МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

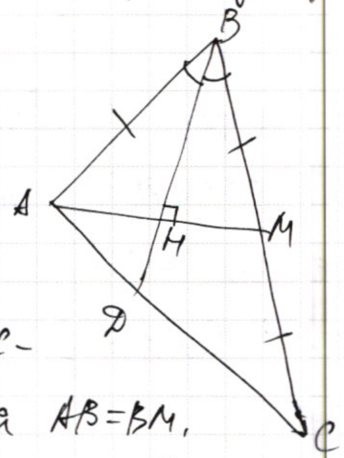
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q - знаменатель прогрессии, тогда $b=qa$, $c=q^2a$
Подставляя в уравнение: $ax^2-2qax+q^2a=0$. $a\neq 0$ т.к. a - член геометрической прогрессии. Тогда $x^2-2qx+q^2=0$
$(x-q)^2=0$ $x=q$ - единственный корень. Тогда
$q=q^3a$ (4-й член прогрессии) и т.к. $q\neq 0$ $1=q^2a=c$
Ответ: 1.

№2

Рассмотрим треугольник с перпендикулярными медианой и биссектрисой.



Пусть AM - медиана, а BD - биссектриса. Пусть AM и BD пересекаются в H.
Рассмотрим $\triangle ABM$: BH - биссектриса и высота, откуда $AB=BM$.
Тогда $MC=BM=AB$ и $BC=2AB$. Значит, у всех искомых треугольников одна сторона в 2 раза больше другой. Пусть стороны треугольника равны a, $2a$ и $900-3a$. Тогда либо $2a$, либо $900-3a$ — наибольшие стороны (аста, поэтому a — не наибольшая). Из неравенства треугольника:
$a+(900-3a)>2a$ и $a+2a>900-3a$, откуда $a<225$ и $a>150$.

Из ~~про~~ интервала $(150; 225]$ 74 целых числа. Значит, таких треугольников 74.

Ответ: 74.

№4

Дано:

ΔABC, $\angle C = 90^\circ$

D на AC, E на AB

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $DE \perp AB$

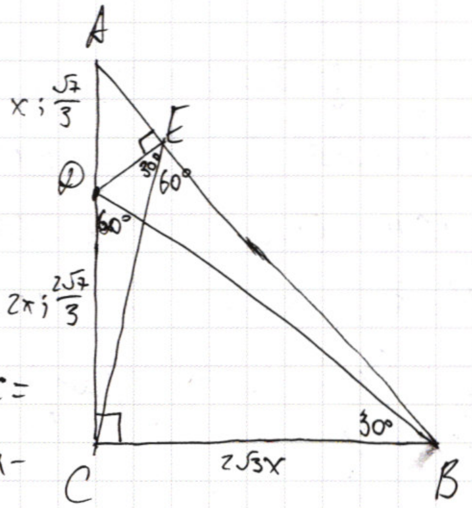
$\angle CED = 30^\circ$

а) $tg BAC = ?$

б) $AC = \sqrt{7}$, $S_{CED} = ?$

Решение:

а) т.к. $\angle DCB + \angle DEB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то $CDEB$ — вписанный, и $\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$. В прямоугольном треугольнике DCB



$CB = CD \cdot ctg DBC = \cancel{DB}^{CD}\sqrt{3}$. Тогда $tg BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{CD\sqrt{3}}{CD + AD} = \frac{CD\sqrt{3}}{CD(1+\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) $tg BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, тогда $1 + tg^2 BAC = \frac{1}{\cos^2 BAC}$, откуда $\cos BAC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ и $\sin BAC = \frac{2}{\sqrt{7}}$ ($\angle BAC < 90^\circ$). $\sin BAC = \sin EAD = \frac{ED}{AD} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\frac{ED}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $ED = \frac{2}{3}$. Далее $\sin CDE = \sin ADE = \cos DAE = \cos BAC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, тогда $S_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DE \cdot \sin CDE = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}AC \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5

Дано:

