МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

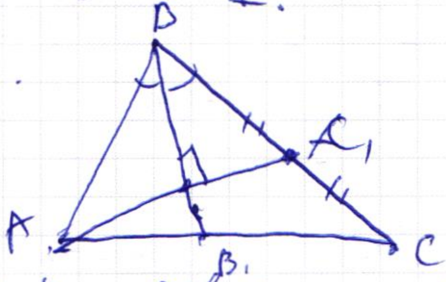
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Пусть b_1 — первый член г. пр.
q — знаменатель, нужно найти с чем же $b_1 q^2$.
тогда $a = b_1$, $b = b_1 \cdot q$; $c = b_1 \cdot q^2$
четвертый член $= b_1 \cdot q^3$
$\Rightarrow a(b_1 \cdot q^3)^2 - 2b(b_1 \cdot q^3) + c = 0$
$b_1 \cdot b_1^2 \cdot q^6 - 2 b_1 \cdot q \cdot b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^2 = 0$.
~~т.к. $b_1 \cdot q$~~ $\neq 0$. $b_1 q \neq 0$
$\Rightarrow b_1^2 \cdot q^4 - 2 b_1 q^2 + 1 = 0$.
$(b_1 \cdot q^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow b_1 q^2 = 1$,
Ответ: 1.

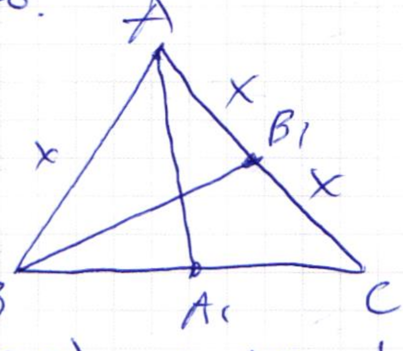
2.



Медиана не может быть $\perp$ бис. выходящей из одного и того же угл. т.к. очевидно медиана будет принадлежать в одном из углов образованных бис. и стороной и этот угол $> 90^\circ$ но он явл. половиной другого угла тр. который тогда будет $> 180^\circ$.
Рассмотрим $\triangle ABC$ в котором ~~одн~~ ~~бис $\perp$ медиана~~ бис. $BB_1 \perp$ медиане AA_1
$\Rightarrow \triangle ABA_1$ — р/б т.к. бис. также явл.

высотой. $\Rightarrow AB = BC_1 = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ если медиана $\perp$ бисс то одна из сторон равна половине другой, докажем что это равносильные утв.

Пусть в $\triangle ABC$ $AB = \frac{1}{2}AC$.



Проведём бисс AA_1 и медиану BB_1

$\triangle ABB_1$ – р/б $(AB_1 = AB) \Rightarrow AA_1 \perp BB_1$ как бисс в р/б $\triangle$. ч.т.д.

$\Rightarrow$ нам подойдёт любой $\triangle$ в котором одна из сторон в два раза длиннее другой.

Пусть эти стороны $x, 2x$, а y 3 сторона тогда $x+2x+y=900$ по условию

$3x > y$ по нер-ву тр.

$x+y > 2x$

$y = 900-3x \Rightarrow 3x > y = 900-3x \Rightarrow 6x > 900$
$\Rightarrow x > 150$.

$3x = 900 - y > y \Rightarrow y < 450$

$\cancel{x<}$ $x+y>2x \Rightarrow y > x$ x2 $y<450$

т.к. y – целое то $y \leq 449$.

~~$\Rightarrow x < 449 \Rightarrow x \in (150; 449)$~~

$y = 900-3x > x \Rightarrow 4x < 900 \Rightarrow x < 225$.

$x \in (150; 225)$, также нужно отдельно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотреть р/б тр. т.к углы одинаковы по ним вычислим их за рядные.

$x \neq 2x$, $x < y$, => единственно верно м.б. D $y = 2x$ => $900 - 3x = 2x$ => $5x = 900$

=> $x = 180$. => случай один.

=> ~~отв~~ число D = ~~75~~ 74 − 1 = 73

Ответ: 73.

