МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x-1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Пусть первый член геометр. прогрессии a, второй $b=qa$, третий $c=q^2a$, и четвертый q^3a, т.к. четвертый член прогрессии является корнем ур-я $ax^2-2bx+c=0$

$$a\cdot(q^3a)^2-2\cdot qa\cdot q^3a+q^2a=0$$

$$q^6a^3-2q^4a^2+q^2a=0$$

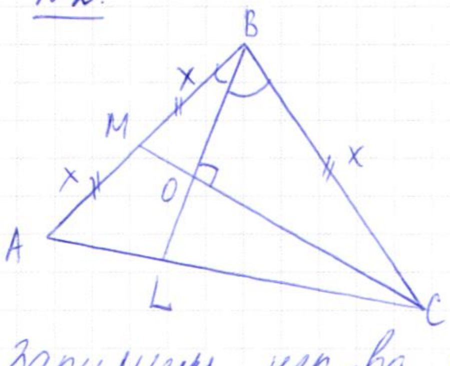
т.к. $c=q^2a$, то $c^3-2c^2+c=0$

1) в случае нулевой геометр. прогрессии $c=0$, тогда $a=0, b=0$, корень уравнения 0 : $0\cdot0^2-2\cdot0\cdot0+0=0$ верно

2) если $c\neq0$, то $c^2-2c+1=0$, $D=0$, $c=1$.

Ответ: 0 ; 1.

№2.



Пусть $BL\perp CM$, BL - бис-са, CM - медиана, тогда в $\triangle MBC$ BO - бис-са и высота $\Rightarrow\triangle MBC$ - р/б, $MB=BC$, также $AM=MB$

Тогда пусть $BC=x$, $AB=2x$, $AC==900-3x$

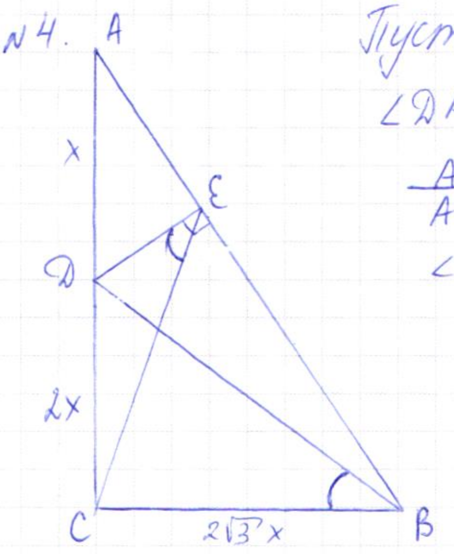
Запишем нер-ва треугольника:

$$\begin{cases}AB<BC+AC\\BC<AB+AC\\AC<AB+BC\end{cases}\quad\begin{cases}2x<x+900-3x\\x<2x+900-3x\\900-3x<2x+x\end{cases}\quad\begin{cases}4x<900\\2x<900\\900<6x\end{cases}\quad\begin{cases}x<225\\x<450\\x>150\end{cases}$$

получаем, что $150<x<225$; т.к. $4x<900$, то $x<900-3x$, также $x<2x$, значит сторона длиной x - наименьшая в рассматриваемом треугольнике. Треугольники с различными наименьшими сторонами не могут быть равны, значит, ~~у нас~~ количество треугольников равно количеству способов выбрать наименьшую сторону наименьшая сторона равна x, x - целое число, $150 < x < 225$, значит, кол-во треугольников равно $225 - 150 + 1 = 76$

Ответ: 76.

№4.



Пусть $AD = x$, $DC = 2x$; $\angle AED = \angle ACB = 90°$, $\angle DAE = \angle BAC \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ по двум углам

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC};$$

$\angle DEB = 90°$, $\angle DEB = 90° \Rightarrow \angle DEB + \angle DCB = 180°$, четырехугольник $DEBC$ - вписанный

$$\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 30°$$

$$tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{DC}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ CB = 2\sqrt{3}x$$

$$tg\ \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$AC = 3x$, $BC = 2\sqrt{3}x \Rightarrow$ по т. Пифагора для $\triangle ABC$ $AB = \sqrt{(3x)^2 + (2\sqrt{3}x)^2} = \sqrt{21}x$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DA}{AB} \Rightarrow AE = \frac{AD}{AB} \cdot AC = \frac{x}{\sqrt{21}x} \cdot 3x = \frac{3}{\sqrt{21}}x$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DE = BC\frac{AD}{AB} = 2\sqrt{3}x\frac{x}{\sqrt{21}x} = \frac{2}{\sqrt{7}}x$$

