# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Решение:

1) Пусть знаменатель данной ~~г~~ геометрической прогрессии равен $d$, тогда $b = a\cdot d$, $c = b\cdot d = a\cdot d^2$;

~~Пусть четвёртый~~ Тогда четвёртый член прогрессии равен $a\cdot d^3$; будем обозначать его за букву $A$, т.е. $A = a\cdot d^3$;

2) т.к. по условию $A$ является корнем

$ax^2 + 2bx + c = 0$, то $a\cdot A^2 + 2\cdot b\cdot A + c = 0$, т.е.

$$a\cdot(a\cdot d^3)^2 + 2\cdot a\cdot d\cdot ad^3 + ad^2 = 0;$$

$$a^3\cdot d^6 + 2\cdot a^2\cdot d^4 + ad^2 = 0;$$

$$a\cdot d^2\cdot(ad^4 + 2ad^2 + 1) = 0;$$

но $c = ad^2$; т.е.

$$c\cdot(c^2 + 2c + 1) = 0;$$

$$c\cdot(c+1)^2 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

Ответ: 0 или (−1).

№3

Решение:

1) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (y-2x)^2 = x(y-2)-(y-2) \\ 2\cdot(x-1)^2+(y-2)^2-6+3=0 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2\cdot(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$;

Пусть $a=x-1$ и $b=y-2$, тогда $b-2a=y-2-2\cdot(x-1)=$

$=y-2x$;

$\begin{cases} (b-2a)^2=ab \\ 2a^2+b^2-3=0 \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ 2a^2+b^2=3 \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (b-4a)(b-a)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a \end{array}\right. \\ 2a^2+b^2=3 \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ 2a^2+(4a)^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=a \\ 2a^2+a^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ a^2=\frac{1}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} b=a \\ a^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ a^2=\frac{1}{6} \\ 2a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=a \\ a^2=1 \\ -a\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ a=\frac{1}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} b=a \\ a=-1 \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\frac{4}{\sqrt6} \ (1) \\ a=\frac{1}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \ (2) \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=\frac{1}{\sqrt6} \\ y-2=\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-1 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\sqrt6+6}{6} \\ y=\frac{4\sqrt6+12}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$;

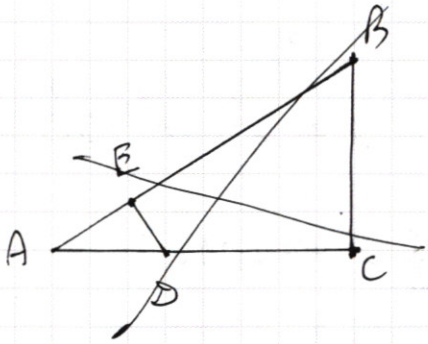
Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt6+6}{6}; \frac{4\sqrt6+12}{6}\right); (0;1)\right\}$.

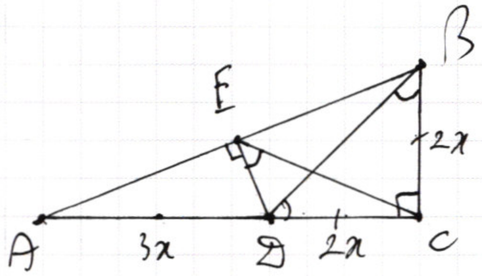
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Решение:

а)




т.к. по условию $\angle ACB = 90°$ и $\angle AED = 90°$ (т.е. $\angle DEB = 180° - \angle AED = 180° - 90° = 90°$), то четырёхуг. $DEBC$ — вписанный; тогда углы $\angle DEC$ и $\angle DBC$ — вписанные в окружность около $DEBC$ и опирающиеся на одну дугу $\breve{DC}$ ($E$ и $B$ — лежат по одну сторону от хорды $DC$), тогда $\angle DEC = \angle DBC = 45°$.