3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2 ~~+~~ - 12 + 36 - 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 2 \\ + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0. \end{cases}$

Пусть $a = x - 6$, $b = y - 1$ => $x = a + 6$
$y = b + 1$

$a - 6y = a + 6 - 6b - 6 = a - 6b$,

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} (a - 6b)^2 = (\sqrt{ab})^2 \\ a \geq 6b \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a^2 - 36b^2 - 12ab = ab \\ a \geq 6b \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0. \end{cases}$

очевидно что $b \neq 0$, иначе $a=0$, $0 \neq 18$.
можно поделить на b^2

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=9\\ \frac{a}{b}=4.\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$

подставим в о 2.

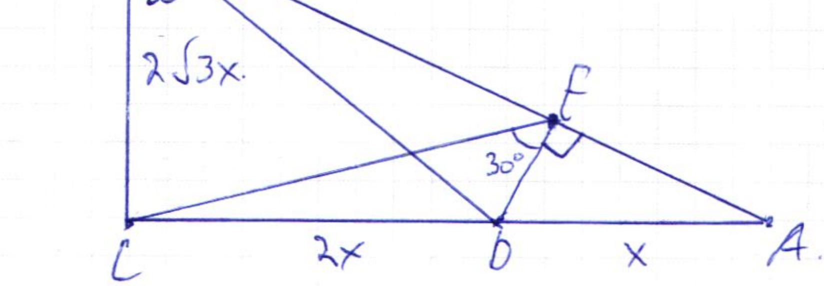
$\left[\begin{array}{l}18b^2=18\\ 83b^2=18\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=\pm1 \\ a=\pm4\end{cases}\\ \begin{cases} b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=\pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\end{array}\right.$ $a \geq 6b$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=-1 \\ a=-4.\end{cases}\\ \begin{cases} a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=+\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} y=0 \\ x=2\end{cases}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=0 \\ x=2\end{cases}\\ \begin{cases} y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \\ x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(2;0)$ $\cancel{\left(\sqrt{\frac{18}{83}}+1\right.}$ $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6; \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)$

4)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $BEDC$ - вписан т.к $\angle AED = 90^\circ = \angle BCA$.

$\Rightarrow \angle CED = \angle DBC = 30^\circ$

$\exists\, AD = x$; $\Rightarrow CD = 2x$, т.к $AD + CD = 3x = AC$

$\frac{AC}{AD} = \cancel{\frac{1}{3}}\frac{3}{1}$. $BC = 2x \cdot ctg 30^\circ = 2\sqrt{3}x$

$tg\angle ABC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) $AC = 7 \Rightarrow BC = AC \cdot tg\angle ABC = 7 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC$ по 2 углам

$\Rightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{x}{3x} \Rightarrow ED = \frac{BC}{3}$.

$\sin\angle ABC = \frac{7 \cdot 2\sqrt{3}}{3\sqrt{49 + 49 \cdot \frac{4}{3}}} = \frac{\cancel{7} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \cancel{7}\sqrt{5}}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\angle EDA. \Rightarrow \sin\angle EDA = \sqrt{1 - \frac{4}{5}}$

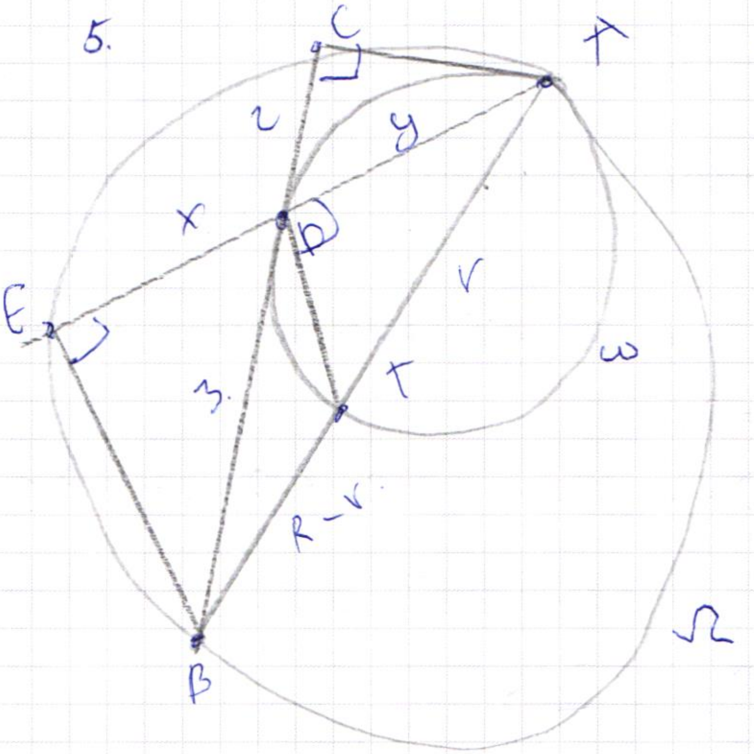
$= \frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\angle EDC \Rightarrow S\triangle CED$

