МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $b = k\cdot a$; $c = k^2\cdot a$, четвёртый член геометрической прогрессии равен $d = k^3\cdot a$.

Перепишем уравнение, данное в условии через $a\cdot k^n$. ($n\in N$; $n\leq 2$)

$$ax^2+bx+c = a\cdot x^2+k\cdot a\cdot x+k^2\cdot a = a(x+k)^2=0$$

Возможны 2 случая:

1.) $a=0$, тогда прогрессия не будет прогрессией, все её члены $=0$; ~~ax^2+bx+c — не квадратный~~ $a=b=c=0$ $\Rightarrow d=0$

2.) $d=-k$ - единств. корень уравнения.

$d=k^3\cdot a=-k \Leftrightarrow c=k^2\cdot a=-1$ (т.к. $k\neq 0$)

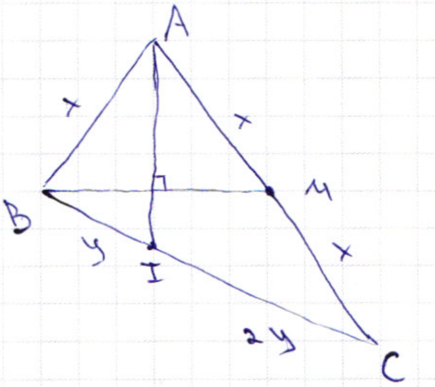
Либо $c=0$, что быть, либо $c=-1$ - ответ.

№2

Рассмотрим, как выглядит треугольники, описанные в условии.

Понятно, что медиана и биссектриса выходят из разных вершин (в противном случае у Δ есть угол больший $180°$). Пусть дан ΔABC, причём биссектр. из A (AI) $\perp$ медиане из B. (BM)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



Заметим, что $\triangle ABM$ - равнобедр, т.к. биссектр из $A \perp BM \Rightarrow$

$AB = AM = MC$

Пусть $AB = x$; $BI = y$.

Заметим, что $\frac{AB}{AC} = \frac{BI}{IC}$, т.к. AI - биссектр. $AB = x$; $AC = 2x$; $BC = 3y$.

Чтобы $\exists$ такой $\triangle ABC$, должны выполняться нер-ва $\triangle$.

$AB < AC + BC$; $AC < AB + BC$; $BC < AB + AC$ или же

$-x < 3y$; $x < 3y$; $x > y$ соотв.

$P_{ABC} = 1200 = 3x + 3y \Leftrightarrow x + y = 400$

Если $x \leq 200$, то $y \geq 200 \geq x$ - не может быть.

Если $x \geq 300$, то $3y \leq 300 \leq x$ - не может быть $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [\cancel{200}\ 201; 299]$, y определяется однозначно. $(400 - x)$

$AB \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

целых чисел на отрезке $[\cancel{200}\ 201; 299]$ - $\cancel{100}\ 99$, каждому x однозначно соотв. ~~такой~~ $\triangle ABC$ без упорядоченных по размеру сторон $\Rightarrow$ таких $\triangle$ $\cancel{100}\ 99$

№3

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 3} \overset{\text{т.к. } y-2x \geq 0}{\Leftrightarrow} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \Leftrightarrow y^2 - 5xy + y + 4x^2 - 2x - 2 = 0$

Решим квадр. уравнение отн. y.

По т. Безу, при $y = x + 1$; $(y - 2x)^2 = (x-1)(y-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 = (x-1)(x-1) \Rightarrow x+1$ - корень уравнения.

Сумма корней кв. ур. отн. $y = -(-5x + 1) = 5x - 1 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (прод.)

второй корень равен $5x-1-(x+1)=4x-2$

При $y=x+1$

$2x^2+y^2-4x-4y+3 = 2x^2+(x^2+2x+1)-4x-4(x+1)+3=0$

$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ ; y=1 \\ x=2 \ ; y=3 \end{array}\right.$ - не подходит, т.к. $y-2x<0$

При $y=4x-2$

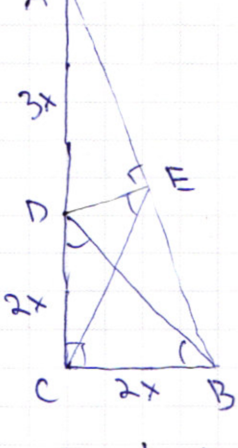
$2x^2+y^2-4x-4y+3 = 2x^2+(16x^2-16x+4)-4x-4(4x-2)+3=0$

$18x^2-36x+15 = 18\left(x-\frac{6+\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\frac{6-\sqrt{6}}{6}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\frac{\sqrt{6}}{6} \ ; y=\frac{2\sqrt{6}}{3}+2 \\ x=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \ ; y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+2 \end{array}\right.$ -

- не подходит, т.к. $y-2x$ в этом случае меньше 0

Ответ: $(0,1)$; ~~(...)~~; $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6};\ \frac{2\sqrt{6}}{3}+2\right)$

№4.