Пусть $AC = 5 \cdot x$, ($x \in \mathbb{R}, x > 0$) тогда $AD = 3x$;

$\triangle DCB$: $\angle DCB = 90°$, $\angle DBC = 45°$, т.е. $\triangle DCB$ — р/б с осн. $BD$, т.е. $BC = CD = AC - AD = 5x - 3x = 2x$;

$\triangle BAC$: $\angle BCA = 90°$, $tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$; $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(5x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{29} \cdot x$; ~~$\triangle AED$: $\angle AED = 90°$, $AE = AD \cdot \sin \angle BAC = \sin \angle EAD = AD \cdot \sin \angle BAC = 3x$.~~ $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{\sqrt{29}x} = \frac{2}{\sqrt{29}}$;

$\triangle AED$: $\angle AED = 90°$, $AE = AD \cdot \sin \angle EAD = AD \cdot \sin \angle BAC = 3x \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6x}{\sqrt{29}}$;

$\triangle EAD$: $S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle EAD \cdot AE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{6x}{\sqrt{29}} \cdot 3x =$

$= \frac{18x^2}{29}$;

$\triangle EAC$: $S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle EAC \cdot AE \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{6x}{\sqrt{29}} \cdot 5x =$

$= \frac{30x^2}{29}$;

$$S_{\triangle CED} = S_{\triangle EAC} - S_{\triangle EAD} = \frac{30x^2}{29} - \frac{18x^2}{29} = \frac{12x^2}{29};$$

$$AC = \sqrt{29} = 5x;$$

$$x = \frac{\sqrt{29}}{5}; \quad x^2 = \frac{29}{25};$$

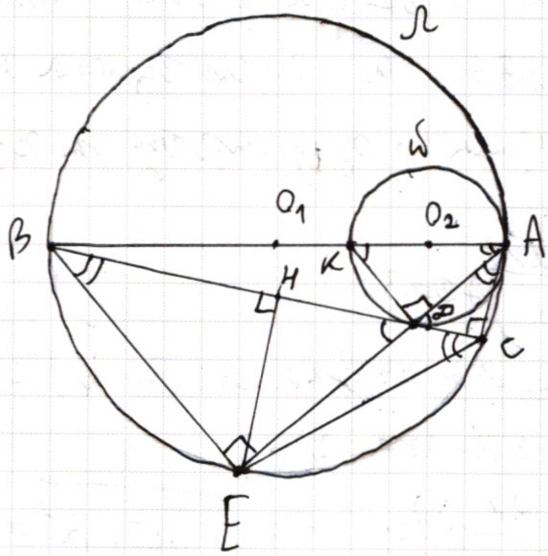
$$S_{\triangle CED} = \frac{12 \cdot 29}{29 \cdot 25} = \frac{12}{25} = 0{,}48;$$

Ответ: ~~0,48~~ а) 0,4; б) 0,48.

№5

Решение:

1)




~~Пусть $AB \cap \omega = \{A;K\}$,~~

Т.к. ω и Ω касаются внутренним образом, то $O_2 \in AB$; пусть $AB \cap \omega = \{A;K\}$; AK — диаметр ω (т.к. $O_2 \in AK$);

В окружности Ω: $\angle EBC = \angle EAC$; $\angle BCA = \angle BEA = 90°$ (опираются на диаметр)

В окружности ω: $\angle KDA = 90°$, $\angle DKA = \angle ADC$ (т.к. BC — касательная окр. ω

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда в $\triangle KDA$: $\angle KAD = 180° - \angle AKD - \angle KDA =$
$= 180 - \angle ADC - 90° = 180° - \angle ADC - \angle DCA$, рассмотрим
$\triangle ACD$: $\angle DAC = 180° - \angle ADC - \angle DCA$, т.е. $\angle DAC = \angle KAD$;
но в окружности $\omega$: $\angle BCE = \angle BAE$ и $\angle EBC = \angle EAC$,
тогда, т.к. $\angle BAE = \angle EAC$, то $\angle BCE = \angle EBC$;

т.е. $\triangle BEC$ – р/б с осн. $BC$, где $BC = BD + DC = 1 + 3 = 4$;

