МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

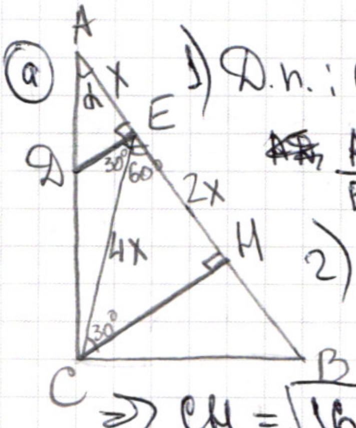
$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) 1) Д.п.: CH – выс. к AB $\Rightarrow$ DE $\parallel$ CH $\Rightarrow$ (по т. Фалеса)

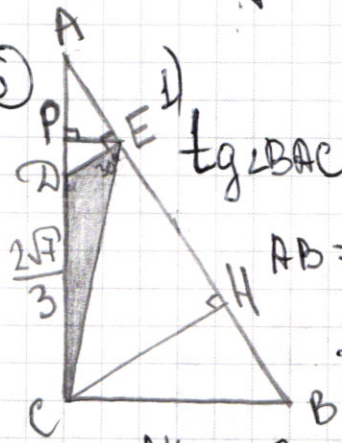
$\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Пусть $AE = x$, $EH = 2x$

2) $DE \parallel CH \Rightarrow \angle HCE = \angle CED = 30^\circ \Rightarrow$ в $\triangle CEH$ – прямоуг.:

$\angle C = 30^\circ \Rightarrow CE = 2EH = 4x \Rightarrow$ (по т. Пиф.)

$\Rightarrow CH = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12x^2} = x \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$



б) 1) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{\sqrt{7}} \Rightarrow BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow$ в $\triangle ABC$ – прямоуг.:

$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

2) $\frac{1}{\cos^2\angle BAC} = tg^2\angle BAC + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \Rightarrow \cos\angle BAC = \sqrt{\frac{3}{7}} =$

$= \frac{AH}{AC} = \frac{3x}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 7} = \frac{1}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Д.п. EP – выс. к AC) $\frac{PE}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow PE : 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7} \Rightarrow PE = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(DEC) = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot PE = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}AC \cdot PE = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{21}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

№1

$a = a \quad b = aq \quad c = aq^2 \quad d = aq^3$

1) $ax^2 - 2bx + c = 0$ корни: $x_1, x_2 = d$

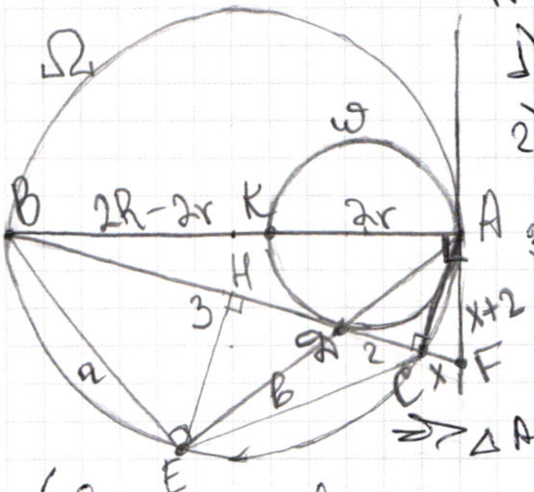
(по т. Виета) $x_1 \cdot aq^3 = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{aq}$

2) $\frac{1}{aq} + aq^3 = x_1 + x_2 = \frac{2b}{a} = 2q$

$1 + a^2q^4 = 2aq^2 \quad c^2 - 2c + 1 = 0 \quad (c-1)^2 = 0 \quad c = 1$

Ответ: 1.

№5



1) Д.п.: AF – общ. кас., $AF \cap BD = F$.

2) Пусть $CF = x$. Тогда: $\underbrace{AF = DF}_{\text{кас. к } \omega} = x+2$.

