## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Пусть знаменатель прогрессии равен $q$. Из условия $\begin{cases} q\neq 0 \\ a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0 \end{cases}$

Тогда если первый член прогрессии равен $a$, то второй ($b$) равен $qa$, а третий ($c$) равен $q^2a$.

Тогда ур-е $ax^2+2bx+c=0$ принимает вид

$$ax^2+2qax+q^2a=0$$

4-й член прогрессии ($q^3a$) является корнем этого ур-я, т.е.

$$a\cdot(q^3a)^2+2qa(q^3a)+q^2a=0$$

$$q^6a^3+2q^4a^2+q^2a=0$$

$$q^2a(q^4a^2+2q^2a+1)=0$$

$$q^2a(q^2a+1)^2=0$$

$\left[\begin{array}{l} q^2a=0 \\ q^2a=-1 \end{array}\right.$ $q^2a=c \Rightarrow$ это и есть возможные значения третьего члена прогрессии. (0 и $-1$)

Заметим, что $q^2a=0$ не удовл. условию $\begin{cases} q\neq 0 \\ a\neq 0 \end{cases}$, т.к. если $q^2a=0$, то хотя ~~бы~~ одно из чисел $a;q$ равно 0 $\left(\left[\begin{array}{l} a=0 \\ q=0 \end{array}\right.\right)$, т.е. $q^2a=0$ не подходит. $\Rightarrow \boxed{q^2a=-1}$

Ответ: $-1$

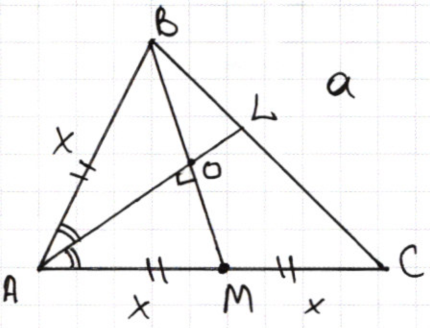
№2

Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$ с указанными свойствами

AL - бис-са ∠BAC ($L \in BC$) и $AL \perp BM$

BM - медиана ($M \in AC$)

O - т. пересечения AL и BM




в △ABM AO - высота и бис-са,

значит △AMB р/б, т.е. $AM = AB$.

∃ $AM = x$. Тогда $AB = x$, $AC = 2x$. ∃ $BC = a$

Заметим, что, определив одну сторону △-ка, мы сразу определяем все остальные, т.к. мы знаем, что $2AB = AC$, а $AB + AC + BC$ – фиксированная сумма (P)

периметр △ABC

Тогда найдем кол-во способов выбрать целочисленную длину стороны AB (x). Это и будет искомым количеством.

По нер-ву треугольника

$$\begin{cases} a + x > 2x \\ 3x > a \\ a + 2x > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > x \\ 3x > a \\ a > -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > x \\ 3x > a \end{cases}$$

$a > 0 \Rightarrow$ выполняется всегда

$$x < a < 3x$$

Тогда периметр P можно ограничить сверху и снизу:

$$\underbrace{3x + x}_{a_{\text{наим.}}} < 1200 < \underbrace{3x + 3x}_{a_{\text{наиб.}}}$$

$$4x < 1200 < 6x$$

$$200 < x < 300$$

$\boxed{201 \leq x \leq 299}$ Тогда кол-во таких треугольников равно кол-ву способов выбрать $x \in \mathbb{N}$ и равно $C_{99}^{1} = 99$

**Ответ:** 99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$

(2) $2x^2-4x+2+y^2-4y+4=3$

$\Updownarrow$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2=3$

$\Updownarrow$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

(1) при $y<2x$ решений у ур-я, а, следовательно, и у системы нет.

при $y\geqslant 2x$ возведём в квадрат

ур-е (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 2x \\ y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 2x \\ y^2-5xy+2x+y+4x^2-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 2x \\ y^2+y(1-5x)+(4x^2+2x-2)=0 \end{cases}$

рассмотрим квадратное ур-е относительно $y$

$y^2+y(1-5x)+(4x^2+2x-2)=0$

$D=(1-5x)^2-4(4x^2+2x-2)=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$

$=9x^2-18x+9=9(x^2-2x+1)=9(x-1)^2$

$y_{1,2}=\dfrac{5x-1\pm(3x-3)}{2}$ $\quad y_1=4x-2$ I $\quad y_2=x+1$ II

Подставим во (2) эти значения $y$

I $y=4x-2$

$2(x-1)^2+((4x-2)-2)^2=3$

$2x^2-4x+2+16(x-1)^2=3$

$2x^2-4x+2+16x^2-32x+16-3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$6x^2-12x+5=0$

