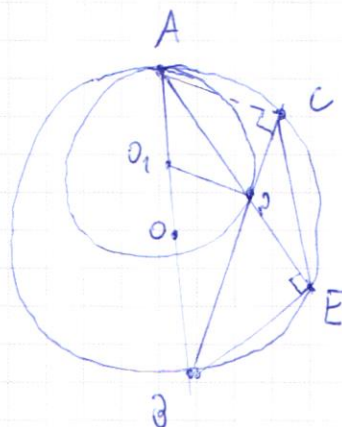
7) $AE = AD \cdot \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AD} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{7}x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$;

9) $S_{\triangle CED} = S_{\triangle CAE} - S_{\triangle AED} = \frac{2}{3} S_{\triangle ACE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AE \cdot \sin \angle BAC =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



известно:

- 1) пусть O - центр Ω ; O_1 - центр ω
- 2) $\angle ACB = 90^\circ$; $\angle AEP = 90^\circ$ (так как на дуге Ω).
- 3) $O_1 \in AO$ (по в. касательных от A);
- 4) пусть $\angle O_1AP = d$; тогда $\angle AO_1P = 180 - 2d$ (по т.о. сумме в.з.т.);
- 5) так как $\angle AO_1P$ - центральный; то $\angle ACP = \overset{\frown}{AP} = 90 - d$ (по в. дуга между касат. и хордой);
- 6) $\angle PAC = 90 - (90 - d) = d$;
- 7) тогда AP - бисс. $\triangle ABC$; тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}$ (по в. бисс. з-на);
- 8) $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$; пусть $AB = 3k$; $AC = 2k$; тогда $BC = \sqrt{(3k)^2 - 2k^2} = \sqrt{5}k$; тогда $\sqrt{5}k = 5k$ $k = \sqrt{5}$; тогда $AB = 3\sqrt{5}$; радиус $r = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;
- 9) $AP = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$; $\sin \angle CAP = \frac{CP}{AP} = \frac{1}{\sqrt{6}}$;
 $\cos \angle CAP = \frac{AC}{AP} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

71) по т. косинусов: пусть $AO_1 = y$;

$$\text{тогда } y^2 = y^2 + 24 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot y \cdot 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{5} y = 24 \Rightarrow y = \frac{6}{\sqrt{5}}; \text{ тогда } w = \frac{6}{\sqrt{5}};$$

~~$S_{AO_1EC} =$~~

$$12) \text{ ~~AE =~~ } AE = AB \cdot \cos \alpha = 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}};$$

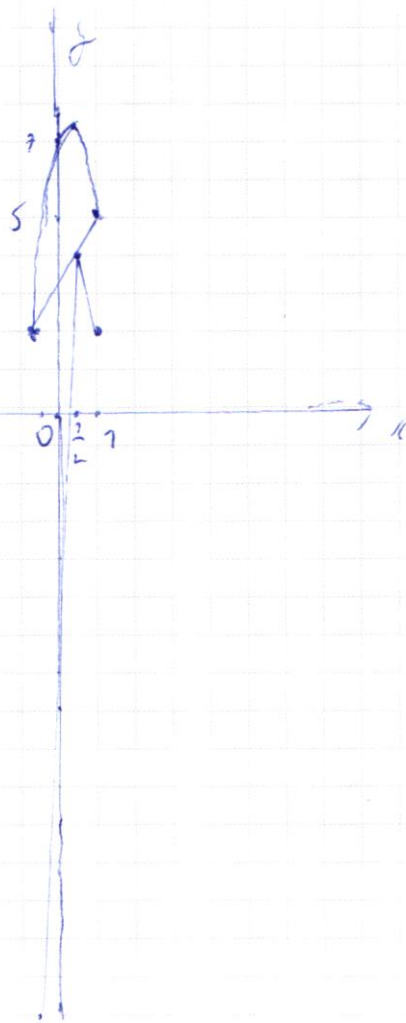
$$S_{ABEC} = S_{AEB} + S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE \cdot \sin \alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AE \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{15}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{15}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5\sqrt{5} = \frac{75\sqrt{5}}{2}.$$

ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}; \frac{3\sqrt{5}}{2}; \frac{75\sqrt{5}}{2}$.

или



поэтому тарелки левого и
правого вращения;

т.е. ось больше левого и

меньше правого;

по границах летит

металл или; так же

тарелки - тарелки;



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

| |
|------|
| ШИФР |
|------|

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

т.к. прямая касается, тож.

через $(-\frac{1}{2}; 2)$ и $(1; 5)$ касается

второго графика; но $(\frac{1}{2}; 4)$;

то поворот элементов - прямой.

(т.к. две раск. точки $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$ нете ни в чем;)
 $y = 2x + 3$. прямая пересечет 1 из графиков.

Ответ: $a = 2; b = 3$.

и т.

$$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y});$$

т.к. $f(p) = \lfloor p/2 \rfloor$; то то

f для любого прост. числа положител.

т.к. любое положит. цел. число

и представимо в виде произв. нескольких простых чисел; то

$f(x)$ представимо в виде суммы нек.

