МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, в и c — первый, второй и третий члены геометрической прогрессии.
Следовательно $b = aq$, $c = aq^2$, где $q \neq 0$.

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \rightarrow x - \text{любое число} \\ x = -q \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} aq^3 = 0 \\ aq^3 = -q \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} aq^3 = 0 \\ q(aq^2+1) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} aq^3 = 0 \\ aq^2 = -1 \end{array}\right.$, т.к. $q \neq 0$.

Значит третий член геом. прогр. $\left[\begin{array}{l} aq^2 = -1 \\ aq^2 = 0 \text{, если } a = 0 \end{array}\right.$

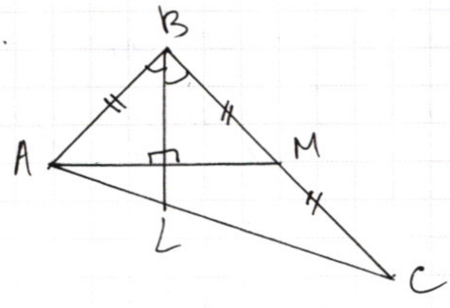
Ответ: 0; -1

№2.

$P = 1200$

BL — биссектриса

AM — медиана

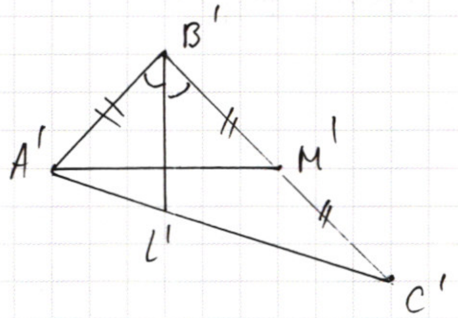


$BL \perp AM$

Тогда в $\triangle ABM$: BL – бисс. и высота. $\Rightarrow$ BL – медиана
$\triangle ABM$ – равнобедренный

$AB = BM = \frac{1}{2} BC$

Теперь рассмотрим треугольник, в котором $A'B' = \frac{1}{2} B'C'$



Проведём биссектрису $B'L'$ и медиану $A'M'$

Тогда $B'L'$ – высота в $\triangle A'B'M'$, т.к. он равнобедренный и $B'L'$ – бисс.

Значит $B'L' \perp A'M'$ $\Rightarrow$ одна из бисс перпендикулярна одной из медиан

Следовательно, в треугольнике одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан тогда и только тогда, когда одна из сторон в 2 раза меньше другой.

Тогда длины сторон можно обозначить как $x, 2x$ и y

$P = x + 2x + y = 3x + y = 1200$

$y = 1200 - 3x = 3(400 - x)$

По условию x и y – целые числа.

Чтобы y являлось целым числом, $(400 - x)$ должно являться целым числом. $\Rightarrow$ $x = \{1; 2; 3 \dots 399\}$ т.к x и y также числа больше 0 (т.к это стороны треугольника)

Значит, треугольников, удовлетворяющих условию, существует 399

Ответ: 399

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$

$a=y-2$
$b=x-1$ → замена

$y-2x=a+2-2(b+1)=a+2-2b-2=a-2b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 2b^2+a^2-3=0 \end{cases}$$

Условие: $a-2b\geqslant 0$
$a\geqslant 2b$

ОДЗ: $ab\geqslant 0$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ 2b^2+a^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab \\ 2b^2+a^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2+a^2-5ab=0 \\ 2b^2+a^2-3=0 \end{cases}$$

Вычтем из первого второе

$2b^2-5ab+3=0$

$2b^2+3=5ab$

$$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=\frac{2b^2+3}{5b} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\cdot 2\cdot 0=0,\ b=0 \\ a=\frac{2b^2+3}{5b} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=0,\ b=0 \text{ — противоречие со вторым уравнением} \\ a=\frac{2b^2+3}{5b} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a=\frac{2b^2+3}{5b} \\ a^2=3-2b^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{2b^2+3}{5b}\right)^2=3-2b^2$$

$$\frac{(2b^2+3)^2}{25b^2} = 3-2b^2$$

$$4b^4+12b^2+9 = 75b^2-50b^4$$

$$54b^4-63b^2+9=0$$

$$6b^4-7b^2+1=0$$

$t=b^2$, $t \geq 0$

$$6t^2-7t+1=0$$

$$6(t-1)(t-\frac{1}{6})=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=\frac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b=\pm 1 \\ b=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

1) $b=1$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot1+3}{5}=1$$

$a-2b=1-2\cdot1=-1<0$ противоречие с условием

2) $b=-1$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot1+3}{-5}=-1$$

$$a-2b=-1-2(-1)=1>0$$

$ab=(-1)\cdot(-1)=1>0$ подходит

3) $b=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot\frac{1}{6}+3}{5\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}}=\frac{2+18}{5\sqrt{6}}=\frac{20}{5\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$a-2b=\frac{2\sqrt{6}}{3}-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}>0$$

$$ab=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}>0$$

подходит

4) $b=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot\frac{1}{6}+3}{-5\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}}=\frac{20}{-5\sqrt{6}}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$a-2b=-\frac{2\sqrt{6}}{3}-\left(-\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}<0$$

противоречие.