$= \frac{1}{2}\sin\angle EDC \cdot CD \cdot ED = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot \frac{7 \cdot \cancel{2}\sqrt{3}}{9}$

$= \frac{1 \cdot 98\sqrt{3}}{27\sqrt{5}} = \frac{98\sqrt{3}}{27\sqrt{5}}$.

Ответ: а) $\cancel{\frac{98\sqrt{3}}{27}}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{98\sqrt{3}}{27\sqrt{5}}$.

5.



∃T – точка пересеч. ω с AB ⇒ AT это диаметр ω т.к. если провести общую касательную к ω и Ω в точке A то AT ⊥ этой касательной

а хорда ⊥ касательной это диаметр.

⇒ $\angle ADT = 90^\circ$ – т.к опирается на диам.

∃ $AD = y$; $ED = x$, радиус $\Omega = R$, радиус $\omega = r$. ⇒ $\overset{DT}{\cancel{BT}} = R - r$.

$xy = 6$ т.к $ECAB$ лежит на одной

$\angle AEB = 90^\circ$ ⇒ $\Delta ADT \sim \Delta AEB$ по двум углам. ⇒ $\frac{r}{R} = \frac{y}{y+x}$; $(R-r)\cdot R = 9 = BD^2$

~~$\Delta DCA \sim \Delta DBE$ ⇒ по двум углам.~~

~~⇒ AC~~ $AC^2 = y^2 - 4 = R^2 - 25$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^2 - 25 = y^2 - 4 \\ xy = 6 \\ \frac{y}{y+x} = \frac{r}{R} \\ (R-r)\cdot R = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = R^2 - 21 \\ x = \frac{6}{y} \\ \frac{y}{y + 6/y} = \frac{r}{R} \\ (R-r)\, R = 9 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y^2 = R^2 - 21 \\ x = 6/y \\ \dfrac{y^2}{y^2+6} = \dfrac{r}{R} \\ (R-r)R = 9 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{R^2-9}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{R^2-21}{R^2-21+6} = \frac{R^2-9}{R^2}$$

$$R^4 - 21R^2 = R^4 - 24R^2 + 135$$

$$\Rightarrow R^2 = 45 \Rightarrow R = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow r = \frac{45-9}{3\sqrt{5}} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow y^2 = 45 - 21 \Rightarrow y = \sqrt{24} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{24}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\sin\angle BDA = \sin\angle CDA = \frac{\sqrt{y^2-4}}{y} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow S_{BACE} = \sin\angle BDA \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+y)(2+3)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(\frac{24+6}{\sqrt{24}}\right) = \frac{5}{2} \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ: а) $r = \frac{12\sqrt{5}}{5}$; $R = 3\sqrt{5}$.

б) $S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

7)

1) $f(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n) = f(a_n) + f(a_{n-1}) \dots$

$+ f(1)$

Д-во индукцией по n,

$n = 2$ $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ по усл.

$n = k$ верно

! $n = k+1$ тоже верно

$f(a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}) = f(a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_k)$

$+ f(a_{k+1}) = f(a_1) + f(a_2) \dots + f(a_k) + f(a_{k+1})$

т.т.д.

$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(a) = f(1) + f(a)$

$\Rightarrow f(1) = 0$.