положит. чисел; тогда $f(x)$ положит.

$$f(\frac{2}{y}) = \underbrace{f(\frac{1}{y}) + \dots + f(\frac{1}{y})}_{2y}; \text{ т.к. } f(2) = 1;$$

$$\text{то } \underbrace{f(\frac{1}{y}) + \dots + f(\frac{1}{y})}_{2y} > 0; \text{ тогда } f(\frac{1}{y}) > 0;$$

тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) > 0$. Ответ: 0 пер.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a, a_1, a_2$$

$$ax^2 - 26x + c = 0$$

$$4b^2 - 40c$$

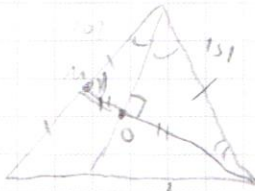
$$25^2 - 4 \cdot 16$$

$$40^2 - 4 \cdot 0^2 = 1600$$

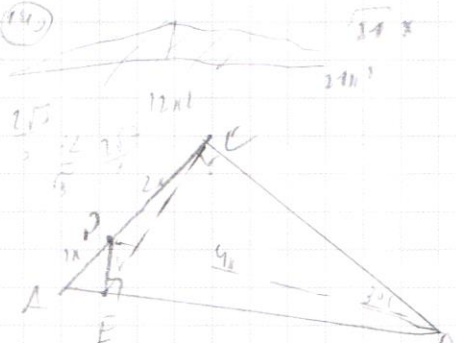
$$5^2 - 25 - 8$$

$$26 \cdot 6$$

$$26^2 = 676$$



$$ax^2 = 1$$



$$2(5-4)(5+4)$$

$$m_1 = a_1 b_1$$

$$(x-6)^2$$

$$1/1$$

$$x^2 = 13xy$$

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{x^2-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-22x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = x^2 - 6y - x + 6$$

