МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$ $\Rightarrow$ $a_1 a_3 = a_2^2$ $\Rightarrow$ $b^2 = ac$

$ax^2 - 2bx + c = 0$ $\quad x = \frac{2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4b^2}}{2a} = \frac{b}{a}$

$a_4 = \frac{b}{a}$

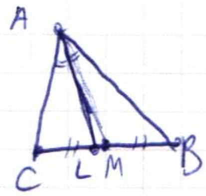
$a_1 a_4 = a_2 a_3 \Rightarrow a \cdot \frac{b}{a} = b \cdot c \quad b = b \cdot c$

$b \neq 0$, т.к. в геом. прогрессии члены никогда не равны 0

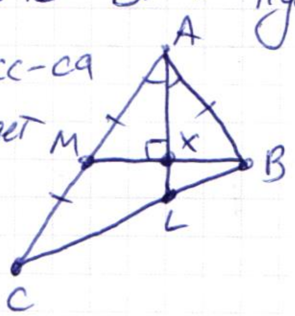
$1 = c$

Ответ: 1

№2) Заметим, что бисс-сы и медианы "идут" внутрь треугольника. Поэтому если мы ∢ бисс-су и медиану из одной в-ны (напр. AL и AM соотв., НУО $\angle MAB \le \angle LAB$), то угол между ними будет меньше, чем половина угла $\angle A$ ($\angle LAM < \angle LAB$). Значит $\angle LAM < \frac{180°}{2} \Rightarrow \angle LAM < 90°$.



Тогда пусть бисс-са AL перп. медиане BM. Пусть $AL \cap BM = (\cdot) X$. Тогда AX – высота и бисс-са в $\triangle MAB \Rightarrow AM = AB \Rightarrow AC = 2AB$. Это работает и в обр. сторону: если $AC = 2AB$, то $AM = AB \Rightarrow \triangle MAB$ – р/б $\Rightarrow$ AX (бисс-са) должна совп. с высотой $\Rightarrow AL \perp BM$.



Значит нужно найти, сколько есть треугольников с $P = 900$, у которых одна сторона в два раза больше другой. Пусть эти стороны – $a, 2a, 900 - 3a$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(прод. №2) Тогда чтобы треуг. существовал, нужно:

$$\begin{cases} 2a < a+900-3a & \Rightarrow 4a < 900 & a<225 \\ a < 2a+900-3a & \Rightarrow 2a<900 \\ 900-3a < a+2a & \Rightarrow 900<6a & a>150 \end{cases}$$

Каждому a соответствует один подходящий треугольник, а каждому подх. треугольнику – своё a.

Значит треугольников $224-150=74$

Ответ: 74

№3) $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ \underbrace{x^2-2\cdot 6x+36}_{(x-6)^2}+\underbrace{2(y^2-2\cdot y+1)}_{2(y-1)^2}=36+2-20 \end{cases}$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $a\geq 6b$, $ab\geq 0$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $b=0\Rightarrow a=0\Rightarrow a^2+2b^2=0$ значит $b\neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+36=0$ $\quad \left(\frac{a}{b}-4\right)\left(\frac{a}{b}-9\right)=0$ $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=4 \\ \frac{a}{b}=9 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right.$

I: $a=4b$

$16b^2+2b^2=18$

$18b^2=18$

$b^2=1$

$b=\pm 1$

$a=-4$, $b=-1$ → $a\geq 6b$ ✓, $ab\geq 0$ ✓

$a=4$, $b=1$ $\quad a\not\geq 6b$ ✗

~~$a=4$ / $b=1$~~

$x=a+6=2$ $\quad y=-1+1=0$

II: $a=9b$

$81b^2+2b^2=18$

$83b^2=18$

$b^2=\frac{18}{83}$

$b=\pm\frac{3\sqrt{83\cdot 2}}{83}=\pm\frac{3\sqrt{166}}{83}$

$a=-\frac{27\sqrt{166}}{83}$ $\quad b=-\frac{3\sqrt{166}}{83}$ $\quad a\not\geq 6b$ ✗

$a=\frac{27\sqrt{166}}{83}$ $\quad b=\frac{3\sqrt{166}}{83}$ $\quad a\geq 6b$ ✓, $ab\geq 0$ ✓

$x=a+6=\frac{27\sqrt{166}}{83}+6$ $\quad y=\frac{3\sqrt{166}}{83}+1$

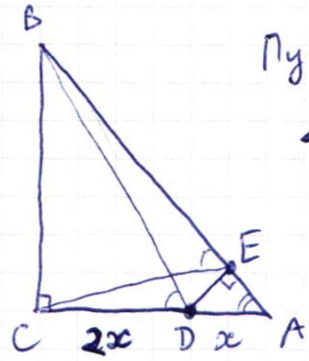
Ответ: $x=2$ $\quad y=0$

$x=\frac{27\sqrt{166}}{83}+6$ $\quad y=\frac{3\sqrt{166}}{83}+1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4)