Следовательно:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ b=\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\cancel{\frac{2\sqrt{6}}{3}+1}\ \frac{\sqrt{6}}{6}+1 \\ y=\frac{2\sqrt{6}}{3}+2 \end{cases} \end{array}\right.$$

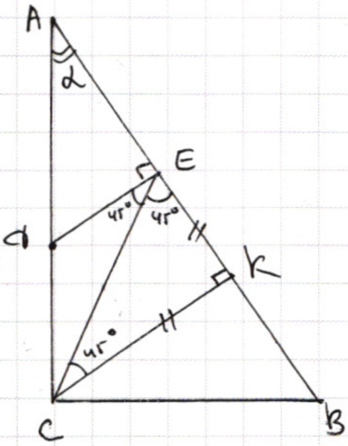
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№4.~~

Ответ: $(0;1)$; $\left(\frac{\sqrt6}{6}+1;\ \frac{2\sqrt6}{3}+2\right)$

№4.

а)



$AФ : AC = 3:5$

$ФE \perp AB$

$\angle CEФ = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 45^\circ$

1. Опустим из т. C высоту на гипотенузу AB.

2. $\triangle CEK$ – прямоугольный
$\angle ECK = 90^\circ - \angle CEK = 45^\circ \Rightarrow \triangle CEK$ – равнобедр.
$CK = EK$

~~$\triangle AФE \sim \triangle ACK$~~ 3. $\triangle AФE \sim \triangle ACK$ (по двум углам)

$$\frac{AФ}{AC} = \frac{AE}{AK} = \frac{ФE}{CK} = \frac{3}{5} \Rightarrow AE = \frac{3}{5}AK \Rightarrow EK = \frac{2}{5}AK$$

4. $$tg\alpha = \frac{CK}{AK} = \frac{EK}{AK} = \frac{\frac{2}{5}AK}{AK} = \frac{2}{5}$$

б) $AC = \sqrt{29}$

5. $$tg\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot tg\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{29}$$

6. т. Пифагора $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 29 + 29\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 29\left(1+\frac{4}{25}\right) =$
$= 29\cdot\frac{29}{25} \Rightarrow AB = \frac{29}{5}$

7. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} CK \cdot AB$

$\Downarrow$

$$CK = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29}}{\frac{\sqrt{29}}{5}} = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$$

$CK = EK = 2$

$AK = \frac{5}{2} EK = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$

$AE = \frac{3}{5} AK = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$ $\Big\} \Rightarrow$ из п. 3.

?. $S_{A\Phi E} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \Phi E = \frac{1}{2} AE \cdot AE \cdot tg\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$

$S_{CEK} = \frac{1}{2} EK \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

$S_{ACK} = \frac{1}{2} CK \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$

$S_{CE\Phi} = S_{ACK} - S_{A\Phi E} - S_{CEK} = 5 - 2 - 1,8 = 1,2$

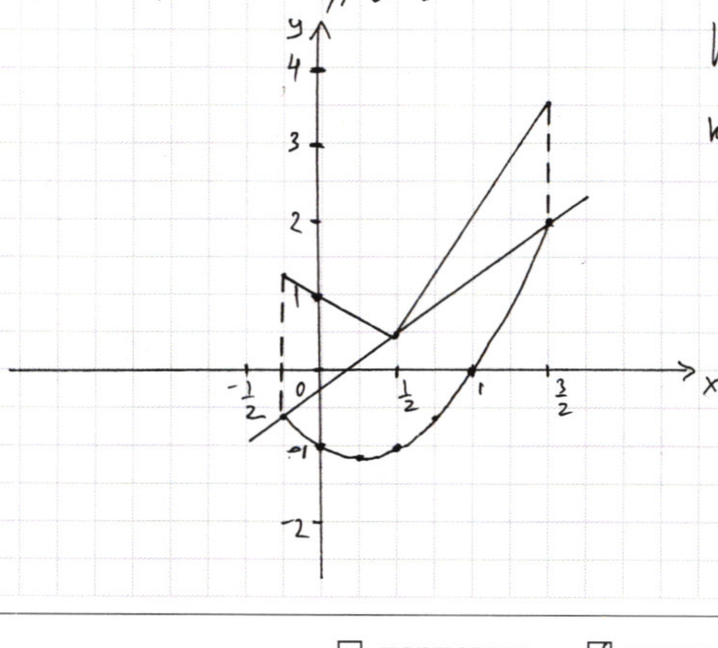
Ответ: $tg\alpha = \frac{2}{5}$; $S = 1,2$

№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$, $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

Построим графики $f(x) = 2x^2 - x - 1$ и $g(x) = x + |2x-1|$

на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$



Проведём прямую через концы параболы

~~Назовём это пря~~

Пусть это будет прямой

$a'x + b'$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Прямая $ax+b$ должна проходить ниже графика $g(x)$ и выше графика $f(x)$ на всём промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

Прямая $ax+b$ не может проходить ниже прямой $a'x+b'$, т.к. в таком случае будет пересекать параболу, но и выше этой прямой тоже проходить не может т.к. прямая $a'x+b'$ касается графика $g(x)$ и в таком случае прямая будет пересекать его.