3) AF – кас., AB – диам. $\Rightarrow \angle BAF = 90^\circ$, AB – диам. $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle CBA$: $\frac{AB}{BC} = \frac{BF}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow \frac{2R}{5} = \frac{x+5}{2R} = \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}$

(в $\triangle CAF$ – прямоуг.: $AC = \sqrt{(x+2)^2 - x^2} = 2\sqrt{x+1}$)

$2R = \frac{5(x+2)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{(x+5)\cdot 2\sqrt{x+1}}{x+2}$ $\quad (x>0 \Rightarrow x \neq -1; -2)$

$5(x+2)^2 = (x+5)\cdot 4(x+1)$ $\qquad x^2 - 4x = x(x-4) = 0$

$5x^2 + 20x + \cancel{20} = 4x^2 + 24x + \cancel{20}$

$x = 4 \Rightarrow R = \frac{5(x+2)}{4\sqrt{x+1}} = \frac{5(4+2)}{4\sqrt{4+1}} = \frac{5\cdot 6}{4\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) (по св-ву кв. кас.) $BD^2 = BK \cdot AB \Rightarrow (2R - 2r)\cdot 2R = 9$

$(3\sqrt{5} - 2r)3\sqrt{5} = 9\cdot 5 - r\cdot 6\sqrt{5} = 9$ $\qquad 5 - r\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} = 1$

$r\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} = 4$ | $r = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

5) в $\triangle DCA$ – прямоуг.: $AD = 2\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \leftarrow \text{из } \triangle BED\text{ – прямоуг.} \\ a^2 + (b + 2\sqrt{6})^2 = 45 \leftarrow \text{из } \triangle BEA \end{cases}$

Пусть: $BE = a$, $ED = b$. Тогда: $\rightarrow$

$\overbrace{a^2 + b^2}^{9} + b\cdot 4\sqrt{6} + 24 = 45$ $\qquad b\cdot 4\sqrt{6} = 12$ $\qquad b = \frac{12}{4\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{9 - b^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}} \Rightarrow$ из $\triangle BED$: $EH = \frac{ab}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(BACE) = S(BCE) + S(BCA) = \frac{1}{2}\cdot EH \cdot BC + \frac{1}{2}\cdot BC \cdot AC =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 5 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 5 \cdot \cancel{2}\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{4} + 5\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5} + 4\cdot 5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{6}{\sqrt{5}}$; $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

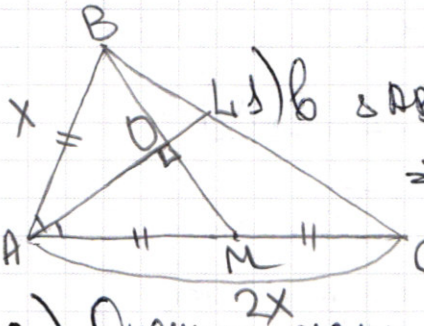
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



1) В $\triangle ABM$: AO — бис. + выс. $\Rightarrow \triangle ABM$ — р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы считаем кол-во треуг., у которых одна сторона $= x$, а другая $= 2x$.

2) Оценим чему может равняться 3 сторона по $\neq$ нер. треуг.:

$$\begin{cases} AC < AB+BC \\ BC < AB+AC \\ \cancel{AB < AC+BC} \end{cases} \begin{cases} 2x < x+BC \\ BC < x+2x \\ \cancel{x < 2x+BC} \end{cases} \begin{cases} BC > x \\ BC < 3x \end{cases} \Rightarrow (\text{периметр } P = 3x+BC) \quad 4x < \overset{=900}{P} < 6x$$

$$\begin{cases} 6x > 900 \\ 4x < 900 \end{cases} \begin{cases} x > 150 \\ x < 225 \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{x \in [151; 224]}$$

Анал. $BC \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \le BC \le 3x-1 \Rightarrow$ целых вар. BC: $(3x-1)-(x+1)+1 = 2x-1$

3) Таким образом, для каждого $x \in \mathbb{Z}$ из пром. $[151; 224]$ сущ. ровно $(2x-1)$ подх. нам треуг.