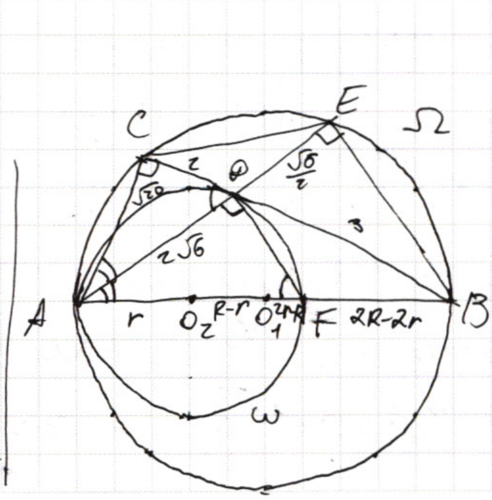
Ω и ω касаются внутренне в A

AB — диаметр Ω, BC касается ω в D

Продолжение AD пересекает Ω в E.

$CD = 2$; $DB = 3$

Найти: радиусы ω и Ω, S_{BACE}



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) Пусть O_1 и O_2 — центры Ω и ω соответственно. Т.к. окружности касаются, то A, O_2 и O_1 лежат на одной прямой AB. Пусть AB пересекает ω в F. Т.к. AB и AF — диаметры Ω и ω, то $\angle ACB = \angle AEB = 90°$ и $\angle ADF = 90°$. ~~В Δ~~ Пусть R и r — радиусы Ω и ω соответственно. В ΔACB по т. Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - 25}$. ~~В ΔACD по т. Пифагора:~~ $\angle CDA = \angle DFA$ как угол между касательной CD и хордой AD ($\angle DFA = \frac{1}{2}\smile DA$). Тогда $\angle CAD = 90° - \angle CDA = 90° - \angle DFA = \angle FAD$, т.е. AD — биссектриса $\angle CAB$. Тогда в ΔABC по св. биссектрисы: $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$ $\frac{\sqrt{4R^2-25}}{2R} = \frac{2}{3}$; ~~$3(4R^2-25)$~~
$9(4R^2 - 25) = 4 \cdot 4R^2$, откуда $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. По св. касательной и секущей к ω: $BD^2 = BF \cdot BA$ $9 = (2R - 2r) \cdot 2R$
Подставляя R, находим $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

б) В ΔACD по т. Пифагора: $AD = \underset{(AC = \sqrt{20})}{\sqrt{AC^2 + CD^2}} = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$. Тогда по теореме о произведении отрезков хорд в Ω $AD \cdot DE = CD \cdot DB$ откуда $DE = \frac{CD \cdot DB}{AD} = \frac{2 \cdot 3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ~~В ΔACD по т. Пифагора~~ В ΔACD $\sin CDA = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Найдём площадь по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \sin CDA = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: ~~а)~~ $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

при ~~$(x-6)(y-1)\geq 0$~~ $x-6y\geq 0$

Произведём замену $x-6=a$, $\sqrt{2}(y-1)=b$, тогда $x-6y=$

$=(a+6)-6\left(\frac{b}{\sqrt{2}}+1\right)=a-3\sqrt{2}b$ $\quad\begin{cases} \sqrt{2}(a-3\sqrt{2}b)^2=ab \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{2}a^2-12ab+18\sqrt{2}b^2=ab \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на b^2 ($b\neq 0$, т.к. иначе $a=0$ и $a^2+b^2\neq 18$) $\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+18\sqrt{2}=0 \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$

Умножим первое уравнение на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и сделаем замену $\frac{a}{b}=t$, тогда $t^2-\frac{13}{\sqrt{2}}t+18=0$ $D=\frac{169}{2}-4\cdot 18=\frac{25}{2}$

$t=\dfrac{\frac{13}{\sqrt{2}}\pm\frac{5}{\sqrt{2}}}{2}$ $\quad\left[\begin{array}{l} t=2\sqrt{2} \\ t=\frac{9}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} a=2\sqrt{2}b \quad ① \\ a=\frac{9}{\sqrt{2}}b \quad ② \end{array}\right.$ В ① $a^2=8b^2$ и

тогда $9b^2=18$ и $b=\sqrt{2}$; $a=4$ или $b=-\sqrt{2}$; $a=-4$. В ②

$a^2=\frac{81}{2}b^2$, тогда $\frac{83}{2}b^2=18$ и $b=\frac{6}{\sqrt{83}}$; $a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ или $b=\frac{-6}{\sqrt{83}}$; $a=\frac{-27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$.