$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow S_{\triangle AEC} = \frac{AE}{AB} \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle DEC} = S_{\triangle AEC} - S_{\triangle AED} = \frac{AE}{AB} \cdot S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE =$$

$$= \frac{AE}{AB} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC - \frac{1}{2}AE \cdot DE = \frac{3}{\sqrt{21}}x \cdot \frac{1}{\sqrt{21}x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2\sqrt{3}x -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}}x \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}x = \frac{9\sqrt{3}}{21}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{7}x^2 = x^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{7}x^2$$

т.к. $AC = 3x = \sqrt{7}$, $x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow S_{\triangle DEC} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\,\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{\triangle DEC} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

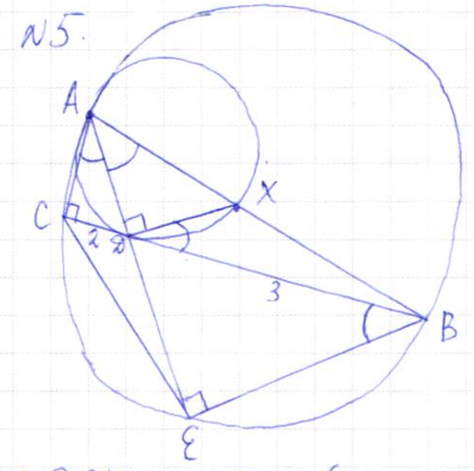
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



AB - диаметр большей окруж. Ω,

AX - диаметр меньшей окруж. ω (т. X - точка пересечения AB с окружностью ω)

$\angle ADX = 90^\circ$ (опирается на диаметр AX окруж. ω)

$\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$ (опираются на диаметр AB окруж. Ω)

$\angle DAX = \angle XDB$ (угол между хордой и касательной равен половине дуги, заключенной между ними)

$\angle XDE = \angle DEB = 90^\circ \Rightarrow DX \parallel EB$, $\angle XDB = \angle DBE$ (накрест лежащие)

$\angle CAE = \angle CBE$ вписанные и опираются на одну дугу

$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAB$; AD - бис-са в $\triangle CAB$ $\Rightarrow$ по свойству бис-сы $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$

$\Rightarrow AC = AB \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{2}{3} AB$; по т. Пифагора для $\triangle ACB$ $AC^2 + CB^2 = AB^2$

$\left(\frac{2}{3}AB\right)^2 + 25 = AB^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$; $AC = 2\sqrt{5}$

по свойству касательной и секущей $BX \cdot BA = BD^2 \Rightarrow BX = \frac{BD^2}{AB} = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $AX = AB - BX = 3\sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

если r - радиус окружности ω, R - радиус окружности Ω, то $AX = 2r$, $r = \frac{AX}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $AB = 2R$, $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 = 5\sqrt{5}$, $\frac{S_{ACD}}{S_{ADB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = 2\sqrt{5}$, $S_{\triangle ADB} = 3\sqrt{5}$

т.к. $DX \parallel EB$, по т. Фалеса $\frac{AD}{DE} = \frac{AX}{BX} = \frac{12 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot 3} = 4$

$\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle EDB}} = \frac{AD}{DE}$, $S_{\triangle ADB} = 3\sqrt{5} \Rightarrow S_{\triangle EDB} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$; $\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle DBE}} = \frac{CD}{DB} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_{BACE} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ADB} + S_{\triangle DBE} + S_{\triangle CED} = 5\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{25}{4}\sqrt{5}$

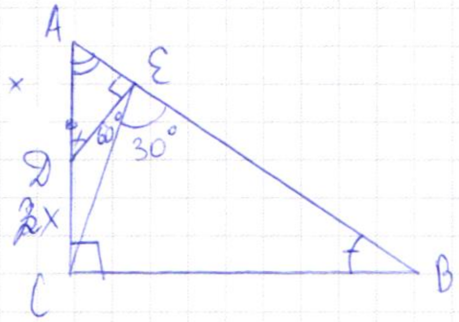
Ответ: $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $S_{BACE} = \frac{25}{4}\sqrt{5}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

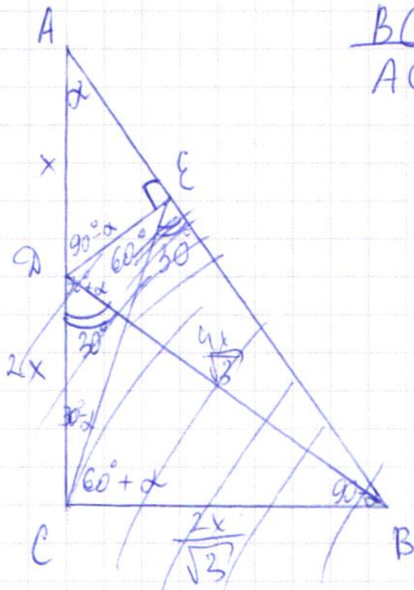
$x^2+2y^2-12x-4y+20 = x^2-2\cdot 6\cdot x+36+2(y^2-2y+1)-$
$-18 \Rightarrow (x-6)^2+2(y-1)^2=18$