~~Рассмотрим какой-то $x_0 \in \mathbb{Z}$ целый $x_0 \in [151; 224]$~~

~~Для него будет $(2x_0-2)$ треуг. Анал. для след. подх. x~~

~~для (x_0+1) будет~~ Найдём их сумму для всех x:

$$2(151+152+\ldots+224) - 1\cdot(\underbrace{224-151+1}_{\text{кол-во подх. } x}) = 2\cdot\frac{(151+224)\cdot 74}{2} - 1\cdot 74 =$$

$$= 375\cdot 74 - 1\cdot 74 = 374\cdot 74 = \underline{27676}$$ Ответ: 27676

№7

1) $f\left(x\cdot\frac{2}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right)$, $f(2) = 1$ $\Rightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = 1 - f(x) =$

$f\left(2\cdot\frac{1}{x}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\underline{f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 13

(Нумеровать только чистовики)

2) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$ $\quad \underline{f(x) < f(y)}$

3) Пусть число $n = p_1 \cdot p_2 \dots p_m$ — простые множители (могут повторяться)

Тогда: $f(n) = f(p_1 \cdot \ldots \cdot p_m) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots f(p_m) =$
$= \left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right] + \ldots \left[\frac{p_m}{2}\right]$. Таким образом, если ~~$n \in$~~ $\underline{n \in \mathbb{N}}$, то $\underline{f(n) \in \mathbb{N}}$ и если $\underline{x = y}$, то $\underline{f(x) = f(y)}$.

4) $f(x) < f(y)$, т.е. $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$. Так как x и $y \in [2; 22]$, т.е. одинаковому промежутку чисел: кол-во пар $(x; y)$, таких что $f(x) < f(y)$ равно кол-ву пар $(x; y)$, таких что $f(x) > f(y)$ (в силу ~~сим~~ симметричности x и y) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во пар $(x; y)$, таких что $f(x) < f(y)$ равно половине кол-ва различных x и $y \in [2; 22]$, которое равно: $21 \cdot 20$

Ответ: $\frac{21 \cdot 20}{2} = \underline{210}$.

№3

1)
$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$: \sqrt{(x-6)(y-1)}$

Рассм. 1ое ур-ие: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$ — не корни сист. $\Rightarrow \sqrt{\frac{x-6}{y-1}} - 6\sqrt{\frac{y-1}{x-6}} - 1 = 0$

Пусть $t = \frac{x-6}{y-1}$. Тогда: $t - \frac{6}{t} - 1 = 0$
$t^2 - t - 6 = 0$ $\quad t = 3; \cancel{-2}$ ← не подх., т.к. $t \geq 0$

$\frac{x-6}{y-1} = 3 \quad x - 6 = 3y - 3 \quad \underline{x = 3y + 3}$

2) Рассм. 2ое ур-ие: $(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$9(y-1)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$ $\quad D/4 = 121 + 77 = 198 = 9 \cdot 22$

$11y^2 - 22y + 11 - 18 = 0$ $\quad \begin{cases} y = \frac{11 \pm 3\sqrt{22}}{11} = 1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{11}} \\ x = 3 \pm 9\sqrt{\frac{2}{11}} + 3 = 6 \pm 9\sqrt{\frac{2}{11}} \end{cases}$

$11y^2 - 22y - 7 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3 (продолжение)

$$(x;y)=\left[\begin{array}{l}\text{I}: \left(6+9\sqrt{\frac{2}{11}};\ 1+3\sqrt{\frac{2}{11}}\right)\\ \text{II}: \left(6-9\sqrt{\frac{2}{11}};\ 1-3\sqrt{\frac{2}{11}}\right)\end{array}\right.$$

При этом: $\sqrt{(x-6)(y-1)}$ ← в усл. ⇒ $\to (x-6)(y-1)\geq 0$

I: ~~x=6~~ $(x-6)(y-1)=9\sqrt{\frac{2}{11}}\cdot 3\sqrt{\frac{2}{11}}=27\cdot\frac{4}{11}\geq 0$ ← подходит

II. $(x-6)(y-1)=\left(-9\sqrt{\frac{2}{11}}\right)\cdot\left(-3\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=27\cdot\frac{4}{11}\geq 0$ ← подходит

<u>Ответ:</u> $\left(6+9\sqrt{\frac{2}{11}};1+3\sqrt{\frac{2}{11}}\right);\left(6-9\sqrt{\frac{2}{11}};1-3\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$.