Необходимо, чтобы $x-6y\geq 0$, т.е. $a-3\sqrt{2}b\geq 0$.

Это условие соблюдается только при парах $(a;b)$: $(-4;-\sqrt{2})$ и $\left(\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}};\frac{6}{\sqrt{83}}\right)$, произведём обратную замену, получим $x=2$ и $y=0$, и $x=\frac{27\sqrt{166}}{83}+6$ и $y=\frac{3\sqrt{166}}{83}+1$

Ответ: $(2;0)$, $\left(\frac{27\sqrt{166}}{83}+6;\frac{3\sqrt{166}}{83}+1\right)$.

№6

Перепишем двойное неравенство как систему:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$x-6=a$ $\quad x=a+6$

$\sqrt{2}(y-1)=b$ $\quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}+1$

$x-6y=a-3\sqrt{2}b$

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-6y)^2=(x-6)\cdot\sqrt{2}(y-1) \\ (x-6)^2+(\sqrt{2}(y-1))^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}(a-3\sqrt{2}b)^2=ab \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}a^2-12ab+18\sqrt{2}b^2=ab \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$$

$a\neq0, b\neq0$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+18\sqrt{2}=0 \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$$

$t^2-\frac{13}{\sqrt{2}}t+18=0$

$18 \cdot 8 = 144$

$D=\frac{169}{2}-4\cdot18=\frac{169-144}{2}=\frac{25}{2}$

$t=\frac{\frac{13}{\sqrt{2}}\pm\frac{5}{\sqrt{2}}}{2}$

$t_1=\frac{8}{2\sqrt{2}}$

$t_2=\frac{18}{2\sqrt{2}}$

$$\left[\begin{array}{l} t=2\sqrt{2} \\ t=\frac{9}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

1) $a=2\sqrt{2}b$ $\quad a^2=8b^2$

$9b^2=18$ $\quad$ ~~$b=\pm\sqrt{2}$~~

$b=\sqrt{2}$ $\quad a=4$

$b=-\sqrt{2}$ $\quad a=-4$

2) $a=\frac{9}{\sqrt{2}}b$ $\quad a^2=\frac{81}{2}b^2$ $\quad$ physteech moment

$\frac{83}{2}b^2=18$ $\quad b=\frac{6}{\sqrt{83}}$ $\quad a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$b=\frac{-6}{\sqrt{83}}$ $\quad a=\frac{-27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$10-6\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1\right)=10-12<0$

$-4+3\sqrt{2}\sqrt{2}>0$

$a-3\sqrt{2}b$ $\quad 4-3\sqrt{2}\sqrt{2}<0$

$3\sqrt{2}b-a$

$83\cdot6=498$

$\frac{27\sqrt{2}-18\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

☑ черновик ☐ чистовик

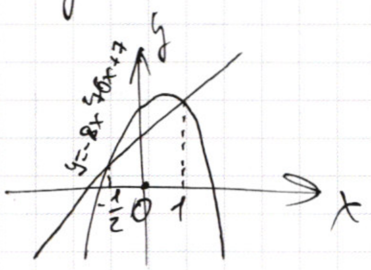
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} ax+b \geq 8x-6|2x-1| & ① \\ ax+b \leq -8x^2+6x+7 & ② \end{cases}$$

Если неравенство ② выполняется на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$, то прямая $y=ax+b$ пересекает параболу $y=-8x^2+6x+7$ в точках с абсциссами $-\frac{1}{2}$ и 1. Т.к. ветви параболы направлены вниз, то ~~прямая~~ отрезок $ax+b$ будет находиться ниже параболы как раз при $x\in(-\frac{1}{2};1)$.



Тогда уравнение ~~имеет~~ $-8x^2+6x+7=ax+b$ имеет 2 корня $-\frac{1}{2}$ и 1. Перепишем его в виде $8x^2+(a-6)x+b-7=0$. По теореме Виета:

$$\begin{cases} 1+(-\frac{1}{2}) = \frac{-(a-6)}{8} \\ 1\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{b-7}{8} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{6-a}{8} \\ -\frac{1}{2} = \frac{b-7}{8} \end{cases}$$

откуда $a=2$ и $b=3$.