$f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = f(1) = 0$

$\Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$

Заметим что для $a \in N$.

a представимо в виде $p_1 \cdot p_2$

$\dots \cdot p_n$, где $p_i \in P$ - простые числа

$\Rightarrow f(a) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) \dots + f(p_n)$

$= [p_1/2] + [p_2/2] \dots + [p_n/2]$

≥ 0 т.к для чисел > 0

$[x]$ целая часть не отр.

$\Rightarrow \forall a \in N$ $f(a) \geq 0$

$\Rightarrow \forall a \in N$ $f(\frac{1}{a}) = -f(a) \leq 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим что если пара $\frac{x}{y}$ ~~[illegible]~~ >0

то $\frac{y}{x}<0$, [illegible] осталось [illegible]

случ $f(\cancel{y}\frac{x}{y})=0$.

$\Rightarrow f(x)+f(\frac{1}{y})=0$

$\Rightarrow f(x)-f(y)=0 \Rightarrow f(x)=f(y)$

~~заметим что~~ $\cancel{f(x\cdot p)=f(y\cdot p)}$

~~$\Rightarrow$ можно положить что~~ $\cancel{x}$ и y

~~взаимно просты.~~ посчитаем.

для чисел $a\in[2;22]$ $f(a)$.

$f(2)=1$ $\quad$ $f(13)=6$

$f(3)=1$ $\quad$ $f(14)=4$

$f(4)=2$ $\quad$ $f(15)=3$

$f(5)=2$ $\quad$ $f(16)=4$

$f(6)=2$ $\quad$ $f(17)=8$

$f(7)=3$ $\quad$ $f(18)=3$

$f(8)=3$ $\quad$ $f(19)=9$

$f(9)=2$ $\quad$ $f(20)=4$

$f(10)=3$ $\quad$ $f(21)=4$

$f(11)=5$ $\quad$ $f(22)=6$

$f(12)=3$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) всего дробей вида $\left(\frac{x}{y}\right)$: 21^2

$\ne$ дробей вида $\frac{x}{y}$, $y = x$ 21.

возможных случаев $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$.

~~1 + 3~~ $2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1$

$\Rightarrow$ всего пар $(x; y)$ таких что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$$\frac{21^2 - 21 - 4 - 24 - 30}{2} = \frac{21 \cdot 20 - 58}{2}$$

$= 210 - 29 = 181$

Ответ: 181.

6) $\exists\ f(x) = 8x - 6|2x-1|$, $g(x) = -8x^2 + 6x + 7$.

заметим что если $\exists\ x_0 : \overset{y_0;}{=}\ x \in [-1/2; 1]$

и $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ то прямая $ax + b$

должна проходить через $(x_0; y_0)$

$8x - 6|2x-1| = -8x^2 + 6x + 7$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8x - 12x + 6 = -8x^2 + 6x + 7 \\ x \geq 1/2 \end{cases} \\ \begin{cases} 8x + 12x - 6 = -8x^2 + 6x + 7 \\ x \leq 1/2 \end{cases} \end{array}\right.$$

- $\begin{cases} 8x^2 - 10x - 1 = 0 \\ x \cancel{\geq 1/2}, x \leq 1/2. \end{cases}$ $\quad x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\frac{5 + \sqrt{33}}{8} > 1$

$\frac{5 - \sqrt{33}}{8} < 0$.

- $8x^2 + 14x - 13 = 0$

$$x_{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 104}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{153}}{8}$$

$$0 < \frac{-7 + \sqrt{153}}{8} \vee \frac{1}{2} \Leftrightarrow -7 + \sqrt{153} \vee 4 \qquad \sqrt{153} \vee 3$$

$\Rightarrow$ ~~$-7/+X$~~ таких точек нет.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1|\le ax+b$

$x\overset{a}{\cancel{a}}(\cancel{a}-8)+b\geq -6|2x-1|$

$-(a(x-8)+b)\le 6|2x-1|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6(2x\cancel{+}1)\geq -(\overset{x+a}{\cancel{a+x}}-8)+b)\\ 6(2x-1)\cancel{\#}\ \cancel{x}\le(\overset{x+a}{\cancel{a+x}}-8+b)\end{array}\right.$