а)



Пусть $AC = 3x$. Тогда $AD = x$, $DC = 2x$

$\angle BCD = \angle BED = 90^\circ \Rightarrow BCDE$ – впис. 4-угольник

Значит $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ - \angle CED = 60^\circ$

Тогда ~~BC~~ по $\triangle BCD$ $BC = \sqrt{3}\, CD = 2\sqrt{3}x$

$$tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

б) $3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\measuredangle \triangle DEA$ $\quad \exists AE = d,\ DE = a$

$$a^2 + d^2 = x^2$$

$$\frac{a}{d} = tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad a = \frac{2d}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{3}d^2 + d^2 = x^2 \qquad \frac{7}{3}d^2 = \frac{7}{9} \qquad d = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{ad}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad S_{ADE} = \frac{h_E x}{2} \qquad S_{CED} = \frac{h_E \cdot 2x}{2} = 2S_{ADE}$$

$$S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

~~Ответ: $S_{CED} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$~~

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

№6)

$x=1:\quad a\cdot 1+b\le -8\cdot 1+6\cdot 1+7 \qquad a+b\le 5 \quad (1)$

$x=\frac{1}{2}:\quad 8\cdot\frac{1}{2}-6\cdot|0|\le a\cdot\frac{1}{2}+b \qquad \frac{a}{2}+b\ge 4 \quad (2)$

$x=-\frac{1}{2}:\quad a\cdot\frac{-1}{2}+b\le -8\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2}+7 \qquad \frac{-a}{2}+b\le 2 \quad (3)$

$(1)-(2):\quad \frac{a}{2}\le 1 \qquad a\le 2$

$(2)-(3):\quad a\ge 2 \longrightarrow a=2$

$(1):\ 2+b\le 5 \qquad b\le 3$

$(2):\ 1+b\ge 4 \qquad b\ge 3 \Rightarrow b=3$

$a=2,\ b=3$ подходит

$8x-6|2x-1|\le 2x+3$

$6x-3\le 6|2x-1|$

$2x-1\le 2|2x-1|$

$a\le 2|a| \leftarrow \forall a$ ✓

$(a\le |a|,\ 2|a|\ge |a|)$

$2x+3\le -8x^2+6x+7$

$8x^2-4x-4\le 0$

$2x^2-x-1\le 0$

~~$x=\frac{1+\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$~~

$\underbrace{(x-1)}_{\substack{\ge 0 \\ \text{при } x\le 1}}\underbrace{(2x+1)}_{\substack{\ge 0 \\ \text{при } x\ge -\frac{1}{2}}}\le 0$ ✓ ✓

Ответ: $(2;3)$

№7)

Выпишем ~~fa~~ $f(a)$ для $\mathbb{N}$ $a\in[2;22]$

$\mathbb{P}$:

2	1	$4=2\cdot 2$	$1+1=2$	$16=2\cdot 8$	$1+3=4$
3	1	$6=2\cdot 3$	$1+1=3$	$18=2\cdot 9$	$1+2=3$
5	2	$8=2\cdot 4$	$1+2=3$	$20=2\cdot 10$	$1+3=4$
7	3	$9=3\cdot 3$	$1+1=2$	$21=3\cdot 7$	$1+3=4$
11	5	$10=2\cdot 5$	$1+2=3$	$22=2\cdot 11$	$1+5=6$
13	6	$12=2\cdot 6$	$1+3=4$		
17	8	$14=2\cdot 7$	$1+3=4$		
19	9	$15=3\cdot 5$	$1+2=3$		

1	2 3
2	4 5 6 9
3	7 8 10 12 15 18
4	14 16 20 21
6	13 22
др.	11 17 19

$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$

$\forall x,y \left[\begin{array}{ll} f(x)=f(y) & \text{— +0 в кол-во пар} \\ f(x)\ne f(y) & \text{— +1 в кол-во пар} \end{array}\right.$

(либо $f(x)<f(y)$, либо $f(y)<f(x)$)

Всего неуп. пар $x\ne y$ $C_{21}^2=\frac{20\cdot 21}{2}=10\cdot 21=\cancel{231}\ 210$