Проверим, выполняется ли неравенство ① при $a=2$ и $b=3$. Оно примет вид $2x+3 \geq 8x-6|2x-1|$

При $x \geq \frac{1}{2}$: $2x+3 \geq 8x-12x+6 \quad 6x \geq 3, \ x \geq \frac{1}{2}$.

При $x \leq \frac{1}{2}$: $2x+3 \geq 8x+12x-6 \quad 9 \geq 18x, \ x \leq \frac{1}{2}$.

Неравенство ① выполняется при $x\in(-\infty;+\infty)$, а, значит, и при $x\in[-\frac{1}{2};1]$, значит пара $(a;b)=(2;3)$ подходит.

Ответ: $(2;3)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad qa \quad q^2a \qquad q^3a$ – корень $\quad ax^2-2qax+q^2a=0$

~~$a=0 \Rightarrow q^3a=0 \qquad a\neq 0 \Rightarrow x^2-2qx+q^2=0$~~

$x^2-2qx+q^2=0 \quad x=q$ $\quad$ ~~$x=q$~~

$q=q^3a \qquad \underline{q^2a=1} \qquad x^2+2y^2+xy-13x-10y+26=xy-6y-x+6$

x^2+2y

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

~~$D=144-8y^2+16y-80=-8y^2+16y+64$~~

$D=144-8y^2+16y-80=-8y^2+16y+64$

$$\begin{cases} x^2-13xy+\underline{36y^2}+\underline{6y}+\underline{x}-6=0 \\ x^2+\underline{2y^2}-\underline{12x}-\underline{4y}+20=0 \end{cases}$$

$-8(y^2-2y+8)=$

$=-8(y-4)(y+2)$

$y\in[-2;4]$

$36y^2+13x+10y-13xy-26=0$

$36y^2+y(10-13x)+13(x-2)=0$

~~$D=100-260x+169x^2-52\cdot 34(x-2)=169x^2-2028x+3636$~~

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ 34 \\ \hline 208 \\ 1560 \\ \hline 1768 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1768 \\ \times\ 2 \\ \hline 3536 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$y\in[-2;4]$

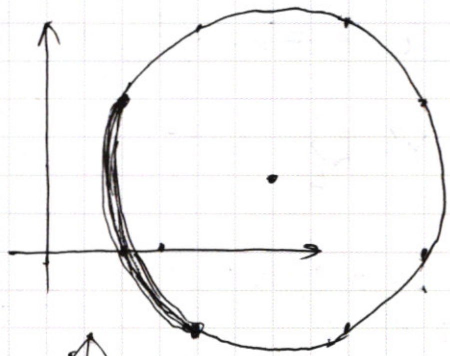
$x\in[-12;6]$

$y^2-4y+x^2-12x+20=0$

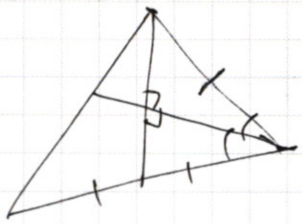
$D=16-8x^2+96x-160=-8x^2+96x-144=-8(x^2-12x+18)$

~~$(y-2)^2$~~ $y^2-4y+4+x^2-12x+36=20$

$(y-2)^2+(x-6)^2=20$



$(x-6)(y-6)$



$a, 2a, 900-3a$

$a<2a$

~~$a<900$~~

1) $2a<(900-3a)+a$

$4a<900$

$a<225$

a 151, 152 $\nearrow$ ....