а) $AD:AC = 3:5 \Leftrightarrow AD:DC = 3:2$.

Пусть $AD=3x$, тогда $DC=2x$.

$\angle(BC;CD) = \angle(BE;ED) = \angle(AE;ED) = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow EDCB$ - вписан $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$

$\angle BDC = 90^\circ - \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow DC=CB=2x$

$\operatorname{tg} BAC \overset{①}{=} \operatorname{tg} EAD = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{2x+3x} = \frac{2}{5}$

б) $\operatorname{tg} EAD = \frac{2}{5} = \frac{\sin EAD}{\cos EAD} \Leftrightarrow \cos EAD = 2.5 \sin EAD$

$\cos^2 EAD + \sin^2 EAD = 7{,}25 \sin^2 EAD = 1 \Leftrightarrow \sin EAD = \frac{1}{\frac{\sqrt{29}}{2}}$

$\cos EAD = \frac{\cancel{\sqrt{..}}\,5}{\sqrt{29}}$. $AE = AD\cdot\cos EAD = \frac{3\cancel{\sqrt{..}}\cdot 5}{29}x$; $DE = AD\cdot\sin EAD =$

$= \frac{\cancel{12}\,6}{\sqrt{29}} \cdot x$

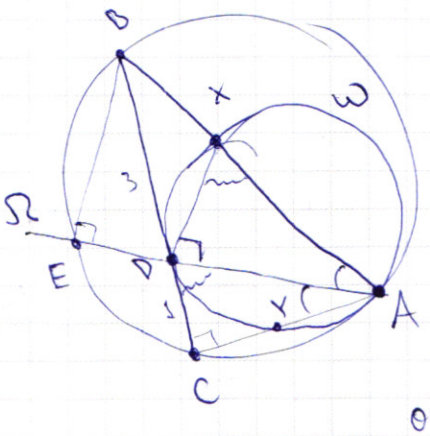
$S_{\triangle ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{\cancel{18}\,9\,\cancel{\sqrt{13}} \cdot 5}{29} x^2$

$\frac{S_{ADE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{\triangle CDE} = \frac{\cancel{12}\,6 \cdot 5}{29} x^2$ (т.к. высота из E на прямую AC одна и та же, она сокращается)

Если $AC = \sqrt{29}$, то $5x = \sqrt{29} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow S_{\triangle CDE} = \frac{6 \cdot 29 \cdot 5}{25 \cdot 29} =$

$= \frac{\cancel{12}\,\cancel{\sqrt{13}}\,6 \cdot 5}{25} = \frac{6}{5}$

№5



Пусть $AB \cap \omega = X$

Заметим, что AX - диаметр ω, т.к. центры окр-тей и точка их касания коллинеарны.

$\angle DXA = \angle ADC$ = (DC - касат. к описанной окр-ти $\triangle DXA$)

$\triangle DXA \sim \triangle CDA$ (2 угла)

$\angle XDA = \angle DCA = 90°$ ($\angle XDA$ опирается на диаметр ω; $\angle DCA$ опирается на диаметр Ω)

$\angle DXA = \angle ADC$ (см. выше)

$\angle DAX = \angle DAC \Rightarrow AD$ - биссектр. $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} = \sin ABC$

$\cos ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$AB = \frac{BC}{\cos ABC} = 3\sqrt{2}$; $AC = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \sqrt{2}$

Степень точки B отн. $\omega = BD^2 = BX \cdot AB$

$BX = \frac{BD^2}{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2} = AX$

Аналогично степень точки C отн. $\omega = CD^2 = CY \cdot AC$, где $Y = AC \cap \omega$. $CY = AY = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (прод.)

Фигуру BACE можно получить гомотетией фигуры XAYD с коэф-том 2 относительно. A ⇒ их площади относятся как квадрат коэф-та подобия ($S_{BACE} = 4S_{XAYD}$)

$S_{XAYD} = S_{XAD} + S_{ADY}$

$S_{XAD} = \frac{AD \cdot XD}{2}$

$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{3}$

$XD = \sqrt{AX^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$S_{ADY} = \frac{AY \cdot AD \cdot \sin DAY}{2}$

$S_{DAX} = \frac{AX \cdot AD \cdot \sin DAX}{2}$

$\frac{S_{ADY}}{S_{DAX}} = \frac{AY}{AX} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S_{ADY} = \frac{1}{3} S_{DAX}$

$S_{XAYD} = \frac{4}{3} S_{DAX} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

Радиус $\omega = \frac{AX}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

№7.