$D=144-4\cdot5\cdot6=144-120=24$

$x_{1,2}=\dfrac{12\pm2\sqrt6}{12}=\dfrac{6\pm\sqrt6}{6}=1\pm\dfrac{\sqrt6}{6}$

$y=4x-2$

$x_1=1+\dfrac{\sqrt6}{6}$ $\quad y_1=4+\dfrac{2}{3}\sqrt6-2=2+\dfrac{2}{3}\sqrt6$ $\quad \left(1+\dfrac{\sqrt6}{6};\ 2+\dfrac{2}{3}\sqrt6\right)$ 1)

$x_2=1-\dfrac{\sqrt6}{6}$ $\quad y_2=4-\dfrac{2}{3}\sqrt6-2=2-\dfrac{2}{3}\sqrt6$ $\quad \left(1-\dfrac{\sqrt6}{6};\ 2-\dfrac{2}{3}\sqrt6\right)$ 2)

Проверим условие $y\geq 2x$

1) $2+\dfrac{2}{3}\sqrt6\geq\left(1+\dfrac{\sqrt6}{6}\right)\cdot2$

$2+\dfrac{2}{3}\sqrt6\geq2+\dfrac{1}{3}\sqrt6$ выполняется ✓ => это решение подходит

2) $2-\dfrac{2}{3}\sqrt6\geq\left(1-\dfrac{\sqrt6}{6}\right)\cdot2$

$2-\dfrac{2}{3}\sqrt6\geq2-\dfrac{\sqrt6}{3}$

$-\dfrac{2}{3}\geq-\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{2}{3}\leq\dfrac{1}{3}$ Не выполняется => решение $\left(1-\dfrac{\sqrt6}{6};\ 2-\dfrac{2}{3}\sqrt6\right)$ не подходит

II $y=x+1$

$2(x-1)^2+((x+1)-2)^2=3$

$2(x-1)^2+(x-1)^2=3$

$3(x-1)^2=3$ $\quad (x-1)^2=1$

$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ $\quad x_3=0 \quad y_3=1$ 3)

$x_4=2 \quad y_4=3$ 4)

Проверим условие $y\geq2x$:

3) $1\geq2\cdot0$ выполняется ✓

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) условие выполняется $\Rightarrow$ решение $(0;1)$ подходит

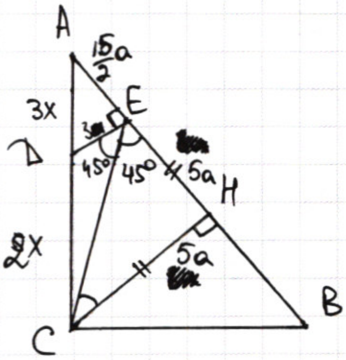
4) $3 \geqslant 2\cdot 2$ условие не выполняется $\Rightarrow$ это решение (пара $(2;3)$) не подходит.

Получаем, что решениями системы являются

$\left(1+\frac{\sqrt6}{6};\ 2+\frac{2}{3}\sqrt6\right)$ и $(0;1)$ (пары записаны в виде $(x;y)$)

Ответ: $(0;1)$

$\left(1+\frac{\sqrt6}{6};\ 2+\frac{2}{3}\sqrt6\right)$




№4 ] $AD=3x \Rightarrow DC=2x$ ;

Проведем высоту $CH \perp AB$ в $\triangle ABC$

] $CH = 5a$

а) $\angle CED=45^\circ \Rightarrow \angle CEH = 180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$

Тогда $\triangle CHE$ – прямоуг. и р/б ($\angle ECH=\angle HEC=45^\circ$, $\angle CHE=90^\circ$) $\Rightarrow CH=EH=5a$

т.к. $DE \parallel CH$, $\triangle ADE \sim \triangle ACH$ по двум углам.