$\cancel{\left[\begin{array}{l}12x\mp 6\geq -ax+8x+b\\ 12x-6\le ax-8a\end{array}\right.}$

$\left[\begin{array}{l}12x-6\geq -ax+8x\cancel{+}b\\ 12x-6\le ax-8x+b.\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(4+a)x\geq 6-b\\ (20-a)x\le b+6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\frac{6-b}{4+a}\\ x\le\frac{b+6}{20-a}.\end{array}\right.$

$\forall x\in[-1/2;1]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overset{-1/2}{\cancel{4}}\geq\frac{6-b}{4+a}\\ +1\le\frac{b+6}{20-a}.\end{array}\right.$

$-8x^2+6x+7-ax-b\geq 0.$

$-8x^2+x(6-a)+7-b\geq 0.\ \forall x\in[-1/2;1].$

$x\in$ ~~a-b+~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 11

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8-6\cdot 1 = -8+6+7.$

$8x-6|2x-1| = -8x^2+6x+7.$

$x\in[1/2;1]$

$8x-12x+6 = -8x^2+6x+7.$

$8x^2-4x+6-7-6x=0.$

$8x^2-10x-1=0.$

$x_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{100+32}}{16}$ $\frac{10\pm 6}{16}$ $x=1.$ $x=-\frac{1}{4}.$

$\cancel{8x+6|2x-6 = -8x^2+6x+7.}$

$\cancel{8x^2+14x-13}$, $x_{1,2}$

$\frac{10+\sqrt{132}}{16} > 1$

$8x^2+14x-13=0$ $\frac{10-\sqrt{132}}{16}$

$x_{1,2} =$ ~~196+~~ $49+104$

$\frac{-7\pm\sqrt{104}}{8}$ $\frac{-7+\sqrt{104}}{8}$ $\frac{1}{2}$

$8x+12x-6 = -8x^2+6x+7.$ $-7+\sqrt{104}$ $4.$

7) $f(ab) = f(a)+f(b)$ $\sqrt{10}$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $f(a) = f(1)+f(a)$

$f(2x) = f(2)+f(x)$ $f(1) = f(\frac{1}{a}\cdot a)$

$0 = f(\frac{1}{a})+f(a) \Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$n = p_1\cdot p_2\cdots p_3\cdot p_n$ $f(n)$

$= f(p_1\cdot p_2) = f(p_1)+f(p_2) \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7.$

$11^{2}i^{7}$ $\quad \frac{-6}{16} =$ $\quad f(x) = f(y)$ $\quad 8.$

$[1;3]$ $\quad -2+3+7.$ $\quad f\left(\frac{\cancel{2}19}{18}\right)$

$\left.\frac{}{}.4\right]\frac{1}{2}$ $\quad 4-\cancel{6} \quad \le \quad \le -8\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{2}+7$ $\quad = f(19)$

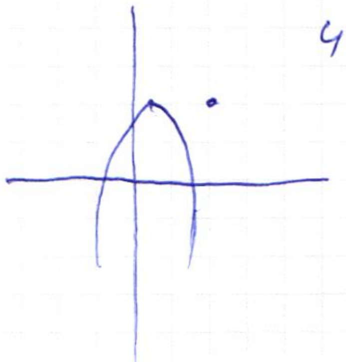
$[2;$ $\quad 2^{3^4}.$ $\quad 4 \le \cancel{\tfrac{1}{2}x+b}\ \frac{1}{2}a+b \le 8.$ $\quad f\left(\frac{20}{19}\right) = f(20) - f(18)$

$2 \le b \le 7.$ $\quad b \ge 2$ $\quad = \left[\frac{19}{2}\right]$

$2 \le a+b \le 5$ $\quad a+b \ge 2+a \ge 2$ $\quad = 9-$

$2+a \le \cancel{4}5.$

$4 \le \frac{1}{2}a+b \le 8.$



$a \le 3.$ $\quad f\left(\frac{19}{20}\right)$

$\frac{-6}{-16} = -\frac{3}{8}$ $\quad \frac{9}{64}\cdot 8\ 4 + \frac{18}{8}+7.$ $\quad = f(19)^{9,5}$