$\frac{AƐ}{AC} = \frac{DƐ}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AƐ}{3x} = \frac{x}{AB} \Rightarrow AƐ\cdot AB = 3x^2$

$\sin 30^\circ = 0,5$

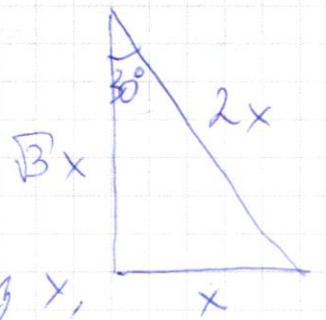


$\frac{BC}{AC}$ – ?

$\frac{x}{AB} = \frac{DƐ}{BC} = \frac{AƐ}{AC} = \frac{AƐ}{3x}$

$\frac{BC}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BC = \frac{2x}{\sqrt{3}}$



выражаем AƐ через x,
DƐ через x

$tg\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$9x^2+12x^2 =$
$= \sqrt{21}\, x$

$x-6y = \sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$x-6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x-6y \geq 0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$

$4+\frac{4}{3} = \frac{12+4}{3} = \frac{16}{3}$

$\frac{ƐB}{AƐ}\cdot S_{AƐC} + S_{AƐC} = S \Rightarrow \frac{ƐB+AƐ}{AƐ}\cdot S_{AƐC} = S \Rightarrow S_{AƐC} = \frac{AƐ}{AB}\cdot S$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

$a = a$

$b = qa$

$c = q^2 a$

$q^3 a$ – корень

$\Rightarrow \; a \cdot (q^3a)^2 - 2 \cdot \cancel{q}a \cdot q^3 a + q^2 a = 0$

$q^6 a^3 - 2q^4 a^2 + q^2 a = 0$

$(q^2a)^3 - 2(q^2a)^2 + q^2 a = 0$

~~пусть~~ $q^2 a = c$

$c^3 - 2c^2 + c = 0$

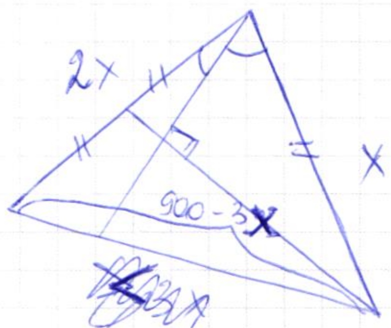
$c \neq 0$ (т.к в этом случае $a=0,\ b=0,\ c=0$

$c^2 - 2c + 1 = 0$

$D = 0\ ;\ c = 1$

$900 \,|\, \underline{4}$ 225

$900 \,|\, \underline{8}$ 1



~~$900 - 3x > 3x$~~

~~$\Rightarrow 6x < 900$~~

~~$x < 150$~~

~~$x \in [1, 149]$~~

$\begin{cases} x < 2x + 900 - 3x \\ 2x < 900 - 3x + x \\ 900 - 3x < 2x + x \end{cases}$

~~$900 - 3x > 2x$~~

$\begin{cases} 2x < 900 \\ 4x < 900 \\ 900 < 6x \end{cases}$ $\begin{cases} x < 450 \\ x < 225 \\ x > 150 \end{cases}$

$225 - 150 + 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

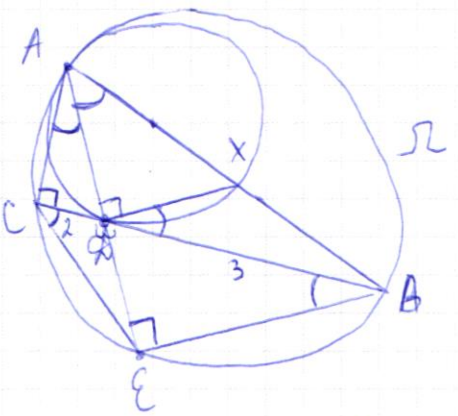
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$5 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{20+3+2}{4} = \frac{25}{4}\sqrt{5}$



$\boxed{AD \cdot DE = BD \cdot DC = 6}$

$\boxed{\frac{AD}{DE} = \frac{AX}{XB}}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}, \quad \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AX} = \frac{CD}{DX}$

$\boxed{BX \cdot AB = BD^2 = 9} \Rightarrow BX = \frac{9}{AB} = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$CE = EB$

$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AC = \frac{2}{3}AB$

$\left(\frac{2}{3}AB\right)^2 + 5^2 = AB^2; \quad \frac{4}{9}AB^2 + 5^2 = AB^2 \Rightarrow \frac{5}{9}AB^2 = 5^2$

$AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$AC = 2\sqrt{5}$

$\frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DX}$

$BX = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$AB = 3\sqrt{5} \quad \Rightarrow AX = 3\sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{15\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$x - 6y \geq 0$