Значит прямые $(ax+b)$ и $(a'x+b')$ совпадают. Это единственный возможный случай.

Прямая проходит через точки $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

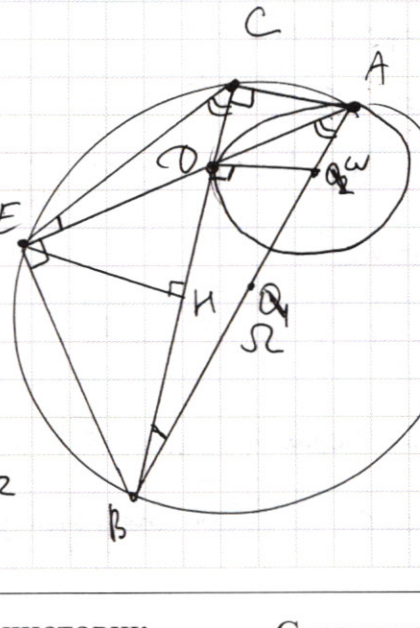
$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a+b=2 \\ \frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad a=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

№5.



BC — касательная к окружности ω

O — точка касания

$CO=1$

$BO=3$

Обозначим радиусы окружностей r и R

Т. Пифагора $\Delta\,\omega O B$: $r^2+3^2=(2R-r)^2$

$r^2 + 9 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 9 = 4Rr$

$r = \frac{4R^2 - 9}{4R} = R - \frac{9}{4R}$

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. угол опирается на диаметр.

$\triangle CBA \sim \triangle \Phi B\omega$ (по двум углам): $\frac{B\Phi}{BC} = \frac{B\omega}{BA} = \frac{\Phi\omega}{CA}$

$\frac{3}{3+1} = \frac{2R - r}{2R}$

$\frac{3}{4} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R}$

$\frac{r}{2R} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$2R = 4r$

$\begin{cases} R = 2r \\ r = R - \frac{9}{4R} \end{cases} \Rightarrow r = 2r - \frac{9}{4 \cdot 2r} \Rightarrow \frac{9}{8r} = r$

$8r^2 = 9$

$r^2 = \frac{9}{8}$

$r = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$R = 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

т. Пифагора $\triangle ABC$:

$4R^2 = AC^2 + 4^2$

$AC^2 = 4R^2 - 16 = 4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} - 16 = 18 - 16 = 2$

$AC = \sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Опустим перпендикуляр EH из точки E на сторону CB.

$\triangle EH\Phi \sim \triangle AC\Phi$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{EH}{AC} = \frac{E\Phi}{A\Phi}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle E\Phi C \sim \triangle B\Phi A$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{E\Phi}{\Phi A} = \frac{C\Phi}{}$

$\frac{E\Phi}{B\Phi} = \frac{C\Phi}{\Phi A}$

$\frac{E\Phi}{3} = \frac{1}{\Phi A}$

$E\Phi \cdot \Phi A = 3$

т. Пифагора $\triangle AC\Phi$:

$A\Phi^2 = AC^2 + C\Phi^2$

$A\Phi^2 = 2 + 1 = 3$

$A\Phi = \sqrt{3}$

$E\Phi \cdot \Phi A = 3$

$E\Phi = \frac{3}{\Phi A} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\frac{EH}{AC} = \frac{E\Phi}{\Phi A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

$EH = AC = \sqrt{2}$

$S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

~~S_{BECA}~~ $S_{BACE} = S_{BEC} + S_{ABC} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $4\sqrt{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

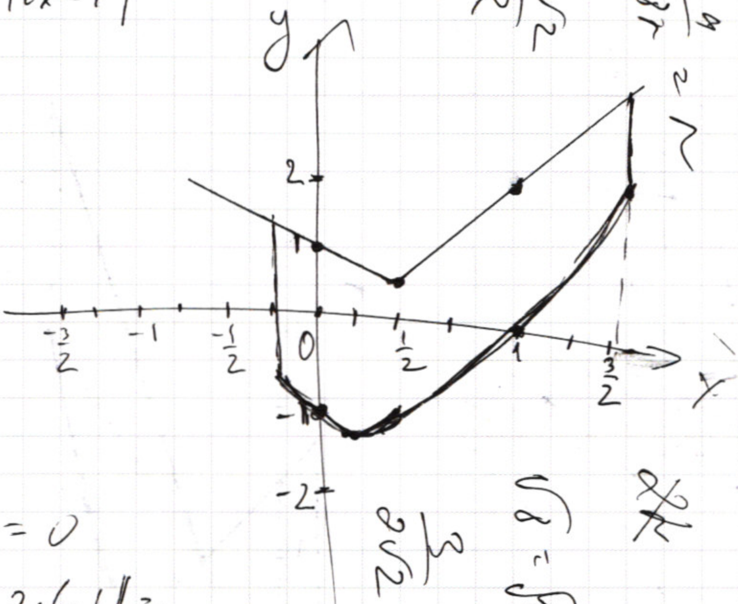
$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