Из них $f(x)=f(y)$ в $\underset{(1)}{C_2^2}+\underset{(2)}{C_4^2}+\underset{(3)}{C_6^2}+\underset{(4)}{C_4^2}+\underset{(6)}{C_2^2}=1+6+15+6+1=29$

$210-29=181$

Ответ: 181

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

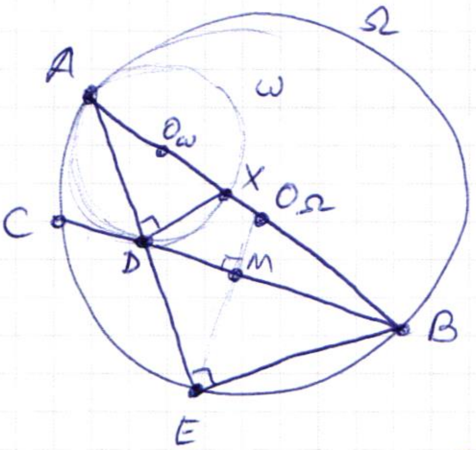
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5)



$\exists\ X = AB \cap \omega$

O_ω, O_Ω – центры ω и Ω соотв.

∢ гомотетию с ц. в A: $\omega \to \Omega$

$O_\omega \to O_\Omega$

$D \to E,\ X \to B$

$O_\omega D \perp CB \Rightarrow O_\Omega E \perp CB$

$\exists\ M = O_\Omega E \cap CB$ $\quad M$ – сер. CB $(OC = OB)$

$\angle ADX = \angle AEB = 90^\circ$ т.к. AX и AB – диам. ω и Ω соотв.

$CM = BM = \frac{BC}{2} = 2.5 \qquad DM = 2.5 - 2 = 0.5$

$\angle BEM = 90^\circ - \angle DEM = 90^\circ - (90^\circ - \angle EDM)$

$\angle BEM = \angle EDM \Rightarrow \triangle DME \sim \triangle EMB$

$\frac{DM}{ME} = \frac{EM}{MB} \qquad EM^2 = DM \cdot MB$

$EM^2 = 1.25 = \frac{5}{4}$

$EB^2 = BM^2 + ME^2 = \frac{25}{4} + \frac{5}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

$ED^2 = DM^2 + ME^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\deg_\Omega(D)$: $CD \cdot DB = AD \cdot DE$

$6 = AD \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$

$AD = 6\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$

$AE = 2\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

$AB^2 = AE^2 + EB^2 = \frac{25 \cdot 6}{4} + \frac{15}{2} = \frac{75}{2} + \frac{15}{2} = \frac{90}{2} = 45$

$AB = 3\sqrt{5} \qquad R_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

По гомотетии $\frac{AX}{AB} = \frac{AD}{AE} \qquad \frac{AX}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{5\sqrt{6}}{2}} = \frac{4}{5} \qquad AX = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$R_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$CD = 2$
$BD = 3$
$BM = 2.5$
$DM = 0.5$
$EM = \frac{\sqrt{5}}{2}$
$EB = \sqrt{\frac{15}{2}}$
$ED = \sqrt{\frac{3}{2}}$
$AD = 2\sqrt{6}$
$AE = \frac{5\sqrt{6}}{2}$
$AB = 3\sqrt{5}$
$AX = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

(прод. N5)

$$S_{BACE} = S_{BAC} + S_{CEB} = \frac{h_A \cdot CB}{2} + \frac{h_E \cdot CB}{2} \cancel{= h_A \cdot D}$$

$h_E \cdot CB = EM \cdot CB = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ $\qquad S_{CEB} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

$$S_{BAC} = \frac{h_A \cdot CB}{2} = \frac{h_A \cdot DB}{2} \cdot \frac{CB}{DB} = S_{ADB} \cdot \frac{CB}{DB} = \frac{h_B \cdot AD}{2} \cdot \frac{CB}{DB} =$$

$$\cancel{= \frac{h_B \cdot AE}{2} \cdot \frac{AD}{AE} \cdot \frac{CB}{DB} = S_{ABE} \cdot \frac{AD}{AE} \cdot \frac{CB}{DB} = S_{AEB} =}$$

$$\cancel{= \frac{ABE \cdot EA \cdot AD \cdot CB}{2\,AE \cdot DB} = \frac{EB \cdot AD \cdot BC}{2BD}}$$

$$= \frac{BE \cdot AD \cdot CB}{2\,BD}$$

$$S_{BAC} = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{15 \cdot 3}}{3} = 5\sqrt{5}$$

$$S_{BACE} = 5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ:

$R_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$R_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ac=b^2$ $\qquad ax^2-2bx+c=0$ $\qquad a\ b\ c\ \frac{b}{a}$