Тогда $\frac{DE}{CH}=\frac{3x}{5x} \Rightarrow DE=\frac{3}{5}CH=\frac{15a}{5}=3a$

$\frac{AD}{AC}$

Также из подобия $\frac{AE}{AH}=\frac{DE}{CH}=\frac{3}{5}$

$AE=\frac{3}{5}AH=\frac{3}{5}(AE+EH)$

$AE=\frac{3}{5}AE+\frac{3}{5}\cdot 5a$

$\frac{2}{5}AE=3a \Rightarrow AE=\frac{15}{2}a$

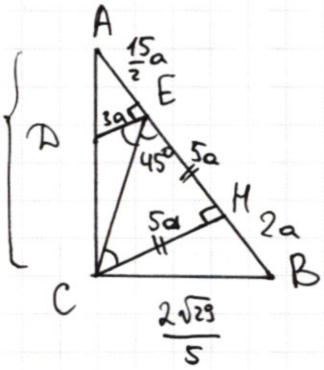
$tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{3a}{\frac{15}{2}a} = \frac{2}{5}$ $\boxed{tg\angle BAC = \frac{2}{5}}$

б) $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC}$

$AC = \sqrt{29}$

$(AC = 5x = \sqrt{29})$

$BC = AC \cdot tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$




$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{29}{5}$

$S_{CED} = S_{ABC} - S_{BCE} - S_{ADE}$

$CH^2 = BH \cdot AH$

$25a^2 = BH \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right)a$

$BH = \frac{25a \cdot 2}{25} = 2a$

в $\triangle BHC$ по т. Пифагора $4a^2 + 25a^2 = \left(\frac{2\sqrt{29}}{5}\right)^2$

$29a^2 = 29 \cdot \frac{4}{25}$

$a^2 = \frac{4}{25}$ $a > 0 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$

Тогда $S_{BCE} = \frac{CH \cdot BE}{2} = \frac{\left(5 \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \left(7 \cdot \frac{2}{5}\right)}{2} = \frac{2 \cdot 14}{2 \cdot 5} = \frac{14}{5}$

$S_{ADE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{\left(3 \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{9}{5}$

Получаем $S_{CED} = S_{ABC} - S_{BCE} - S_{ADE} = \frac{29}{5} - \frac{14}{5} - \frac{9}{5} = \frac{29-23}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$

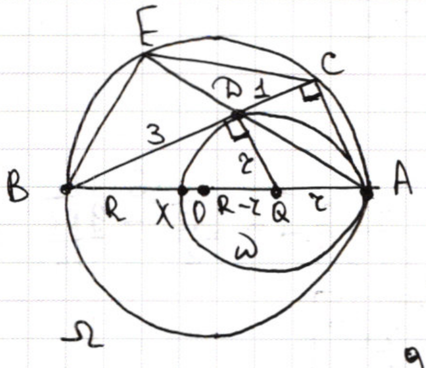
<u>**Ответ:**</u> а) $\frac{2}{5}$

б) $\frac{6}{5}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

BD = 3
CD = 1




] радиус окр. $\omega$ равен $r$, а радиус окр. $\Omega$ равен $R$;
центр окр. $\Omega$ – O, центр окр. $\omega$ – Q

в $\triangle BDQ$ по т. Пифагора ($\angle BDQ = 90^\circ$, т.к. радиус перп. кас.)

$9 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 = 4R^2 - 4Rr$

$r = \dfrac{-9 + 4R^2}{4R} = R - \dfrac{9}{4R}$

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. это впис. угол, опирающийся на диаметр AB.

Тогда в $\triangle BCA$ по т. Пифагора $16 + AC^2 = 4R^2$.

$AC = \dfrac{4 \cdot r}{3}$ из подобия $\triangle BDQ$ и $\triangle BCA$ ($DQ \perp BC, AC \perp BC \Rightarrow AC \parallel DQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDQ$ и $\triangle BCA$ ~~[illegible]~~ подобны по двум углам: $\angle BDQ = \angle BCA$, $\angle BQD = \angle BAC$)

$16 + AC^2 = 4R^2 \Leftrightarrow 16 + \dfrac{16}{9} r^2 = 4R^2$

$r^2 = \left(R - \dfrac{9}{4R}\right)^2 = R^2 + \dfrac{81}{16R^2} - \dfrac{9}{2}$

$16 + \dfrac{16}{9}\left(R^2 + \dfrac{81}{16R^2} - \dfrac{9}{2}\right) = 4R^2$

$R^2\left(4 - \dfrac{16}{9}\right) - \dfrac{16 \cdot 81}{9 \cdot 16R^2} - 16 + \dfrac{16 \cdot 9}{9 \cdot 2} = 0$