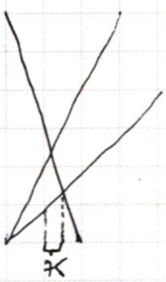
равн:

$a=900-3a$

$a=225$ X

$2a=900-3a$

$a=180$



2) $900-3a<2a+a$

$6a>900$

$a>150$

$a\in\{151, 152, \dots, 224\}$

74

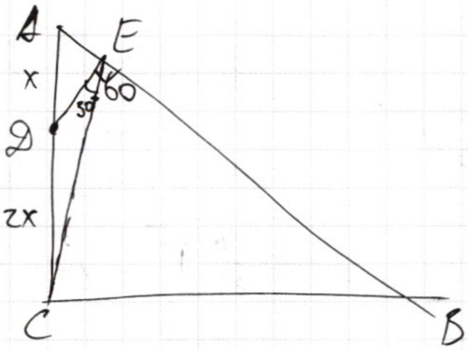
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

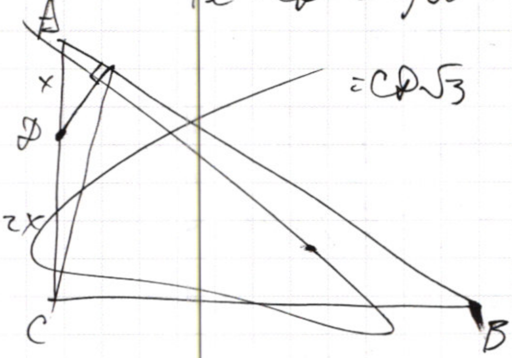
ШИФР

(заполняется секретарём)

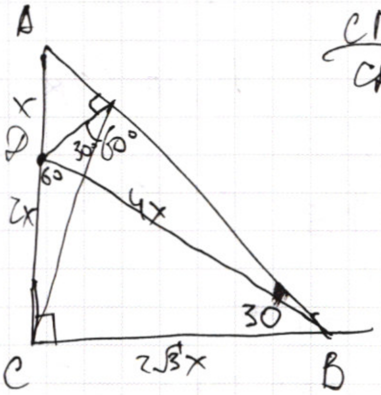
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BC = CD \cdot ctg 30° =$

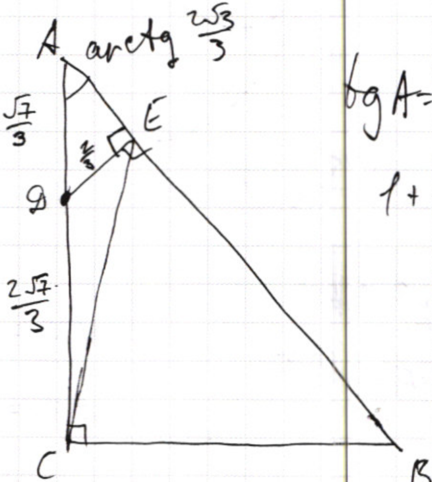


$= CD\sqrt{3}$



$\frac{CB}{CD} = ctg\, DBC \qquad BC = CD \cdot ctg\, DBC$

$tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



$tgA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{\cos^2 A}$

$\cos A = \sqrt{\frac{3}{7}}$

~~$\sin A = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$~~

$\sin A = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\sin A = \frac{DE}{AD}$

$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{DE}{\frac{\sqrt{7}}{3}} \qquad 3DE = 2$

$DE = \frac{2}{3}$

$tg ADE = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin CDE = \sin ADE \qquad 1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{\cos^2 ADE} \qquad \cos ADE = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\sin ADE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$S = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{7}}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

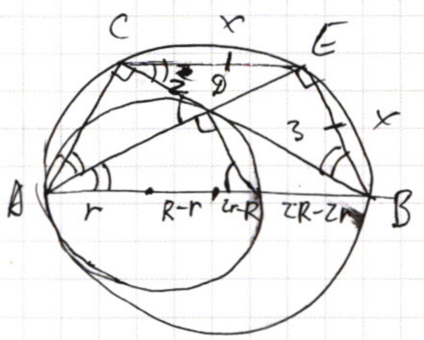
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

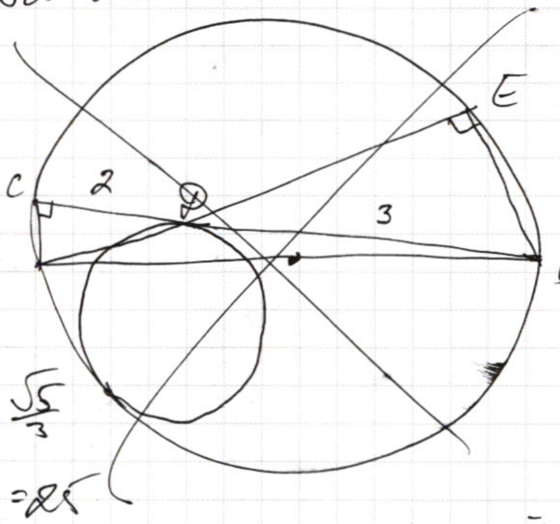
Страница №__ (Нумеровать только чистовики) роле роле ролексы