$g(x) = x + |2x-1|$

$h(x) = ax + b$



x	y
0	-1
1	0
-1	2
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$
$\frac{3}{2}$	2
$-\frac{1}{2}$	0

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$\frac{1 \pm 3}{4}$

$\frac{1+3}{4} = 4$

$\frac{1-3}{4} = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

$-\frac{9}{8}$

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1$

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = \frac{1}{8} - \frac{10}{8} = -\frac{9}{8}$

$2)\ \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\frac{9}{8r} = r$

$r = 2r - \frac{9}{8r}$

$2r - \frac{9}{8r}$

$\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$\frac{1}{4}$.

$\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$x + |2x - 1|$

$x + 2x - 1 = 3x - 1$

$x - 2x + 1 = 3x + 1$

$3 - 1{,}8$

$5 - 2 - 1{,}8 = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$

$\frac{\alpha E}{AE} = \operatorname{tg} 2$

$\alpha E = \operatorname{tg} 2 \cdot AE = \frac{2}{3}\cdot 3 = \frac{6}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|2x-1|+x$

$2x-1 \geq 0$

$x-\frac{1}{2} \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$y=2x-1+x=3x-1$

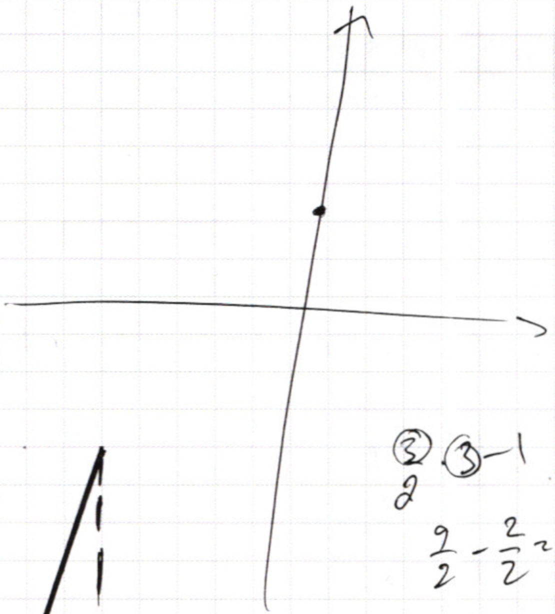
$2x-1 \leq 0$

$x-\frac{1}{2}<0$

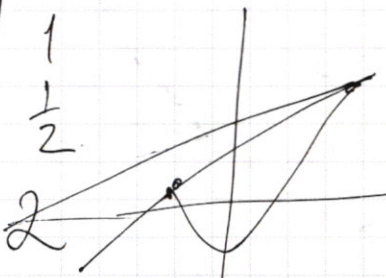
$x<\frac{1}{2}$

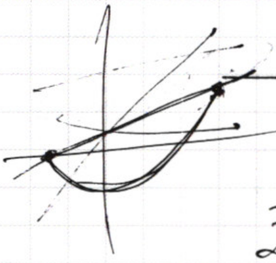
$y=-2x+1+x=$

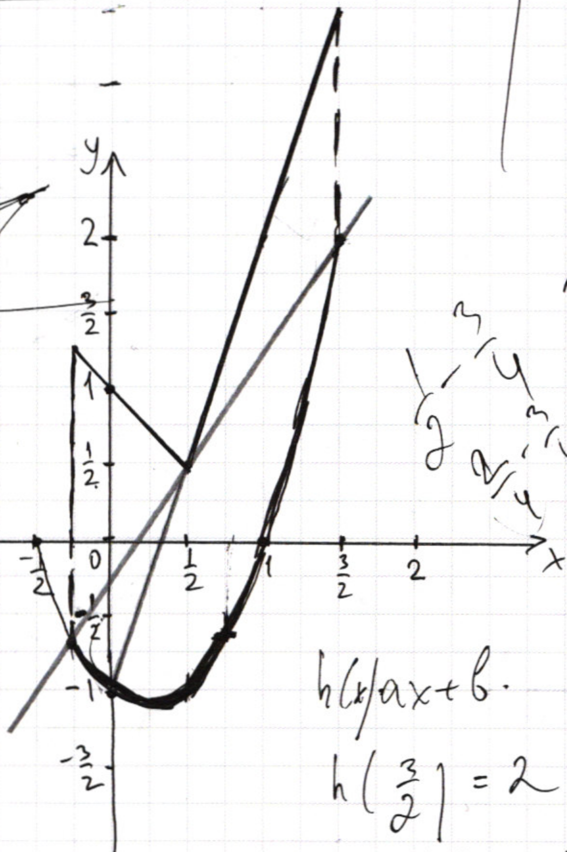
$y=-x+1$



x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2







$\frac{3}{2} \cdot 3 - 1$

$\frac{9}{2}-\frac{2}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$

$ax+b$

прямая

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$

$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{?}{2}$

$3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{2}{2}$

$\frac{7}{2}=3{,}5$

$\frac{1}{2}:4=\frac{1}{8}$

$h(x)=ax+b$

$h\left(\frac{3}{2}\right)=2$

$h\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{8}$

$a \cdot \frac{3}{2}+b=2 \quad |\cdot 2$

$3a+2b=4$