$\dfrac{20}{9}R^2 - \dfrac{9}{R^2} - 8 = 0 \quad | \cdot 9R^2 \quad (R \neq 0)$

$20R^4 - 72R^2 - 81 = 0 \quad ]\ t = R^2 > 0$

$20t^2-72t-81=0$

$D=72^2+4\cdot20\cdot81=4\cdot9\cdot9\,(4^2+20)=4^2\cdot3^6=2^4\cdot3^6$

$\sqrt{D}=2^2\cdot3^3=27\cdot4=108$

$t_{1,2}=\dfrac{72\pm108}{40}$ $\qquad t>0 \Rightarrow t=\dfrac{72+108}{40}=\dfrac{9}{2}$

$R^2=t$

$R^2=\dfrac{9}{2} \Rightarrow \boxed{R=\dfrac{3\sqrt2}{2}}$ $\qquad r=\dfrac{3\sqrt2}{2}-\dfrac{9\cdot2}{4\cdot3\sqrt2}=\dfrac{3\sqrt2}{2}-\dfrac{9\sqrt2}{12}=$

$=\dfrac{9\sqrt2}{12}=\boxed{\dfrac{3}{4}\sqrt2}$

Ответ:

$$\boxed{R=\frac{3\sqrt2}{2} \quad r=\frac{3\sqrt2}{4}}$$

Обозначим точкой $X$ точку пересечения окр-ти $\omega$ и $AB$.

~~по т. о ву кас. и секущей квадрат~~

$AB$ - секущая
$BD$ - касат. к $\omega$ $\Big| \Rightarrow BD^2=BX\cdot AB$

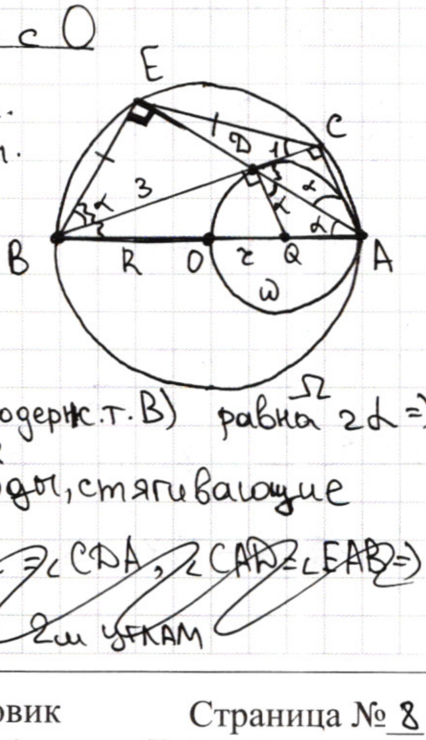
$9=BX\cdot2R$

$BX=\dfrac{9}{2\cdot\frac{3\sqrt2}{2}}=\dfrac{3\sqrt2}{2}$

Заметим, что $BX=R=BO$.

Это означает, что точка $X$ совпадёт с $O$

$\angle BEA=90^\circ$, т.к. опир. на диам.




$]\ \angle EAB=\alpha.$

$QA=QD=r \Rightarrow \angle QDA=\alpha$

$\angle EDB=180^\circ-90^\circ-\alpha=90^\circ-\alpha$

$\angle EBD=180^\circ-90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha \Rightarrow \cup CE$ (не содерж. т. B) равна $2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE=\alpha=\angle BAE \Rightarrow CE=BE$ (как хорды, стягивающие равные дуги). ~~$\angle EBA=\alpha+90^\circ-2\alpha=90^\circ-\alpha=\angle CDA,\ \angle CAD=\angle EAB \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \triangle ACD\sim\triangle AEB$ по 2м углам~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\triangle ACD \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AB}$~~

~~$AC = \frac{4}{3}r = \sqrt{2}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{AE} = \frac{1}{BE} = \frac{AD}{3\sqrt{2}}$~~

~~$\frac{AE}{BE} = \sqrt{2}$~~

$\triangle BEC$ – р/б $(BE = CE) \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ECB = \alpha = \angle EBC$

№6

Изобразим ГМТ (геометрическое место таких точек, которые лежат ниже графика ф. $y = x + |2x-1|$ и выше графика ф. $y = 2x^2 - x - 1$ либо лежат на самих этих графиках.)