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

~~Чтобы~~ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ ~~надо~~ $\Leftrightarrow f(x) < f(y)$

$f(2)=1$ $f(6)=f(2)+f(3)=2$ $f(10)=f(2)+f(5)=3$ $f(14)=f(7)+f(2)=4$

$f(3)=1$ $f(7)=3$ $f(11)=5$ $f(15)=f(5)+f(3)=3$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$ $f(8)=f(2)+f(4)=3$ $f(12)=f(2)+f(6)=3$ $f(16)=f(8)+f(2)=4$

$f(5)=2$ $f(9)=f(3)+f(3)=2$ $f(13)=6$ $f(17)=8$

$f(18)=f(9)+f(2)=3$ $f(20)=f(10)+f(2)=4$

$f(19)=9$ $f(21)=f(7)+f(3)=4$

1) Среди этих чисел 2 раза встречается 1;

2) 4 раза – 2

3) 6 раз – 3

4) 4 раза – 4

5) 1 раз – 5

6) 1 раз – 6

7) 1 раз – 8

8) 1 раз – 9

При выборе любых 2 из них мы однозначно определяем пару (x, y)

Если число x находится в n-том пункте, то в пару к нему мы можем поставить любое число из m-ого пункта $(m>n)$

Всего кол-во вариантов:

$$2\cdot(4+6+4+1+1+1+1)+4\cdot14+6\cdot8+4\cdot4+3+2+1=162$$

Но среди этих пар присутствуют числа вида $f\left(\frac{kx}{ky}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, но нам без разницы :)

Ответ: 162.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

~~При $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$~~

~~$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}a + b \le -3\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$~~

~~$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$~~

1) $2x^2 - (a+1)x - b - 1 \le 0$ на отрезке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

2) $x + |2x - 1| - ax - b \ge 0$

Если $x \ge 0,5$

$3x - 1 - ax - b \ge 0$

Это линейная ф-ция => она принимает наим. значение на одном из концов отрезка значений $x \in [0,5; 1,5]$

$$\left[\begin{array}{lll} 1,5 - 1 - 0,5a - b \ge 0 & \Leftrightarrow & 1 - a - 2b \ge 0 \\ 4,5 - 1 - 1,5a - b \ge 0 & \Leftrightarrow & 7 - 3a - 2b \ge 0 \end{array}\right.$$

1) Вершина параболы $\frac{a+1}{4}$, отн. ее значения симметричны. Больший её корень $\ge \frac{3}{2}$; Меньший $\le -\frac{1}{4}$

$D = a^2 + 2a + 1 + 8b + 8$

$x_1 = \frac{a+1-\sqrt{D}}{4} \le -\frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{a+1+\sqrt{D}}{4} \ge \frac{3}{2}$

$a+1-\sqrt{D'} \leq -1$

$a+1+\sqrt{D'} \geq 6$

$2\sqrt{D} \geq 7$

$D \geq \frac{49}{4}$

$a^2+2a+1+8b+1 \geq \frac{49}{4}$

$a^2+2a+8b \geq \frac{13}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2)=1$ $f(12)=3$

$f(3)=1$ $f(13)=6$

$f(4)=2$ $f(14)=4$

$f(5)=2$ $f(15)=3$

$f(6)=2$ $f(18)=3$

$f(7)=3$ $f(16)=4$

$f(8)=3$ $f(17)=8$

$f(9)=2$ $f(19)=9$

$f(10)=3$ $f(20)=4$

$f(11)=5$ $f(21)=4$

$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{14}$ $\frac{3}{21}$

Если $x=2$ или 3

$\overbrace{36+56+42+16}^{52}=\underbrace{3+2+1}_{6}$

0

162

$2x^2-x-1=-3x+1$

$x=2$ $2x^2-2x-2$

$x=0$ $D=4+4$ $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

x^2-x-1 $\frac{2-2\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1+2\sqrt{2}+2-2-1-\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = ka$

$c = k^2 a$

$d = k^3 a$

$ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2kax + k^2 a = 0$

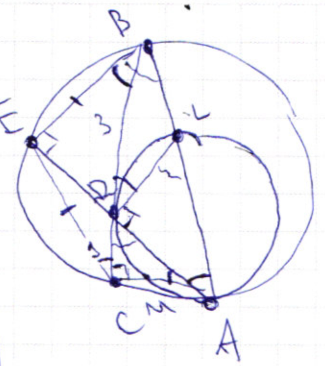
$x^2 + 2kx + k^2 = 0$

$(x+k)^2 = 0$

$-k = d$

$-k = k^3 \cdot a$

$k^2 \cdot a = -1$



$CD \cdot DB = DE \cdot DA = 3$

$BL \cdot AB = 9$

$2x^2 - x - 1$

$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$ $AB = \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