$-\frac{1}{4} \cdot a+b=-\frac{5}{8} \quad |\cdot(-8)$

$\frac{5}{8}$

$$\begin{cases} 2a-8b=5 & |\cdot 4 \\ 3a+2b=4 & |\cdot 4 \end{cases}$$

$2a-8b=5$

$12a+8b=16$

$8b=2a-5=16-12a$

$2a+12a=16+5$

$14a=21$

$a=\frac{21}{14}=\frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 2}=\frac{3}{2}$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

$8b=2a-5=2 \cdot \frac{3}{2}-5=3-5=-2$

$b=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$

$\boxed{h(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

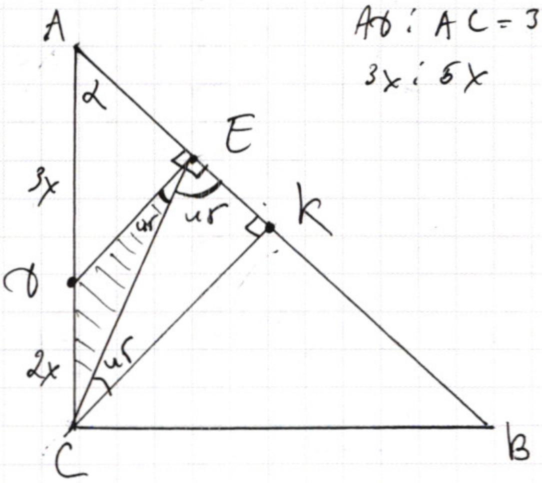
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AD : AC = 3:5$

$3x : 5x$

$\boxed{tg\,\alpha - ?}$

$\angle CED = 45^\circ$

$$tg\,\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{CK}{AK} = \frac{EK}{AK} = \frac{\frac{2}{5}AK}{AK} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$\cancel{\frac{AE}{4}}$ $\frac{AE}{AK} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$EK = \frac{2}{5}AK$ $AE = \frac{3}{5}AK$

$AK = \frac{5}{2}EK$

~~BC =~~

$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$

б) $AC = \sqrt{29}$.

$S_{CED} - ?$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

$\frac{DE}{CK} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$\frac{4}{25} + 1 = \frac{4}{25} + \frac{25}{25}$

$DE = \frac{3}{5}CK = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$\frac{29}{25}$

$1 + \frac{4}{25} = \frac{25+4}{25} = \frac{29}{25}$

$BC = AC \cdot tg\,\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + (\tfrac{2}{5}\sqrt{29})^2} = \sqrt{29 + (\tfrac{2}{5})^2 \cdot 29} =$$

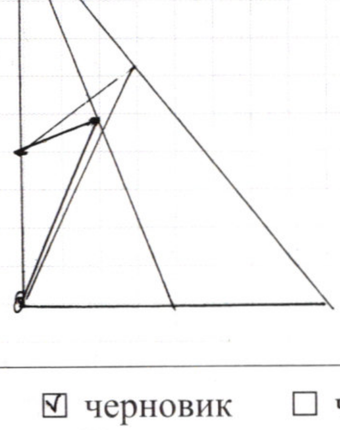
$(\frac{2}{5})^2 (AC)^2$

AC

$$= \sqrt{29}\sqrt{1 + (\tfrac{2}{5})^2}$$

$$\sqrt{29}\sqrt{1 + \tfrac{4}{25}}$$

$$\sqrt{29} \cdot \sqrt{\tfrac{29}{25}} = \frac{\sqrt{29}\sqrt{29}}{5} = \frac{29}{5}$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} Ck \cdot AB$

$Ck = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29 \cdot 5}}{29} = \frac{2}{5} 5 = 2 = Ek;\ Ak = 5$