Пусть $EH$ – медиана (и высота) к основанию $BC$ в $\triangle BEC$;
~~тогда~~ тогда $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$;
т.к. $\angle BHE = \angle BED = 90°$ и $\angle EBD$ – общий у
$\triangle BHE$ и $\triangle BED$, то $\triangle BHE \sim \triangle BED$, т.е.
$\frac{BE}{BH} = \frac{BD}{BE}$, т.е. $BE^2 = BD \cdot BH = 3 \cdot 2 = 6$; $BE = \sqrt{6}$ (т.к. $BE > 0$)
$BE = EC = \sqrt{6}$;
$\triangle BED$: $ED = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}$
т.к. $\angle BDE = \angle ADC$ и $\angle BED = \angle DCA = 90°$, то
в $\triangle BDE$: ~~$\frac{ED}{BD} =$~~ ~~тогда~~ $\operatorname{tg}\angle BDE = \frac{BE}{ED} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$; т.е.
в $\triangle DAC$: $\operatorname{tg}\angle ADC \underset{=\frac{AC}{CD}}{=} \operatorname{tg}\angle BDE = \sqrt{2}$, т.е. $AC = \operatorname{tg}\angle ADC \cdot CD =$
$= \operatorname{tg}\angle BDE \cdot CD = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$; ~~тогда~~ $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} =$
$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} = ED$;
$\triangle BAE$: $KD \perp EA$ и $BE \perp EA$, т.е. $KD \parallel BE$, но $ED = AD$, тогда
$KD$ – ср. линия в $\triangle BAE$, где, тогда $BK = KA$, но $BO_1 = O_1A$, т.е.
точки $K$ и $O_1$ – совпадают;

$\triangle BEA$: $\angle BEA = 90$, $BE = \sqrt{6}$, $EA = ED + DA = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$AB = \sqrt{BE^2 + EA^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6+12} = 3\sqrt{2}$;

$O_1A = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

$O_2A = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}\cdot O_1A = \frac{3\sqrt{2}}{4}$;

~~$S_{BACE} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BCA} = \frac{BE}{BE}$~~

$\triangle DAC$: $\sin\angle DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2}\cdot\sin\angle DAC\cdot AE\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$;

$S_{\triangle BEA} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot BE = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

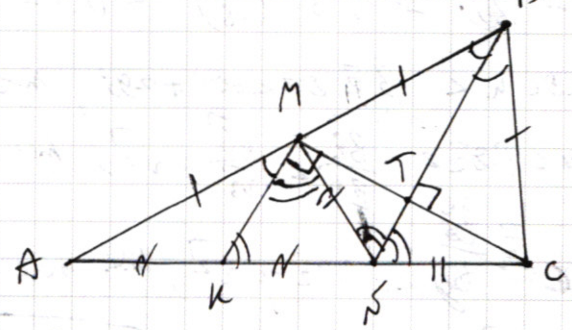
$S_{BACE} = S_{\triangle EAC} + S_{\triangle BEA} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

Ответ: $4\sqrt{2}$

№ 2

Решение:

1)




Пусть $\triangle ABC$ – данный треугольник из условия и $CM$ и $BN$ его медиана и биссектриса соответственно, где $CM \perp BN$; ~~(...)~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

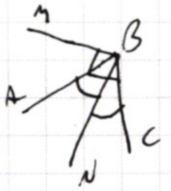
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) медиана и биссектриса не могут быть перпендикулярны и выходить из одной вершины треугольника, т.к. иначе




Пусть $BN$ и $BM$ — бис. и медиана соответственно в $\triangle ABC$, тогда

~~тогда~~ $\angle ABC < 180°$, т.е. $\angle ABN = \angle NBC = \frac{1}{2}\angle ABC < 180° \cdot \frac{1}{2} = 90°$, т.е. $\angle MBN = 90° > \angle ABN$, значит $BM$ лежит вне угла $\angle ABC$, т.е. не может пересекать $AC$, противоречие, значит наше предположение неверно.

3) т.к. $\angle ABN = \angle NBC$ ~~то~~ и $BN \perp MC$, то ($MC \cap BN = T$)
$BT$ — ~~медиана~~ высота и биссектриса и медиана к осн. $MC$ в $\triangle MBC$, т.е. $\triangle MBC$ — р/б с осн. $MC$, и $MT = TC$, тогда $BM = BC$, но $BM = MA$, т.е. $BC = BM = MA$;

4) Аналогично, т.к. $NT$ — медиана и высота к осн. $MC$ в $\triangle MNC$, то $\triangle MNC$ — р/б с осн. $MC$, т.е. $CN = MN$;

5) т.к. $BN$ — биссектр. к осн. $AC$ в $\triangle ABC$, то $\frac{CN}{AN} = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BM+MA} = \frac{BC}{2BC} = \frac{1}{2}$, т.е. $AN = 2 \cdot CN$;

6) Пусть $K \in AN$, $AK = KN$, тогда $MK$ — ср. линия в $\triangle BAN$, где $MK \parallel BN$;

7) $AK = KN = \frac{1}{2} AC = CN = MN$;

т.к. $MK \parallel BN$, то $\angle MKN = \angle BNC$;