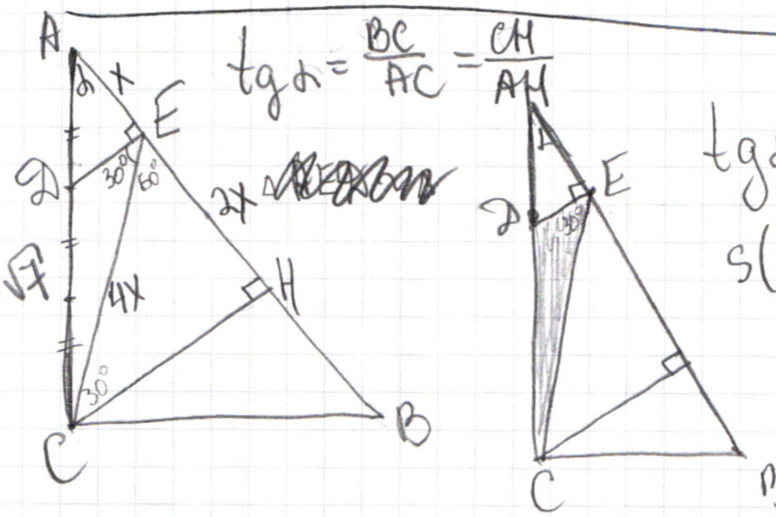
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad b=qa \quad c=q^2a \quad d=q^3a$ Корни: e и d

$ax^2-2bx+c=0 \quad D/4=b^2-ac \quad ed=c \Leftrightarrow e\cdot q^3a=q^2a \quad e=\frac{1}{q}$

$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=q^3a \quad b\pm\sqrt{b^2-ac}=q^3a^2=bc \quad e+d=\frac{2b}{a}$

$\frac{1}{q}+q^3a=\frac{2qa}{a}$



$tg\,\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{CH}{AH}$

$tg\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{\sqrt{7}} \Rightarrow BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$S(CED)=S(AB$

~~$\frac{1}{q}+q^3a=2q$~~

~~$1+q^4a=2q^2$~~

~~$a=\frac{2q^2-1}{q^4}$~~

~~$c=q^2a=\frac{2q^2-1}{q^2}=2-\frac{1}{q^2}$~~

$a=a \quad b=aq \quad c=aq^2 \; ? \; d=aq^3$

$ax^2-2bx+c=0$ корни: $x_1, x_2=d$

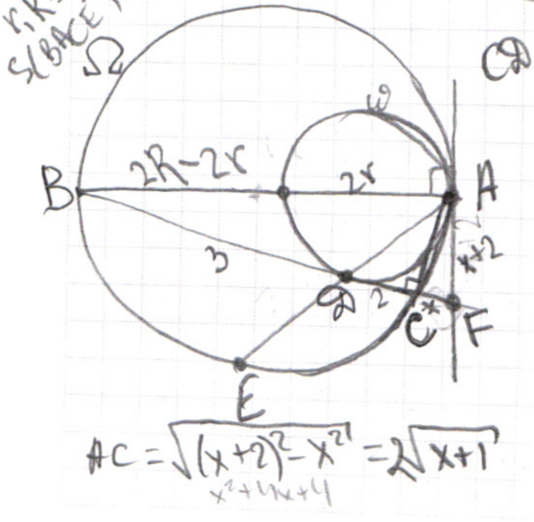
$x_1\cdot aq^3=x_1x_2=\frac{c}{a}=q^2 \Rightarrow x_1=\frac{1}{aq} \quad x_1+x_2=\frac{1}{aq}+aq^3=\frac{2b}{a}=\frac{2aq}{a}=2q$