① $y \le x + |2x-1|$

$$y \le \begin{cases} -x+1, & x < \frac{1}{2} \\ 3x-1, & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

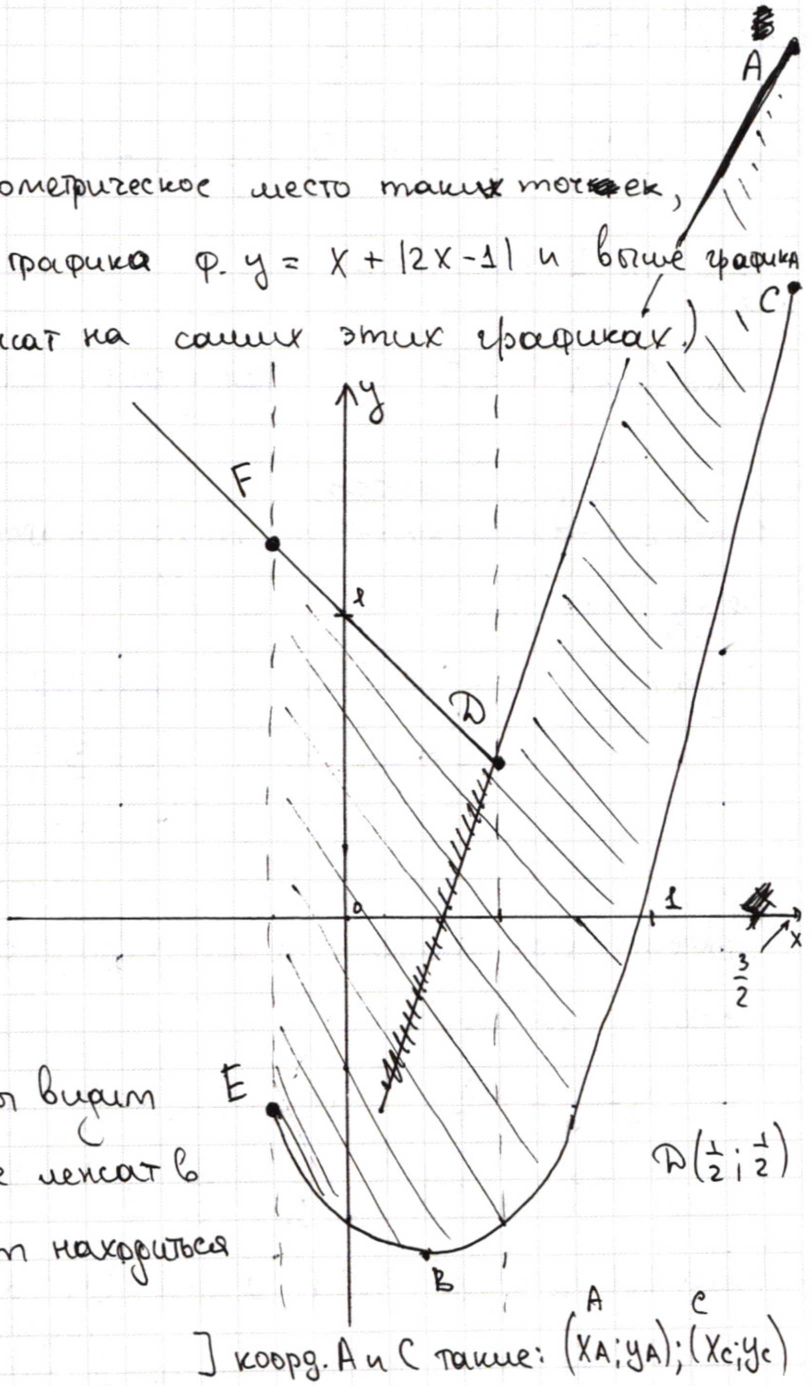
② $y \ge 2x^2 - x - 1$

$x_B = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

$y_B = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

(т. B – вершина)

На графике мы видим геом. место точек, которые лежат в отрезке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ и могут находиться на прямой $y = ax + b$




$D(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\exists$ коорд. A и C такие: $(x_A; y_A); (x_C; y_C)$

~~Получаем, что $b_{max} = 1$, но оно невозможно, т.к. при $\forall a$ прямая будет пересекать незакрашенную зону~~ (Мы рассматриваем из всей сист. координат только часть, ограниченную отрезком $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

Заметим, что $a \neq 0$. Тогда мы видим, что прямая $y = ax + b$ должна пересекать прямую $x = \frac{3}{2}$ в точке с $y$-координатой, лежащей в отрезке $[y_C; y_A]$

Найдем $y_C$ и $y_A$.