ролексы)))))))

$CA=\sqrt{45-25}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\sin CDA=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$





$S=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin CEB=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}\right)}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin CEB=\sin CAB=$

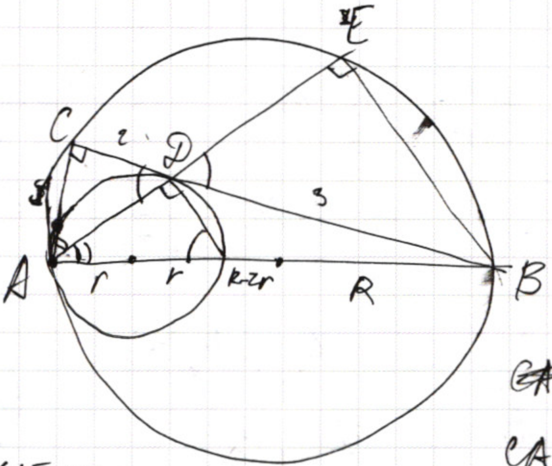
$=\sqrt{1-\cos^2 CAB}=$

$=\sqrt{1-\left(\frac{CA}{AB}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$25=2x^2-2x^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$

$2x^2\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=25$

$x^2=\frac{25}{2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}\right)}$



$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=$

$=\frac{25\sqrt{5}}{4}$

$9=2R\cdot(2R-2r)$

$AD\cdot DE=6$

$\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{12\sqrt{5}}{5}=$

$=\sqrt{5}\left(\frac{3}{2}-\frac{12}{5}\right)=\sqrt{5}\left(\frac{15-24}{10}\right)<0$

$\cancel{CA=2}$

$CA^2=(2R)^2-5^2$

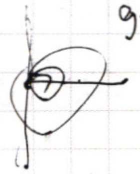
$CA=\sqrt{4R^2-25}$

$AD=$
$\sqrt{45-21}=$
$\sqrt{24}=$
$=2\sqrt{6}$

$DE=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cancel{9=4R^2-4Rr}$

$\cancel{9=45-6\sqrt{5}r}$



$4R^2-25+4=AD^2$

$AD=\sqrt{4R^2-21}$

$\frac{\sqrt{4R^2-25}}{2R}=\frac{2}{3}$ $\quad\frac{4R^2-25}{4R^2}=\frac{4}{9}$

$36R^2-225=16R^2$

$20R^2=225$

$R^2=\frac{225}{20}=\frac{45}{4}$ $\quad R=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

$9=3\sqrt{5}(3\sqrt{5}-2r)$

$9=45-6\sqrt{5}r$

$6\sqrt{5}r=36$

$r=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$$\begin{cases} ax+b \ge 8x-6|2x-1| \\ ax+b \le -8x^2+6x+7 \end{cases}$$