$1+a^2q^4=2aq^2$

$c^2-2c+1=0 \quad (c-1)^2=0$

$c=1$

$r,R=?$
$S(BACE)=?$



$CD=2 \quad BD=3$

$(2R-2r)\cdot 2R=9$

$4R^2-4Rr=9$

$\frac{6\sqrt{5}}{9}=\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Delta ABF \sim \Delta CBA: \frac{AB}{BC}=\frac{BF}{AB}=\frac{AF}{AC}$

$\frac{2R}{5}=\frac{x+5}{2R}=\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}$

$AC=\sqrt{(x+2)^2-x^2}=2\sqrt{x+1}$

x^2+4x+4

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$\cancel{(x^2-12x+36)+}$

$$\begin{cases} x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$-13xy+34y^2+13x+10y-26=0$

$13(x-xy+y-1)+34y^2-3y-13=0$

$y=1$

$x-x=0$

$x=6$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

Вар. BC: $2x-2$

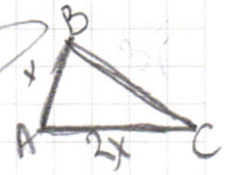
$x+1\le BC\le 3x-1$

$x<BC<3x$

$$\begin{cases} (y-1)(x-6)=((x-6)-6(y-1))^2 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} ab=(a-6b)^2 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

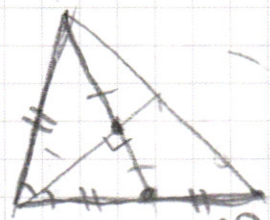
$(x-6)=a$, $(y-1)=b$

$18=(a+b)^2-2(a-6b)^2+b^2$



$6x>P>4x$

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases} \quad 6x>900>4x$$



$(x-6)^2-12(x-6)(y-1)+36(y-1)^2=(x-6)(y-1)$

$$\begin{cases} (x-6)^2-13(x-6)(y-1)+36(y-1)^2=0 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x>900 \\ 900>4x \end{cases} \begin{cases} x>150 \\ x<225 \end{cases}$$

$x\in(150;225)$

$18-2(y-1)^2=13(x-6)(y-1)-36(y-1)^2$

$x\in[151;224]$

$18=13(x-6)(y-1)-34(y-1)^2=(y-1)(13x-78-34y+$

$\frac{900}{4}=\frac{450}{2}=225$

$\frac{900}{6}=\frac{300}{2}=150$

$2i(i-1)+2(i+1)\cdot i$

$5(x^2$

$5(x+2)^2=(x+5)\cdot 4(x+1)$

$$2R=\frac{5(x+2)}{2\sqrt{x+1}}=\frac{(x+5)\cdot 2\sqrt{x+1}}{x+2}$$

$(x+5)(x+1)=x^2+6x+5$

$i^2-i+i^2+i=2i^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{5}$

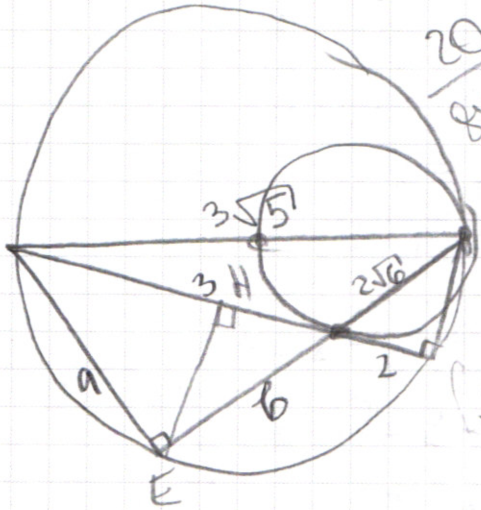
$\sqrt{4+4\cdot 5} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$224 - 150 = 74$ $\quad 224 + 151 = 375$ $\quad \frac{375\cdot 74}{2}$ $\quad 373 \cdot 74 = 1492 + 2611 = 27602$