$y_C = 2x^2 - x - 1$ при $x = \frac{3}{2}$

$y_C = \frac{2 \cdot 9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

$y_A = 3x - 1$ при $x = \frac{3}{2}$

$y_A = \frac{9}{2} - 1 = 3{,}5$ получаем отрезок $[2; 3{,}5]$

~~Рассмотрим случай, когда прямая $y = ax + b$ проходит через $C$ и $D$:~~

~~$y = ax + b$ $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \\ 2 = \frac{3}{2}a + b \end{cases}$ $2a = 1{,}5$ $\boxed{a = \frac{3}{4}}$ $b = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ $\boxed{b = \frac{1}{8}}$~~

~~$\uparrow a_{min}$.~~

~~Проверим, что такая пр. не пересекает незакрашенную обл. слева от нуля:~~

~~$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ Если при $x = \frac{1}{4}$ $y \geq \frac{1}{2}$, то все хорошо.~~

~~$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} < \frac{1}{2}$ => незакраш. обл. пересекается прямой.~~

~~Получаем, что при $a_{min}$ есть пересечения с незакраш. областью. Если увеличивать $a$, при том зафикс. $b$, то будут оставаться пересечения~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~с той же областью. Это было при в мах. Тогда~~

~~при умень~~

Прямая $y = ax + b$ должна пересекать $x = \frac{3}{2}$ в точке с $y$-координатой из отрезка $[2; 3,5]$ и пересекать $x = -\frac{1}{4}$ в точке с $y$-координатой из отрезка $\left[\frac{5}{8}; \frac{5}{4}\right]$

$$\left( -x + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}; \quad 2x^2 - x - 1 = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{-5}{8} \right)$$

Заметим, что, если прямые, содержащие AE и CE, пересекают незакраш. области, то нет таких $a$ и $b$. (нет прямых, не пересекающих незакраш. области)

Прямая, содерж. EA: $y = k_1 x + b_1$ $\qquad$ содерж. CE: $y = k_2 x + b_2$

$$\begin{cases} 2 = \frac{3}{2} k_2 + b_2 \\ -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4} k_2 + b_2 \end{cases}$$

$$\left( \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) k_2 = 2 + \frac{5}{8}$$

$$k_2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$b_2 = 2 - \frac{9}{2} = \frac{-5}{2}$$

в т. $x = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-7}{4}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

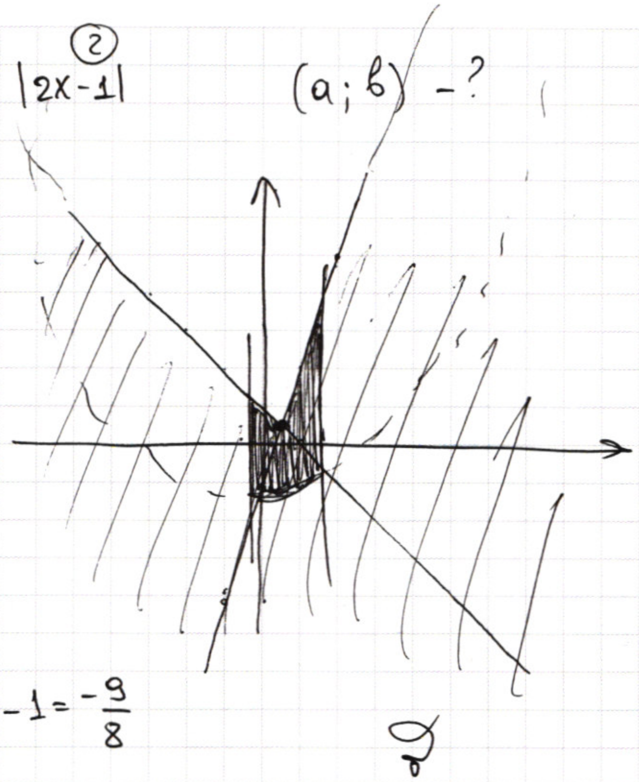
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16) $\overset{①}{2x^2-x-1} \le ax+b \le \overset{②}{x+|2x-1|}$ $\quad (a;b)$ – ?