$x \ge \frac{1}{2}: 8x-12x+6=-4x+6$

$x < \frac{1}{2}: 8x+12x-6=20x-6$

$x_в \quad \frac{-6}{-16}=\frac{3}{8} \quad f(x_в)=$

$=-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7=$

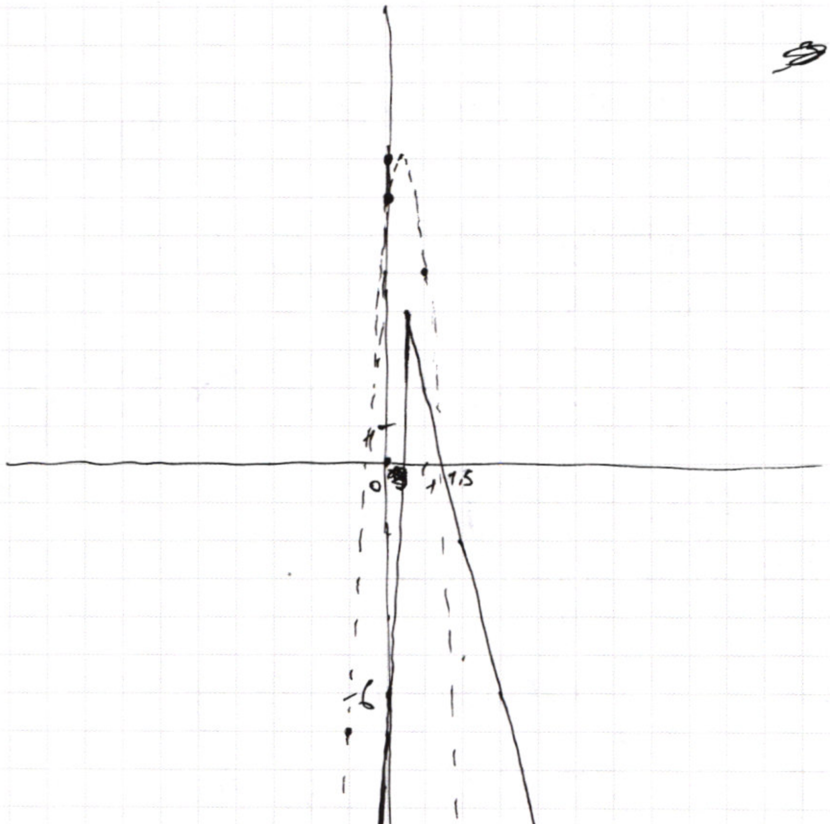
$=-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=7+\frac{9}{8}$

~~$8x^2-6x-7=0$~~

~~$D=36+7\cdot4\cdot8=$~~

~~$=36+224=260$~~

$x=\frac{6\pm\sqrt{260}}{16}$



a3

ax+b пер

$-8x^2+6x+7=ax+b$

в $-\frac{1}{2}$ и 1

$-8x^2+(6-a)x+7-b=0$

$1-\frac{1}{2}=\frac{-(6-a)}{(-8)}$ и $1\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{7-b}{(-8)}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}=\frac{6-a}{8} \\ -\frac{1}{2}=\frac{7-b}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4=6-a \\ 4=7-b \end{cases}$$

$a=2$

$b=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$(x-6y)=\sqrt{(x-6y)-2x+xy+6}$

$(x-6y)^2-(x-6y)-(xy+6-2x)=0$

$\cancel{2(y-1)^2+}$

$\cancel{x^2-12xy+36y^2-xy+6}$

$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-13xy+36y^2+x+6y-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{array}{r} 304 \\ 169 \\ \hline 135 \end{array}$

$2x^2-13xy+38y^2-11x+2y+14=0$ $\quad 2x^2+x(-13y-11)+38y^2+2y+14=0$

$D=169y^2+286y+121-\cancel{152y^2-8y}-304y^2-16y-112=$

$=-135y^2+270y+9=-9(15y^2-30y-1)$ $\quad (x^2-12x+36)+2y^2-4y+2=$
$=18$

$\cancel{x-6y=\sqrt{xy-6y-x}}$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sqrt{2}(x-6)(y-1)=2\sqrt{2}(x-6y)^2 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2=(x-6y)^2 \\ \sqrt{2}(x-6)(y-1)=\cancel{36}\ 18\sqrt{2} \end{cases}$

$\cancel{(x-6+\sqrt{2}(y-1))^2=2\sqrt{2}}$

$\cancel{x-6=}$

$\cancel{a^2+b^2=(x-6y)^2}$

$x-6=a$

$\sqrt{2}(y-1)=b$

$x=a+6$

$y=\frac{b}{\sqrt{2}}+1$

$x-6y=a+6-\frac{6b}{\sqrt{2}}-6=$

$=a+3\sqrt{2}b$

$\begin{cases} a^2+b^2=(a+3\sqrt{2}b)^2 \\ ab=18\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+b^2=a^2+6\sqrt{2}ab+18b^2 \\ ab=18\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} b=6\sqrt{2}a+18b \\ ab=18\sqrt{2} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)