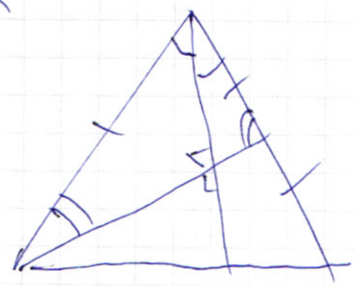
$AC = \frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}}$ $\cos CAB = \frac{1}{3}$

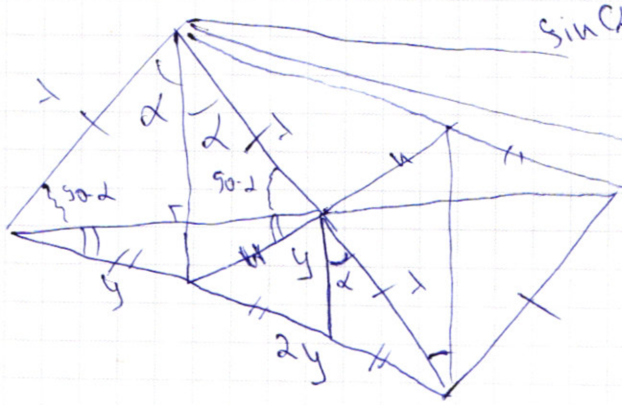
$\sin CAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

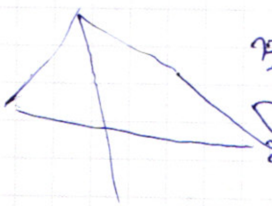
$3y > x$

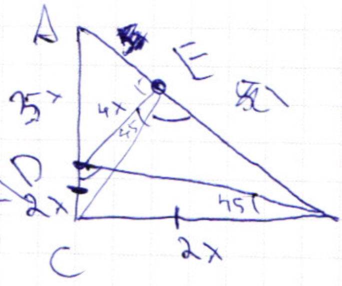
$3x > y$

$x + y = 400$









$\frac{3}{5}\sqrt{29}$

$\frac{2}{5}\sqrt{29}$

$\frac{2}{5}\sqrt{29}$

BAC

$f(\cancel{x}y) + f(y) = f(x)$

$\frac{2}{5} = tg\, CAB -$

$f(x) + f(\frac{1}{y})$ $\frac{1}{y}$

$\frac{3}{2}a - 6$

$f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$ min либо $6 - \frac{1}{4}a$, либо

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

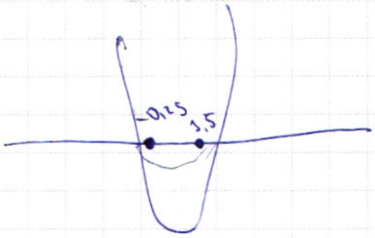
$a \geq 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq -\frac{a}{4} + b \\ x + |2x-1| \geq \frac{3}{2}a + b \end{cases}$$

$a < 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq \frac{3}{2}a + b \\ x + |2x-1| \geq -\frac{a}{2} + b \end{cases}$$

$2x^2 + (a-1)x + b - 1 \leq 0$ при $x \in [-0{,}25;\ 1{,}5]$



$D = a^2 - 2a + 1 - 8b + 8$

$1 - a \geq 1{,}25$

$a \leq -0{,}75$

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2(x^2-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$2x^2+4x+2$ $\quad y^2-4y+4$

$3x^2 - 6x = 0$

$x = 0;\ 2$

$(-a+1)x + |2x-1| - b \geq 0$

$x \geq 0{,}5$

$-ax + 3x - 1 - b \geq 0$

$-0{,}25a + 0{,}75 - 1 - b \geq 0$

$a + 1 + 4b \geq 0$

$a + 4b \geq -1$

$x < 0{,}5$

$-xa - x + 1 - b \geq 0$

$3y > x$

$x > y$

$x + y = 400$

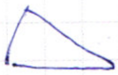
$300 > x \geq 201$

$18x^2 - 36x + 15$

$9x^2 - 12x + 5 = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$



$25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8$

$9x^2 - 18x + 9 = (3(x-1))^2$

$y_1 = \frac{5x - 1 + 3x - 3}{2} = 4x - 2$; $y_2 = \frac{5x - 1 - 3x + 3}{2} = x + 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)