$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$x_b =$



① $y=2x^2-x-1$

$x_b = \frac{1}{4}$

$y_b = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4}^{12} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$

② $y=x+|2x-1|$

$y = \begin{cases} -x+1 & x<\frac{1}{2} \\ 3x-1 & x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$

Изобразим ГМТ

$y \le \begin{cases} -x+1, & x<\frac{1}{2} \\ 3x-1, & x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$

$-x+1 = 3x-1$

$2 = 4x$

$x = \frac{1}{2}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ для $\forall a,b$

$f(x/y) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x$ — $[p/2]$ (простое)

— (составное)

$k+m$

$\angle$ $f(a)$ и $f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(1)+f(1)=f(1)$

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=2f(2)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=3$

$f(9)=2$

$f(10)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=3$

$f(13)=6$

$f(14)=4$

$f(15)=3$

$f(16)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=4$

$f(21)=4$

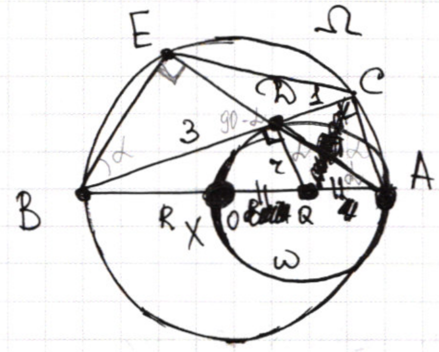
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(25)




$R - ?$
$r - ?$
$S_{BACE} - ?$

$CD = 1$
$BD = 3$

$9 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 = (2R)^2 - 2 \cdot 2Rr + r^2 - r^2$

$9 = 4R^2 - 4Rr = 4R(R - r)$

$9 = BX \cdot 2R$

$BX = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. это впис. опир. на диам.

$\boxed{r = R - \frac{9}{4R}}$

$16 + AC^2 = (2R)^2$

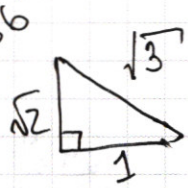
$\frac{BD}{r} = \frac{BC}{AC}$ $\quad AC = r \cdot \frac{BC}{BD} = \boxed{r \cdot \frac{4}{3}}$

$16 + \frac{16}{9} r^2 = 4R^2$

$16 + \frac{16}{9}\left(R - \frac{9}{4R}\right)^2 = 4R^2$

$16 + \frac{16}{9}\left(R^2 + \frac{81}{16R^2} - \frac{2 \cdot 9}{4}\right) = 4R^2$

$D = 72^2 + 4 \cdot 20 \cdot 81 = 4(36^2 + 20 \cdot 81)$




1

$D = \overset{4 \cdot 9}{36}(12^2 + 20 \cdot 9) =$

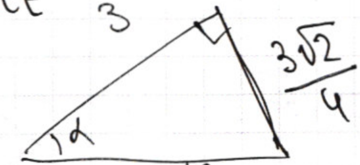
$= 4 \cdot 9 \cdot 9 (4^2 + 20) = 36 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 9 =$

$= 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 9 =$

$= 2^4 \cdot 3^6$

$4 - \frac{16}{9} = \frac{36 - 16}{9} = \frac{20}{9}$

BACE




$\sqrt{D} = 2^2 \cdot 3^3 = 27 \cdot 4$

72

$\frac{180}{40}$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{2} \cdot 4}{4 \cdot 9\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

$\sqrt{\frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 4}} = \frac{3}{2}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

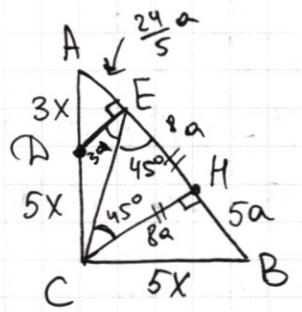
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4




$]\ AD = 3x \Rightarrow AC = 5x$

Проверем высоту CH треугольника $\triangle ABC$

~~AH = ...~~

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{CH}{AH} = \frac{DE}{AE}$

$DE \parallel CH \Rightarrow DE = \frac{3}{8}CH = \frac{3}{8}a$ из подобия $\triangle ADE$ и $\triangle ACH$