Т.к. $\triangle MNK$ – р/б с осн. $MK$, то $\angle MKN = \angle KMN =$
$= \angle BNC$;

8) $AC < AB + BC$;

$AB < AC + BC$;

$AB + BC + AC = 1200$;

$3 \cdot (BC + CN) = 1200$; $BC + CN = 400$; $CN = 400 - BC$;

$3 \cdot CN < 3 \cdot BC$; $CN < BC$;

$2 \cdot BC < 3 \cdot CN + BC$;

$3CN > BC$; $CN > \frac{BC}{3}$;

$400 - BC < BC$; $BC > 200$;

$400 - BC > \frac{BC}{3}$;

$400 > \frac{4 \cdot BC}{3}$;

$BC < \frac{1200}{4} = 300$;

$200 < BC < 300$; тогда

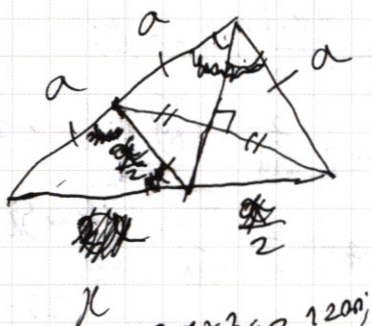
$BC$ может принимать $299 - 201 + 1 = 99$ различных значений, т.е. может быть 99 различных треугольников, удовлетворяющих условию задачи;

Ответ: 99

$\cancel{(2x-1)(x+1)}$

$(2x+1)(x-1) \le ax+b \le x+|2x-1|$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.



$4a < 1200 < 6a$

$a > 200$
$a < 300$

$200 < b < 900$

$3x+3a=1200;$

$x+a=400$

$3a > 3x > a;$

$x < a;$

$a > x > \frac{a}{3}$

$a > 400-a > \frac{a}{3}$

$2a > 400 > \frac{4a}{3}$

$a < 3x < 3a$

$b+3a=1200;$

$1200-3a$

$\cancel{1{,}5a+3a=1200;}$

$\cancel{4{,}5a=1200;}$

$\cancel{a = \frac{1200 \cdot 2}{9}}$

$a < b < 3a$

$b+3a=1200$

$a < 1200-3a < 3a$

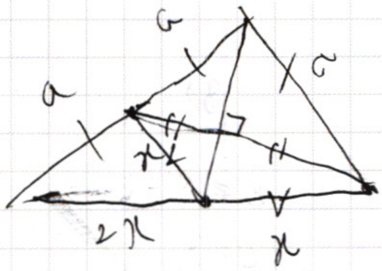
$4a < 1200 < 6a$

$a > 200$
$a < 300$

$a < 300$

$a > 200$

$300 > x > \frac{200}{3}$



$(3x)^2 + a^2 = 4a^2$

$9x^2 = 3a^2$

$3x^2 = a^2$

$\cancel{\frac{a}{x} = \frac{1{,}5x}{2a}}$

$\cancel{2a^2 = 1{,}5x^2}$

$\cancel{\frac{4}{3}a^2 = x^2;}$

$\cancel{x = \frac{2}{\sqrt{3}}a;}$

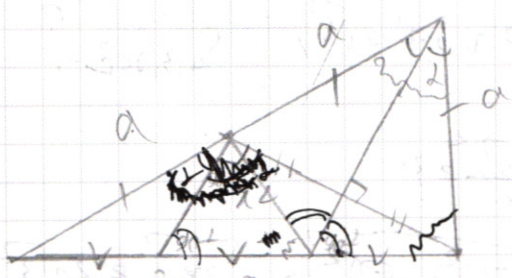
$\cancel{\frac{a}{x} \frac{a}{2}}$

$\frac{2x}{a} = \frac{2a}{3x};$

$6x^2 = 2a^2;$

$3x^2 = a^2;$

$a = \sqrt{3}x;$



$\frac{x}{a} = \frac{a}{3x}$

$3x+3a=1200;$

$x+a=400;$ $(1+\sqrt{3})x=400;$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{ED}{BD} = \frac{CD}{AD}$;

$AD = \frac{CD \cdot BD}{ED} = \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{5x \cdot 8x}{2} = 20x^2$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{89}} \cdot \sqrt{89}\, x \cdot 8x = 20x^2$;

$BD = 3$

$BE = \sqrt{6}$;

$ED = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$;