$AE = 3$

$S_{A\Phi E} = \frac{AE \cdot \Phi E}{2} = \frac{3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$

$S_{EkC} = \frac{Ek \cdot Ck}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$S_{AkC} = \frac{Ak \cdot kC}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

$S_{E\Phi C} = \underbrace{5 - 2}_{3} - 1{,}8 = 3 - 1{,}8 = 1{,}2$

$a = y - 2$

$b = x - 1$

$\boxed{\begin{cases} x = b + 1 \\ y = a + 2 \end{cases}}$

$x = -1 + 1$

$y = -1 + 2 = 1$

$\frac{2\sqrt{6}}{3} + 2$

$\frac{2\sqrt{6}}{3} + 1$

$\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\frac{\sqrt{6}}{6} + 1$

$y - 2 = a$

$x - 1 = b$

$y(xy - x - y + 2)$

$(y-2)(x-1)$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 - 3 = 0 \end{cases}$

$a = -1$

$b = -1$

$-1 + 2 = \sqrt{(-1)^2}$

$1 = 1$

$1 + 2 - 3 = 0$

$\frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\frac{4\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}}{3 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 6}{9} = \frac{8}{3}$

$2 \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{6 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$

$2b$

$a^2 = 3 - 2b^2$

$\frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{3 \cdot 3} = \frac{8}{3}$

$\frac{2}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$(y-2x)^2 = xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-4xy = xy-2x-y+2$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$y-2x = xy-2x-y+2$

$xy-2x-y+2 = y(x-1)-2(x-1)$

$(y-2)(x-1)$

$(y-2x) = \sqrt{(y-2)(x-1)}$

$(y-2)(x-1) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ y<2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$x^2+y^2+x^2-4x-4y+3=0$

2 1

x^2-2x+1

$+$

$2+4=6$

x^2-2x+1

$+$

y^2-4x+4

$(x-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

a, b, c — геом. прогрессия

$ax^2+2bx+c=0$

$a \quad b \quad c$

$a \quad aq \quad aq^2 \qquad aq^3$ — корень уравнения

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$ax^2+2aqx+aq^2=0 \quad |:a$

$x^2+2qx+q^2=0$

$(x+q)^2=0$

$(x+q)(x+q) = x^2+xq+xq+q^2 = x^2+2qx+q^2$

$\boxed{x=-q}$

$aq^3=-q$

$aq^3+q=0$

$q(aq^2+1)=0$

$q \neq 0$

$aq^2+1=0$

$\boxed{aq^2=-1}$

Ответ: -1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

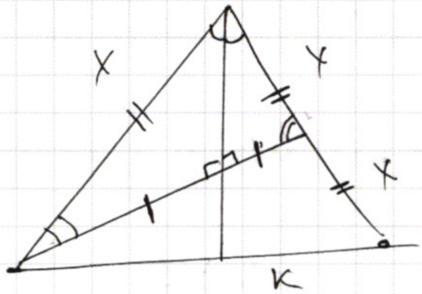
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$P = 1200 = a + b + c$

a, b, c — стороны

$a, b, c \in \mathbb{Z}$



$k = 3n$

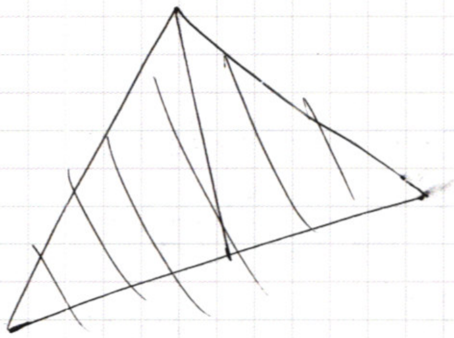
$x + 2x + k = 1200$

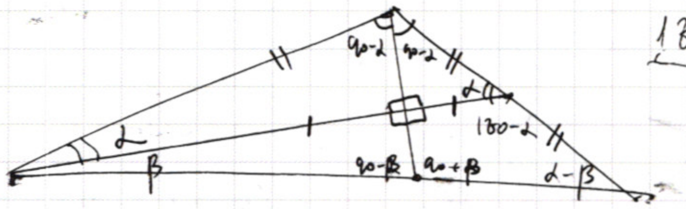
$3x + k = 1200$

$k = 1200 - 3x = 3(400 - x)$

$3n = 3(400 - x)$

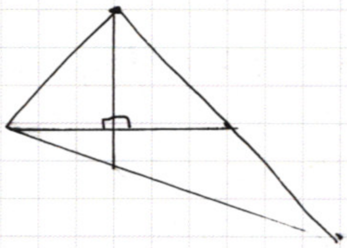
$n = 400 - x$

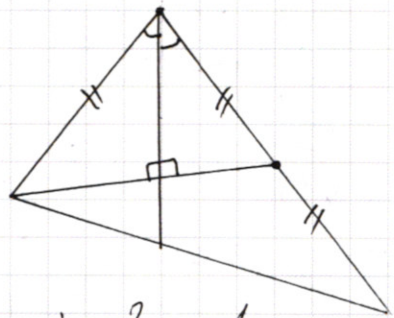




$\underbrace{180 - 90 + \alpha - 90}_{} + \underbrace{\alpha - \alpha}_{} - \beta$

$\alpha - \beta$





любой треугольник — в котором стороны x, $2x$ и k.