$\frac{9}{8}+\frac{18}{8} = \cancel{\frac{9}{8}}\ \frac{27}{8}+7.$ $\quad -f(2)$ $\quad =1$

$8x^2-6x\cancel{+}-7.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{6}{40}$ $\quad \frac{-7}{8}$ $\quad f(x)-f(y)$

$-8x^2+6x+7 \ge 8x-6|2x-1|$ $\quad -2-$

$-\frac{7}{\cancel{2}22}$ $\quad 8x^2\cancel{+}-6x\cancel{+}-7 \le -8x+6|2x-1|$

$.6$ $\quad 8x^2+2x-7 \le 6|2x-1|$

$\frac{7}{8}$ $\quad 8x^2+2x-7-12x+\cancel{12}6.$ $\quad x \in [1/2;\infty)$

$x_{12} = 3\pm\sqrt{}$ $\quad 8x^2-10x\cancel{+}-1 \le 0$

$x_{12} = \frac{\cancel{100}\pm\sqrt{25+8}+5}{\cancel{16}\ 8} = \frac{\sqrt{33}\pm 5}{8}$

$8x^2+2x-7\ +\cancel{4}12x-6.$ $\quad -8x^2+6x+7$

$8x^2-14x-13 \le 0$ $\quad \frac{6}{8} = \cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{3}{4}.$

$x_{12} = \frac{\pm\sqrt{49+104}+7}{8}$

$-\frac{8\cdot 9}{16}+\frac{18}{4}+7.$

$= -\frac{\cancel{2}\cdot 9}{4}+\frac{18}{4} = 7.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

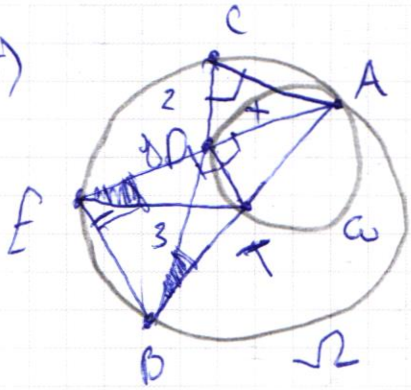
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)



$xy = 6.$

$\frac{x}{x+y} = \frac{r}{R}$

$3 = (R-r)R$

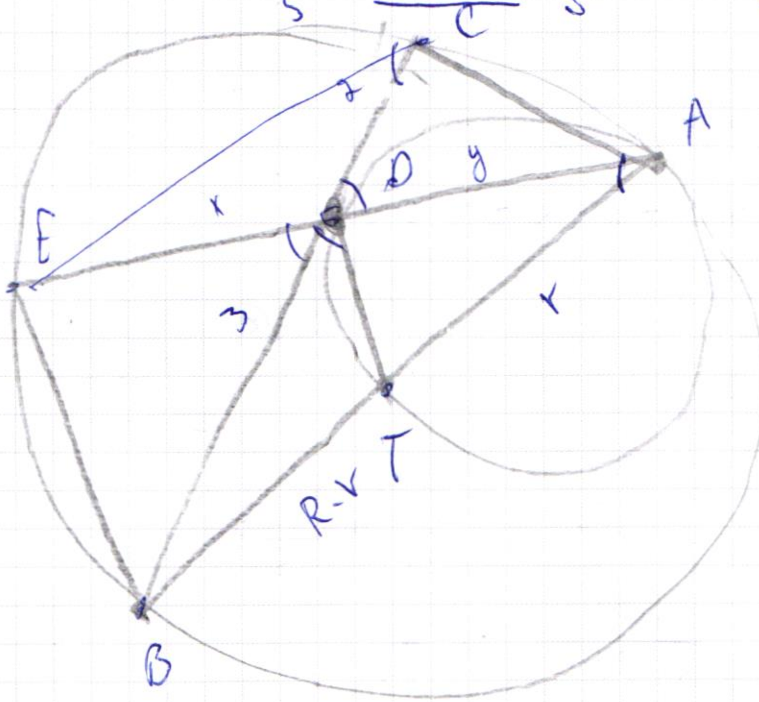
$$\begin{cases} y^2 - 4 = \cancel{25-R^2} \\ xy = 6 \quad R^2 - 25. \\ \frac{r}{R} = \frac{y}{y+x} \\ R(R-r) = 9. \\ 9 - x^2 = R^2 - (x+y)^2 \end{cases}$$