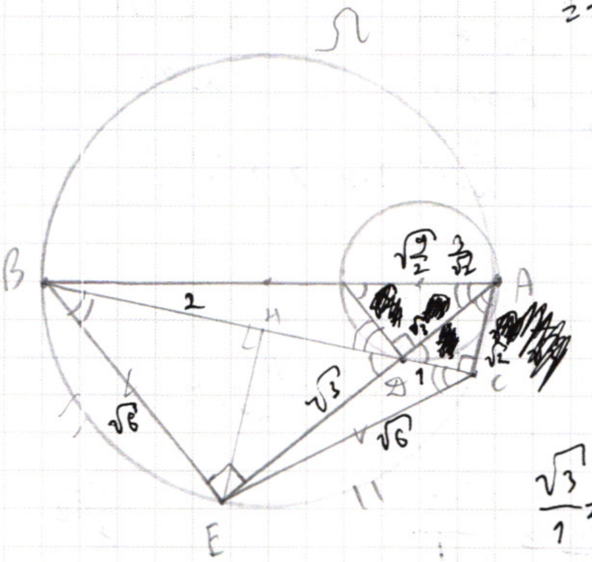
$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{89}} \cdot \frac{15x}{\sqrt{89}} \cdot 3x = \frac{1}{2} \cdot \frac{75 \cdot 3}{89} \cdot x^2$;

$\cancel{AD = \frac{3}{\sqrt{3}}}$

$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\sqrt{3 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$S_{\triangle AEC} - S_{\triangle AED} = \frac{x^2}{89} \cdot \left(300 - \frac{75 \cdot 3}{2}\right) = \frac{x^2}{89} \cdot \left(\frac{600 - 225}{2}\right) = \frac{x^2 \cdot 375}{2 \cdot 89}$




$2 + 4^2 = 18$

$\sqrt{18}$ $3\sqrt{2}$

$BC = 4$;

89

$CD = 1$;

$BD = 3$;

$O_1A - ?$

$O_2A - ?$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2}{AD}$;

$AD = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\triangle BHE \sim BED$;

$\frac{BE}{BD} = \frac{BH}{BE}$; $BE = \sqrt{BD \cdot BH} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$;

$S_{\triangle BACE} - ?$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{AD}$;

$S_{\triangle BEC} = \frac{(\sqrt{6})^2}{2} = 3$;

$BC = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2; \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

$D=(5a)^2-4\cdot 4a^2=$

$=25a^2-16a^2=$

$=9a^2;$

$\cancel{(2x+y)^2}$

$b=\frac{5a\pm 3a}{2};$

$x(y-2)-(y-2)$

$$\left[\begin{array}{l} b=4a, \\ b=a; \end{array}\right.$$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=(x-1)(y-2) \\ (x-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \\ y\geq 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-4a)(b-a)= \\ =0 \\ 2a^2+b^2=3 \\ y\geq 2x \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a \end{array}\right.$$

$2a^2+b^2=3$

$a=(x-1)$

$b=(y-2)$

$2a^2+16a^2=3;$

$a^2=\frac{3}{18};$

$a^2=\frac{1}{6};$

$3a^2=3$

$$\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$$

$b-2a=$

$=y-2-2(x-1)=y-2x$

$$\begin{cases} (b-2a)^2=ab \\ 2a^2+b^2-3=0 \\ y\geq 2x \end{cases};$$

$$\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \\ y\geq 2x \end{cases}$$

$\cancel{3-5ab+2a=0};$

$$\begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ 2a^2+b^2=3; \end{cases}$$

$x = \frac{\sqrt{6}+6}{6}$; $y = \frac{4\sqrt{6}+12}{6}$;

№2

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3 = 0$;

$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 3 = 0$;

$2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{16}{6} + 3 = 0$


$a < c < 3a$

$3a + c = 1200$

$\frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

$\sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

$a, c \in \mathbb{Z}$

$c \vdots 3$

$(y-2)(x-1)$

$S_{\triangle AED}$

$\frac{4\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{4 \cdot 6}{30} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

$a < 1200 - 3a < 3a$

$1200 > 4a$

$5a = 1200$

$a = 240$

$1200 < 6a$

$\sqrt{(3x)^2 + (8x)^2} =$

$= x\sqrt{25+64} = x\sqrt{89}$;