$x + 2x + k = 1200$

$3x + k = 1200$

$k = 1200 - 3x = 3(400 - x)$

$k \vdots 3$

$k \neq 0.$

$(400 - x)$ — ~~целое число.~~ натуральное число

$x = \{1; \dots 399\} \longrightarrow 399$ вариантов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$y \geq 2x$

$(y-2x)^2=y^2+4x^2-4xy$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-0-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$2x^2+6x-5xy+5y-5=0$

$2x^2+6x-5y(x-1)-5=0.$

$y-2=a$

$x-1=b.$

$y=a+2$

$x=b+1$

$y-2x=a+2-2(b+1)=$

$=a+2-2b-2=a-2b$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=$

$a \cdot b = 0.$

$a-2b=\sqrt{2b}$

$2(b+1)^2+(a+2)^2-4(b+1)-4(a+2)+3=0.$

$2(b^2+2b+1)+(a^2+4a+4)-4b-4-4a-8+3=0$

$2b^2+4b+2+a^2+4a+4-4b-4-4a-8+3=0$

$$\begin{cases} 2b^2+a^2-3=0 \\ a-2b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$(a-2b)^2=ab$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2+4b^2-5ab=0$

$$\begin{cases} 2b^2+a^2-3=0 \\ a^2+4b^2-5ab=0 \end{cases}$$

$2b^2-5ab+3=0$

$2b^2+3=5ab$

$\frac{2b^2+3}{5b}=a$

$2b^2-5ab+3=0$

$2b^2+3=5ab.$

$\frac{2b^2+3}{5b}=a$

$b \neq 0,\ b=0,$

$a=$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}$$

$$\begin{cases}2b^2+a^2-3=0\\ a-2b=\sqrt{ab}\end{cases}$$

$$a^2=3-2b^2$$

$$\frac{8\sqrt6}{3}\cdot\frac{\sqrt6}{63}$$

$$\left(\frac{2b^2+3}{5b}\right)^2=3-2b^2$$

$\cancel{1-2+1}=1$

$12-75$

75

12

63

$-1-2\cdot(-1)$

$-1+2=1$

$$\frac{(2b^2+3)^2}{25b^2}=3-2b^2$$

$$4b^4+12b^2+9=75b^2-50b^4$$

$$54b^4-63b^2+9=0$$

$$6b^4-7b^2+1=0$$

$$6t^2-7t+1=0$$

$$6-7+1=0$$

$$\cancel{t^2}=\quad t=1$$

$$6(t-1)\left(t-\frac16\right)=0$$

$$6\left(t^2-\frac16t-t+\frac16\right)$$

$$6t^2-t-6t+1$$

$$6t^2-7t+1$$

$$\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{20}{-5\sqrt6}=\frac{\cancel{20}\,4}{-\sqrt6}=-\frac{4\sqrt6}{6}=-\frac{2\sqrt6}{3}$$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac16\end{array}\right.\qquad b^2=1\qquad b^2=\frac16$$

$$b=\pm1$$

$$b=\pm\frac{1}{\sqrt6}=\pm\frac{\sqrt6}{6}$$

$$\left(\frac{\sqrt6}{\cancel{6}}\right)^2$$

$$\frac{2\sqrt6}{3}-\frac{2\cdot\sqrt6}{63}=$$

$$=\frac{2\sqrt6}{3}-\frac{\sqrt6}{3}=\frac{\sqrt6}{3}$$

$$a^2=3-2b^2$$

$$\cancel{a^2}=$$

~~$a=1$, $b=1$~~

$a=-1$, $b=-1$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot1+3}{5\cdot1}=\frac55=1$$

$5\cdot6=18$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot1+3}{5\cdot(-1)}=\frac{5}{-5}=-1$$

$$a=\frac{2b^2+3}{5b}=\frac{2\cdot\frac16+3}{5\cdot\frac{\sqrt6}{6}}=\frac{2+18}{5\sqrt6}=\frac{20}{5\sqrt6}=\frac{4}{\sqrt6}=\frac{4\sqrt6}{6}=\frac{2\sqrt6}{3}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