$$1^2 + 36y^2 - 12xy + x + 6y - 6$$

$$-34y^2 + 23xy - 12x - 10y + 26$$

$$(2-1)(x-6) = (x-6y)^2$$

$$175^2 + 64 \cdot 13$$

$$a^2 + 26^2 = 18$$

$$a_0 = (a_1 b_1) - 6(6 \cdot 11) = 1^2$$

$$a_6 = (a - 66 \cdot 1)^2$$

$$a^2 + 26^2 = 18$$

$$a^2 + 36y^2 - 12xy = 0$$

$$\sqrt{(5-1)(x-6)} = x-6y$$

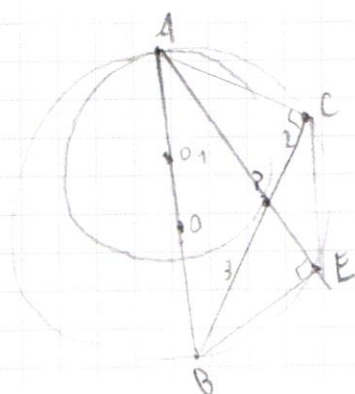
$$(x-6)^2 + 2(5-4)(5+4) = 0$$

$$(x-6)^2 + (5-1)^2 = 18$$

$$18 \cdot 7 = 126$$

$$(x-6)^2 + (5-1)^2 = 18$$

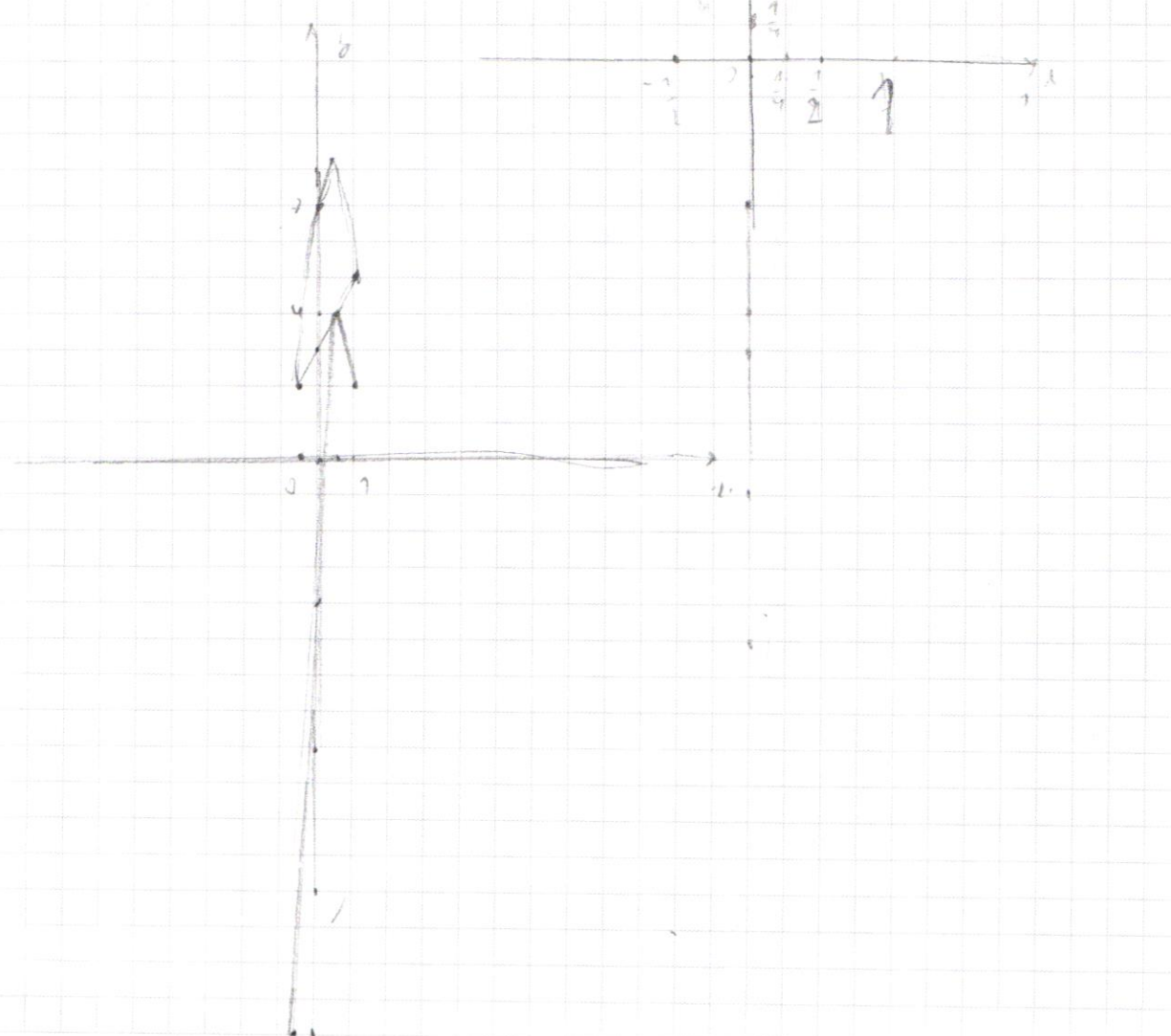
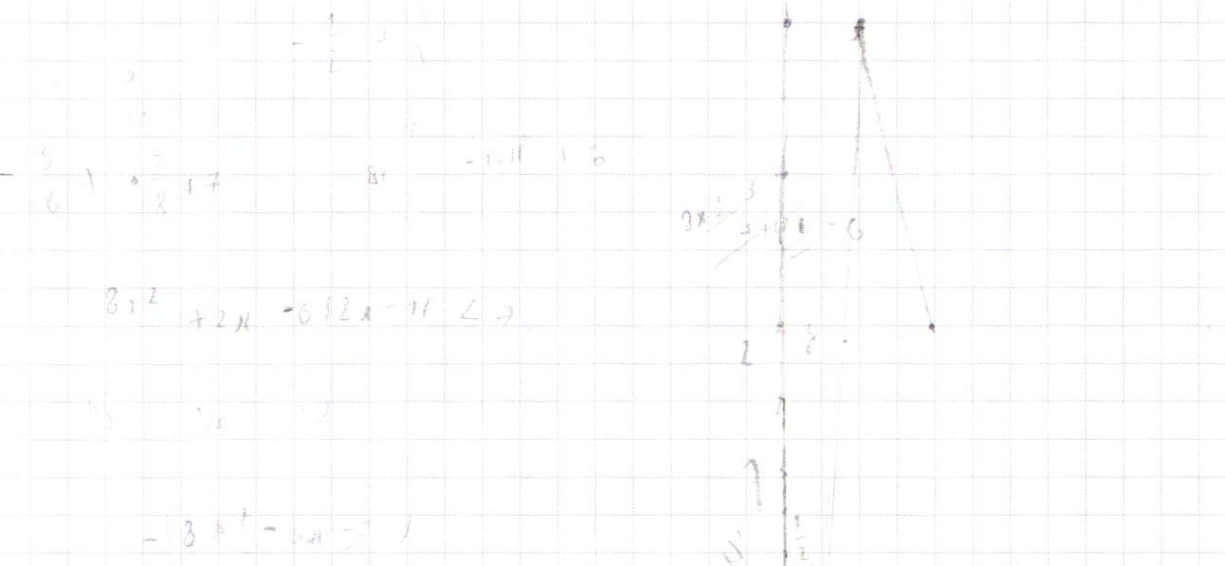
$$4^2 - 75 = 41$$



$$2x^2 + 36y^2 - 12xy + 3 - 52 \cdot 7 + 2y$$

$$(x+y-7)^2 = 2x^2 + 77y^2 - 24xy + 25 + 77$$

$\frac{-2}{2x} - 1 \leq 0 \Rightarrow 2$
 $a = 5$
 $3x - 6|2x - 1| \leq 0 \Rightarrow 6 \leq -3x^2 + 6x + 7$
 $3x^2 + 2x - 6|2x - 1| \leq 0$
 $3x^2 + 2x - 6(2x - 1) \leq 0$
 $3x^2 + 2x - 12x + 6 \leq 0$
 $3x^2 - 10x + 6 \leq 0$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

| |
|------|
| ШИФР |
|------|

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)