~~$AE = \frac{3}{8} \cdot AH$~~

$tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{3a \cdot 5}{24a} = \frac{5}{8}$

$AH = AE + EH = AE + 8a$

$AE = \frac{3}{8}AH = \frac{3}{8}AE + 3a$

$\frac{5}{8}AE = 3a$

$AE = \frac{24}{5}a$

$8x = \sqrt{29}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{8}$

$\left(\frac{24}{5}a\right)^2 + (3a)^2 = (3x)^2$

$9x^2 = \frac{29 \cdot 9}{8^2}$

801 | 3
267 | 3
89 |

$\frac{29 \cdot 9}{8^2} = a^2\left(9 + \frac{576}{25}\right) \Rightarrow a^2 = \frac{29 \cdot 9 \cdot 25}{8^2 \cdot 801} =$

$576 + 9 \cdot 25 =$
$= 225 + 576 =$
$= 801$

$= \frac{29 \cdot 25}{8^2 \cdot 89}$

$64a^2 = \left(\frac{24}{5} + 8\right)a \cdot BH$

$\frac{24}{5} + 8 = \frac{64}{5}$

$64a^2 = \frac{64a}{5} \cdot BH \Rightarrow BH = 5a$

$BC = AC \cdot tg\angle BAC = 8x \cdot \frac{5}{8} = 5x$

$\frac{15}{2 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{10}{2}\right)} = \frac{15}{25}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 ] знаменатель прогрессии $q$

$a \quad b \quad c$

$a \quad qa \quad q^2a \qquad q^3a$ – корень $ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2\cdot qa\cdot x+q^2a=0$

$q^3a$ – корень:

$q^6a^3+2q^4a^2+q^2a=0$

$q^2a\left(q^4a^2+2q^2a+1\right)=0$

$q^2a\left(q^2a+1\right)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} q^2a=0 \\ q^2a=-1 \end{array}\right.$ Если $q^2a=0$, то $\left[\begin{array}{l} a=0 \text{ ① } \\ q=0 \text{ ② } \end{array}\right.$

Это означает, что

① ~~...~~ все члены прогрессии 0

② 1ый равен какому-то $a$, а остальные равны 0.

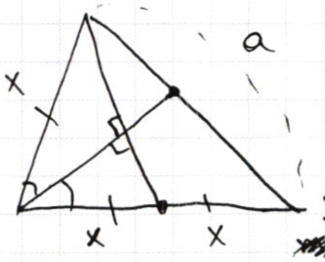
При этом обе эти ситуации неуд. условию.

Получаем, что $q^2a\neq 0$

$q^2a=-1$

это уд. усл. $\begin{cases} q\neq 0 \\ a\neq 0 \end{cases}$

$P=1200$



$3x>a>x$

$\begin{cases} a+x>2x \\ a+2x>x \\ 3x>a \end{cases}$ $\begin{cases} a>x \\ 3x>a \end{cases}$ 2 решения

$3x+x=4x<1200<3x+3x=6x$

$x<300$

$x>200$

$x\in[201;299]$

$C^1_{99}$

$201 \quad 299$

$-200$

$1 \quad 99$

(13) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$

(2) $2x^2-4x+(\sqrt{2})^2+y^2-4y+4=3$

$(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}$ $\quad 6=2+4$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2=3 \qquad 2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

(1) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

при $y-2x<0$ у ур-я, а, значит, и у всей системы нет решений.

~~$y<2x$~~

$\Rightarrow y\geq 2x$

возведем ур-е в квадрат

ур-е(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \end{cases}$

$(4x-4)^2=16(x-1)^2$

$24=2\cdot2\cdot6$

$\begin{cases} y\geq 2x \\ y^2-5xy+2x+y+4x^2-2=0 \end{cases}$

$y^2+y(1-5x)+(4x^2+2x-2)=0$

ур-е отн. y: $D=(1-5x)^2-4(4x^2+2x-2)=25x^2+1-10x-16x^2-8x+8=$
$=9x^2-18x+9=9(x-1)^2$

$y_{1,2}=\dfrac{-1+5x\pm(3x-3)}{2}$

$y_1=\dfrac{5x-1+3x-3}{2}=\dfrac{8x-4}{2}=4x-2$

$y_2=\dfrac{5x-1-3x+3}{2}=x+1$ $\quad$ 2 $\quad$ 0

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)