если $p = 2$

$f(2) = [\frac{2}{2}] = [1] = 1$

если $p \neq 2$, $p = 2k+1$

$f(p) = f(2k+1) = [\frac{2k+1}{2}] = [k + \frac{1}{2}] = k$

$f(ab) = f(a) + f(b) = f(\ldots) + f(\ldots) + f(b) \ldots =$

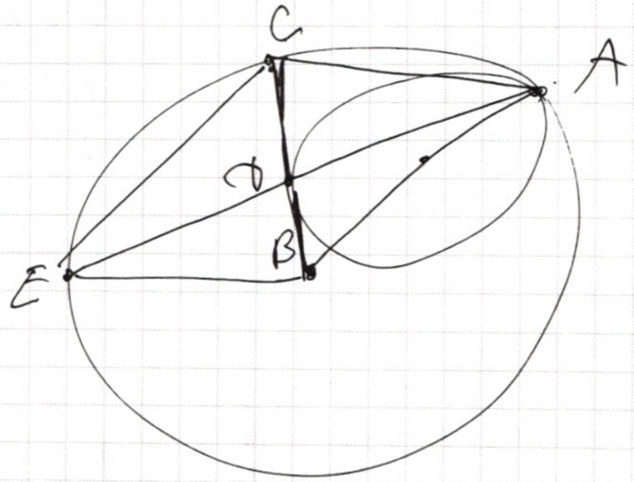
$= \underbrace{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}_{\text{все множители}}$

$1 \leq x \leq 21$

$1 \leq y \leq 21$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = 0.$

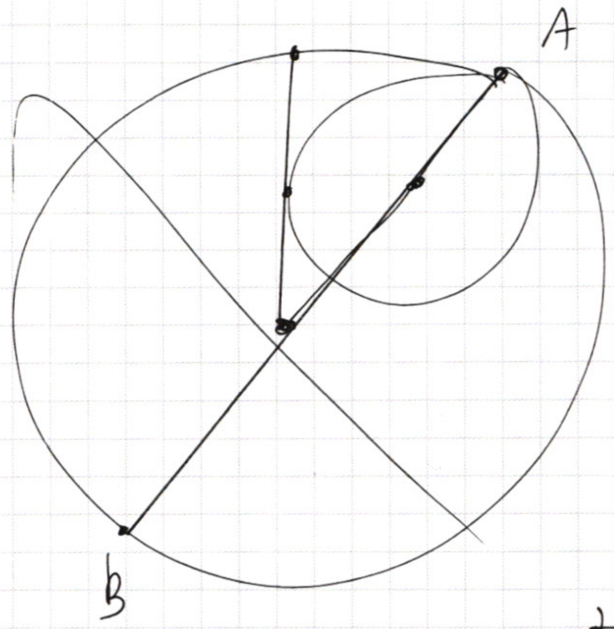


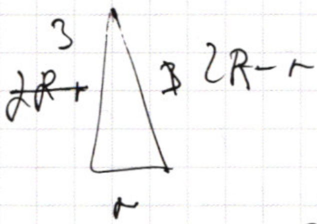
☑ черновик ☐ чистовик

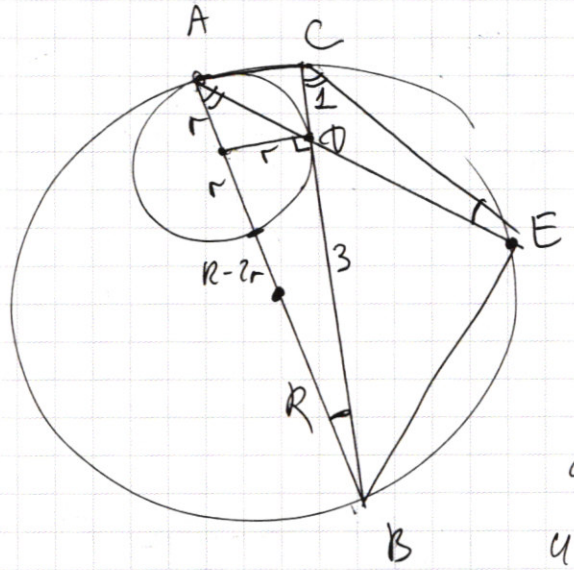
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)







$\cancel{(2R-r)^2 + r^2 = 3^2}$

$3^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$R + R - 2r + r$

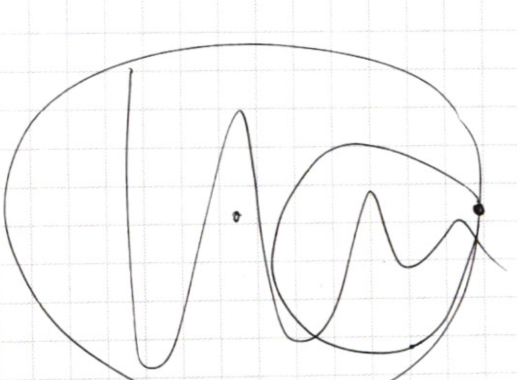
$2R - r$

$9 + r^2 = 4R^2 + r^2 - 4Rr$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 9 = 4Rr$

$r = \frac{4R^2 - 9}{4R} = \boxed{R - \frac{9}{4R}}$



AO =