$(x-6)(1-y) = x - xy + 6 + 6y$

$(x-6)(1+y) = x + xy - 6 - 6y = (x-6y) + (xy-6)$

$\sqrt{ab} = ab - (xy-6)$

$a^2 + 2b^2 = 18 \quad / \quad /ab$

$\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a} = \frac{18}{ab}; \quad \frac{a}{b} = t$, тогда

$t + \frac{2}{t} = \frac{18}{ab}; \quad t^2 - \frac{18}{ab}t + 2 = 0$

$(x-6)^2(y-1)^2 + 2(y-1)^4 - 18(y-1)^2 = 0$

$2(y-1)^4 - 18(y-1)^2 + (x-6y)^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3
(Нумеровать только чистовики)

для $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: $8x+12x-6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$20x-6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$ $y=-8x^2+6x+7$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$(x-6)(y-1)=(x-6y)^2$ $\boxed{x_B=\frac{3}{8}}$

$x-6y \ge 0$

$\frac{(x-6y)^2}{y-1}$

$\frac{(x-6y)^4}{(y-1)^2}+2(y-1)^2=18 \ge 2\sqrt{2}\cdot(x-6y)^2$

$(x-6y)^2 \le \frac{9}{\sqrt{2}}$

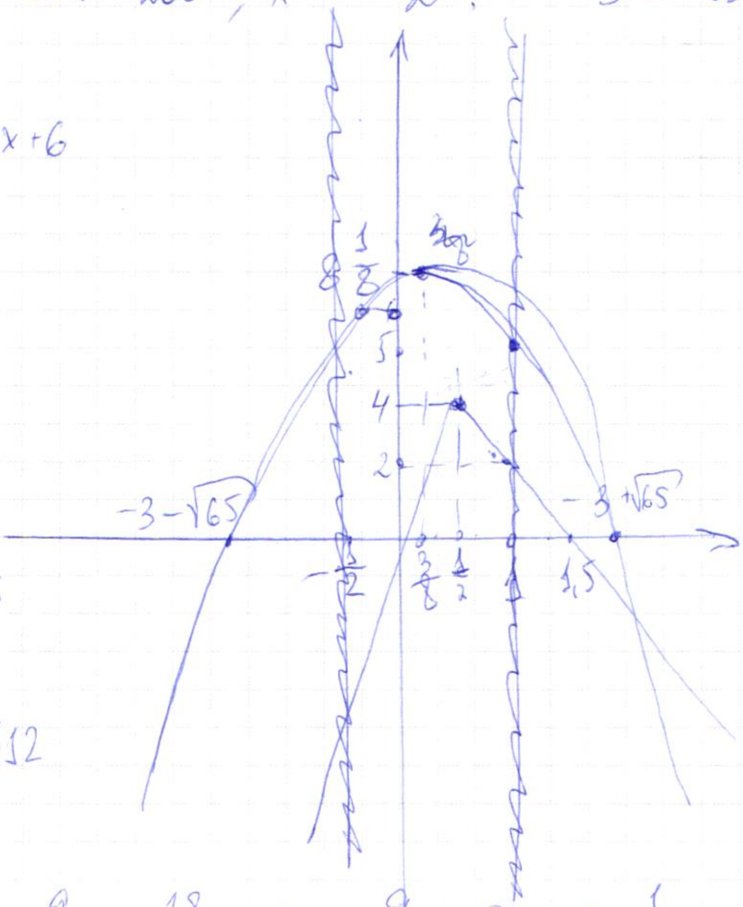
$(x-6)(y-1) \le \frac{9}{\sqrt{2}}$

$-6 \le b \le 7$

$36+4\cdot7\cdot8=36+224=260$; $x=\frac{-6\pm\sqrt{260}}{2}=-3\pm\sqrt{65}$

$14 \times 14 = 56$, 14; $141+196$; $196+416=612$

32×13: 96, 32, 416



$y=-8x^2+6x+7$

$-8x^2+6x+7=8x-12x+6$

~~$-28x$~~ $8x^2-10x-1=0$

$D=100+4\cdot8=132$

$11 \le \sqrt{132} \le 12$

$\frac{10-11}{2\cdot8}=-\frac{1}{16}$ — нет

$\frac{10-12}{2\cdot8}=-\frac{1}{8}$

$-8x^2+6x+7=8x+12x-6$

$8x^2+14x-13=0$

$D=14^2+4\cdot8\cdot13=196+416=612$

$260 : 4 = 65$ (-24, 20)

$y_B=-8\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+6\cdot\frac{3}{8}+7=-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=\frac{9}{8}+7=8\frac{1}{8}$

$8x-12x+6=6-4x$

$8x+12x-6=20x-6$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)