$\frac{y}{5} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{C}$

5

$\sqrt{25-R^2}$

$\frac{AC}{EB} = \frac{2}{3}$



$(R-r)R = 9$

$\frac{y}{x+y} = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{R^2-y^2-x^2-2xy}}$

$9 - \cancel{x^2} = R^2 - 12.$

$-\cancel{x^2} - 2xy$

$-y^2$

$xy = 6.$

$x = \frac{6}{y}$

$\frac{1}{r_2 \cdot \frac{3}{2}} \frac{y}{}$

$\frac{y^2}{6+y^2}$

$R^2 - 12 - y^2 \frac{6}{4} + y$

$= 0$

$\frac{\sqrt{R^2 - y^2 - x^2 - 12}}{\sqrt{25-R^2}}$ $\frac{3}{2}$

$R^2 - y^2 - x^2 - 12 = \frac{9}{4}(25 - R^2)$

$4R^2 - 4(y^2 - x^2) - \cancel{48} = 9(25 - R^2)$

$y^2 - 4 = 25 - R^2$

$\cancel{y^2} = \cdot R^2 = 29 - y^2$

$\cancel{9 - x^2} =$

$\frac{r}{R} =$

$R^2 - 29. = -y^2$

$-29 - x^2 - 12 = \frac{9}{4}(25 - R^2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{r}{R} = \frac{y}{y+x}$ $\qquad \frac{y}{\frac{6}{y}+y} = \frac{y^2}{6+y^2} = \frac{r}{R}$

$\cancel{y=\frac{6}{x}}$ $\quad x = \frac{6}{y}$

$\cancel{25}\ R^2-25 = y^2-4$

$y^2 = R^2-21$

$$\begin{cases} \frac{R^2-21}{6+R^2-21} = \frac{r}{R} \\ R(R-r) = 9 \end{cases}$$

$\frac{R^2-21}{R^2-15} = \frac{r}{R}$ $\qquad -rR+R^2 = 9$

$\frac{R^2-9}{R} = r$

$\frac{R^2-21}{R^2-15} = \frac{R^2-9}{R^2}$

$\frac{x-21}{x-15} = \frac{x-9}{x}$

$x^2-21x = (x-9)(x-15)$

$x^2-21x = x^2-24x+135 = 0$

$\cancel{0}\ 3x = 135$

$x = 45$ $\qquad S \quad \frac{2\sqrt{6}}{\cancel{2}}$ $\quad \frac{2}{2\sqrt{6}}$

$R = 3\sqrt{5}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{6}}$

$r = \frac{45-9}{3\sqrt{5}} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$\cancel{R}\ \frac{r}{R} = \frac{12\sqrt{5}}{5\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$5y^2 = 4(6+y^2)$

$5y^2 = 24+4y^2$ $\quad y^2 = 24$

$y = \sqrt{24}$ $\qquad x = \frac{6}{\sqrt{24}}$

$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{24}+\frac{6}{\sqrt{24}}\right)\left(S = \frac{24+6}{\sqrt{24}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)\cdot 5$

$\frac{30}{24}\cdot 5 = \frac{10}{8}\cdot 5 = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} = \frac{12,5}{2} = 6,25$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c

$b_1, b_1 q, b_1 q^2$

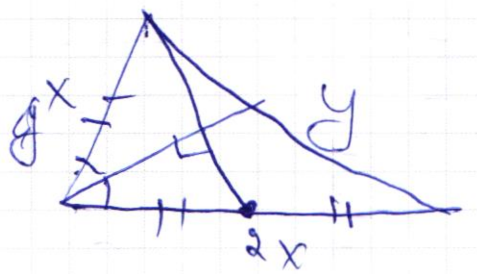
$b_1 \cdot (b_1 q^3)^2 - 2 b_1 q (b_1 q^3) + b_1 q^{32} = 0$