$a > 200$

$a < 300$

~~$S_{\triangle BDC} + S_{\triangle BED} + S_{\triangle AED} = S$~~

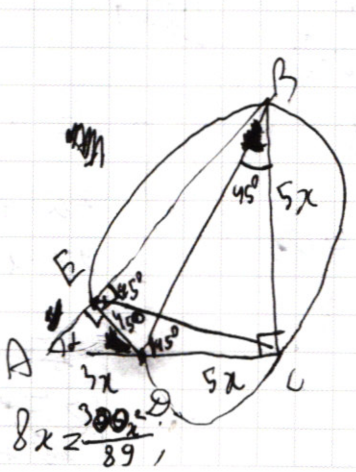
$S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BED} - S_{\triangle EBC} = S_{\triangle DEC}$

$600 < c < 900$

$\cancel{\frac{y}{8x}}$

$AE = \sin\angle \cdot 3x =$

$= \frac{15x}{\sqrt{89}}$;




$\frac{5}{8}$

$8x = AC = \sqrt{29}$

$S_{\triangle CED} - ?$

$S_{\triangle AEC} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sin\angle \cdot AE \cdot AC =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{89}} \cdot \frac{15x}{\sqrt{89}} \cdot 8x = \frac{300x^2}{89}$;

$\sin\angle = \frac{5x}{x\sqrt{89}} = \frac{5}{\sqrt{89}}$;

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

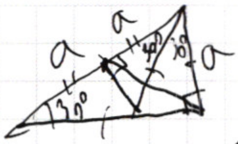
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

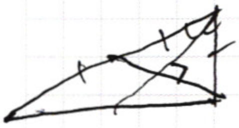



(a) (b) (c)

$3a+\sqrt{3}a=1200$

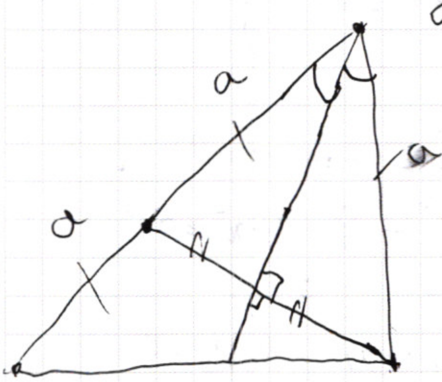
$\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$

$a \quad a\cdot d \quad a\cdot d^2 \quad a\cdot d^3$



$ax^2+2\cdot a\cdot d\cdot x+ad^2=0;$

$a\cdot d^2\cdot d^6+2a^2d^4+ad^2=0;$



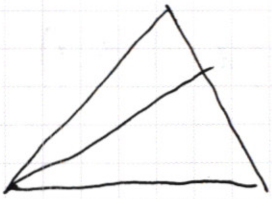

$a^3\cdot d^6+2a^2d^4+ad^2=0;$

$ad^2(a^2d^4+2ad^2+1)=0;$

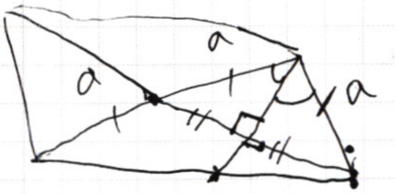
$a^2d^4+2ad^2+1=0;$

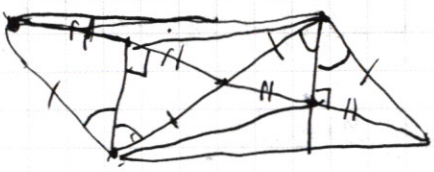
$c^2+2c+1=0;$

~~$D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$~~;



$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ d=0 \end{array}\right.$



$3a>b>a$

$a>200$

$a<300$

$3a+b=1200$

$a<b<3a$

$a<1200-3a<3a$

$4a<1200<6a$

$2a<600<3a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y\geq 2x \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2+2x+y-2-5xy=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2+2x+y-xy-2=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2-8+3+x^2=0 \end{cases};$$

$x(2-y)-(2-y)=0$

$+(x-1)(2-y)$

$(y-2x)^2=x(y-2)-(y-2)$

$(y-2x)^2=(x-1)\cdot(y-2)$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y-2x)^2+4xy-2x^2-4x-4y+3=0;$

$\cancel{(y^2-4xy+4x^2)}$

$(x-1)(y-2)+4xy-2x^2-4x-4y+3=0;$

$xy-2x-y+2+4xy-2x^2-4x-4y+3=0;$

$5xy-6x-5y+5-2x^2=0;$

$x(5y-2x)-(5y-2x)-8x+5=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)