$8x+12x-6$

$20x-6$

$8x-12x+6 = -4x+6$



$$\begin{cases} a^2+b^2 = 9 \\ a^2+(b+2\sqrt{6})^2 = 45 \end{cases}$$

$\underbrace{a^2+b^2}_{=9} + b\cdot 4\sqrt{6} + 24 = 45$

$b\cdot 4\sqrt{6} = 12 \quad b = \frac{12}{4\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$y = 20x-6$

$a = \sqrt{9-b^2} = \sqrt{9-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{18-3}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$

$EH = \frac{ab}{3} = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{2}} : 3 = \sqrt{\frac{45}{4\cdot 9}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$8x^2-6x-7$

$x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]:\ 20x-6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$x\in\left[\frac{1}{2};1\right]:\ -4x+6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$-8x^2+6x+7 \ge 20x-6$

$-8x^2-14x+13 \ge 0$

$8x^2+14x-13 \le 0$

$D/4 = 49+13\cdot 8$

$f(p) = [p/2]$

$2 \le x, y \le 22 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(n) = f(p_1 p_2 \ldots) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots = \left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right] + \ldots$

$y - 1 - 3y + 3 = -2y + 2$

$f\left(x \cdot \frac{2}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right) = f(2) = 1$

$f\left(\frac{2}{x}\right) = 1 - f(x) \qquad f\left(\frac{2}{x}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\cancel{1} + f\left(\frac{1}{x}\right) = \cancel{1} - f(x) \qquad x = p_1 p_2 \ldots p_n, \quad y = q_1 q_2 \ldots q_m$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) = 0 \qquad f(x) < f(y)$

$2y - 2 - 3y + 3 = 1 - y$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$\cancel{(x-6)^2 + (x-6) + 2(y-1)^2 - 6(y-1) = 18 + \sqrt{(x-6)(y-1)}}$

$\cancel{(x-6)(x-5) + 2(y-1)(\ldots)}$

$\sqrt{\frac{x-6}{y-1}} - 6\sqrt{\frac{y-1}{x-6}} - 1 = 0$

$\cancel{D/4 = 121 + 77 - 198} = 99 \cdot 2 = 9 \cdot 22$

$t - \frac{6}{t} - 1 = 0 \qquad D = 1 + 24 = 25$

$11(y-1)^2 - 18 = 0$

$t^2 - t - 6 = 0 \qquad t = \frac{1+5}{2} = 3; -2$

$(y\sqrt{11} - \sqrt{11})^2 - (3\sqrt{2})^2 = (y\sqrt{11} - \sqrt{11} - 3\sqrt{2})(y\sqrt{11} - \sqrt{11} + 3\sqrt{2})$

$y = \frac{\sqrt{11} \pm 3\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{11}}$

$\cancel{y = \sqrt{11} - 3\sqrt{2}}$

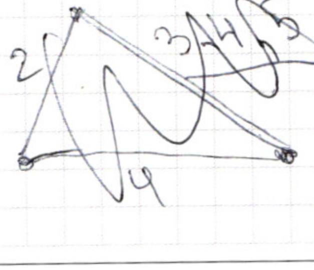
$\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{11} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}}$

$\left(6 + 9\sqrt{\frac{2}{11}};\ 1 + 3\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$

$\left(6 - 9\sqrt{\frac{2}{11}};\ 1 - 3\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$

$$\begin{array}{r} 27602 \\ +\ 74 \\ \hline 27676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 374 \\ \times\ 74 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 374 \\ \times\ 70 \\ \hline 26180 \\ +\ 1496 \\ \hline 27676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 374 \\ \times\ 4 \\ \hline 1496 \end{array}$$

$x = 2$



$\frac{6\sqrt{5}}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)