$b_1^2 q^6 - 2 q^4 b_1 + q^2 = 0$

$b_1^2 q^4 - 2 q^2 b_1 + 1 = 0$

$(b_1^2 \cdot q^2)^2 - 2 q^2 b_1 + 1 = 0$

$b_1 \cdot q^2 = 1$



$3x + y = 900$ $\begin{cases} x + y > 2x \\ y < 3x \end{cases}$ $y > x$

$y = 900 - 3x < 3x$ $150 < x < 450$

$900 < 6x$ $(1; 4)$

$150 < x$ $2; 3$

$3x = 900 - y > y$ $450 - 150 - 1 = 299$

$y < 450$ $(x-6)(y-1) = -x - 6y$

$x6 + xy$

3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2 - 12x + 36 - 36 + 2y^2 (\quad 2(y^2 - 2y + 1) - 2 \end{cases}$

$+20$ $(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 38 + 20 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$a^2+2b^2-18=0$ $\quad a=x-6$ $\quad x=a+6$

$b=y-1$ $\quad y=b+1$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0. \end{cases}$ $\quad x-6y=$

$a+\cancel{6}-6b-6$

$a^2-12ab+36b^2=ab$ $\quad a-6b.$

$a^2-13ab+36b^2=0.$ $\quad b=0$?

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+36=0$ $\quad b=\pm 1$

$\frac{a}{b}=4$ $\quad a=4b$ $\quad 16b^2+2b^2-18=0$

$\frac{a}{b}=9$ $\quad a=9b$ $\quad 81b^2+2b^2-18=0.$

$b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

$a=4$ $\quad 4-6<0.$

$b=1$

$a=4$ ~~b−6b~~ $<0.$

$a=-4$ $\quad b=-1$ $\quad b=-\sqrt{\frac{83}{18}}$ $\quad 9b-6b>0.$

$-4+6>0.$

$b=+\sqrt{\frac{88}{18}}$ $\quad 3b=$

$3\sqrt{\frac{83}{18}}=3\sqrt{}$

$a=$

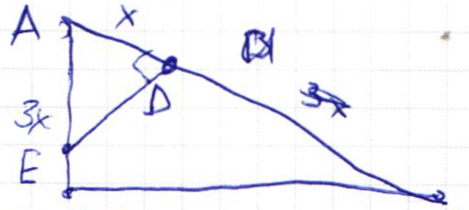
$\cancel{9\cdot\frac{83}{18}\cdot 81+2\cdot\frac{83}{18}}$

$\frac{18}{83}\cdot 81+2.$

$x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6$; $+Q$

$y=0.$; $\sqrt{\frac{18}{83}}+1$

$3AP=AC$

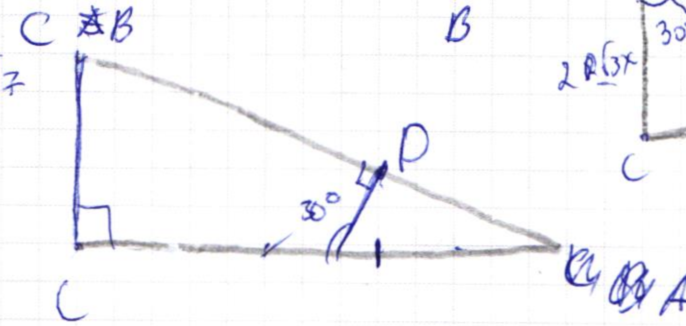


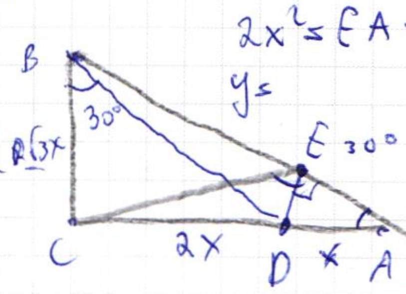
$2x^2=EA\cdot AB.$

$y=$

$\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{7}$

$7\sqrt{3}.$





$2x\cdot ctg30°$

$=\sqrt{3}$

$tg_{BAC}=\frac{2\sqrt{3}x}{3x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)