$x=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4b^2}}{2a}=\frac{b}{a}$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2=18$

$\frac{a}{b}=\left[\begin{matrix}9\\4\end{matrix}\right.$ $\qquad c^2=\frac{b^2}{a}$ $\qquad a^2c^2=b^4$

$\times\frac{36}{4}$ $\quad 144$

$a^2\cdot\frac{b^2}{a}$ $\quad ab^2$

$\cancel{a^2+a+2b^2=}$ $\qquad a^2+2(b-3)(b+3)=0$

$a^2+2(b^2-9)=0$

$\cancel{a^2-13ab+36b^2=0}$

$\cancel{a=\frac{13b\pm\sqrt{169b^2-144b^2}}{2}=}$

$=13b\pm\sqrt{}$

$a=b^2$ $\qquad c=1$

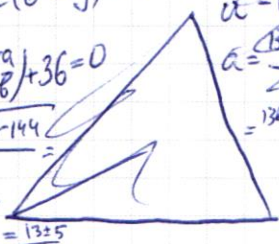
$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+36=0$

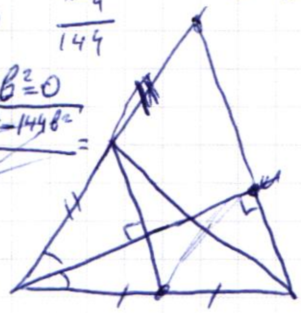
$\frac{a}{b}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=$

$=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm5}{2}$

9

4

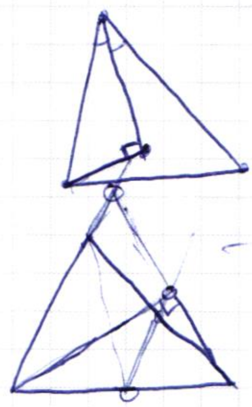




$a=x-6$

$b=y-1$

$\cancel{a=b}$



$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2=18$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$13ab-34b^2=18$

$a=\frac{18+34b^2}{13b}$

$\frac{18+34b^2-78b^2}{13b}=\sqrt{\frac{18+34b^2}{13}}$

$18-44b^2$

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

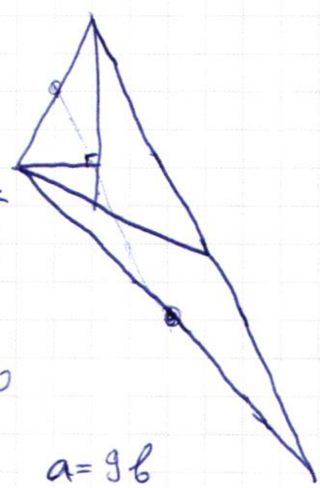
$x^2-12x+36$ $\qquad (x-6)^2+2(y-1)^2=$

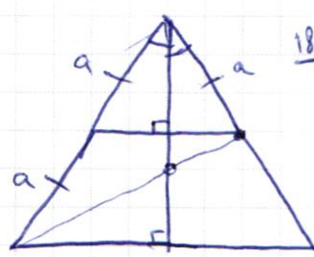
$2(y^2-2y+1)$ $\qquad (6y-6)^2$ $\quad =18$

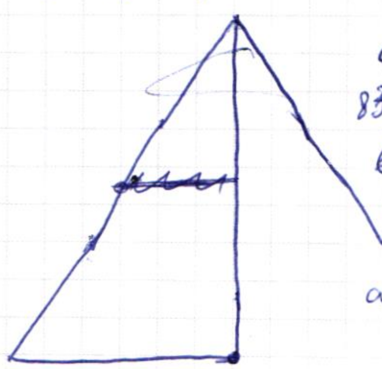
$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2-\cancel{xy}13xy+36y^2+6y+x-6=0$

$x\geq 6y$







$a=9b$

$83b^2=18$

$b^2=\frac{18}{83}$

$b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}$

$a=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}$

$a+2a+b=900$

$3a+b=900$

$6a \quad 4a$

$a+b>2a$ $\qquad b>a$

$3a>b$ $\qquad b<3a$

$4a<900$ $\qquad 6a>900$

$a<9\cdot25=225$ $\qquad a>150$

$18\geq36(y-1)^2+2(y-1)^2=38(y-1)^2$

$(y-1)^2\leq\frac{9}{19}$ $\qquad y-1\leq\frac{3}{\sqrt{19}}$

$xy-6y-x+6=x(y-1)-6(y-1)=$

$xy-6y-x+6=x(y-1)-6(y-1)=\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(y-1)}_{b}$

$a-6b=\sqrt{ab}$ $\qquad a^2+2b^2=18$

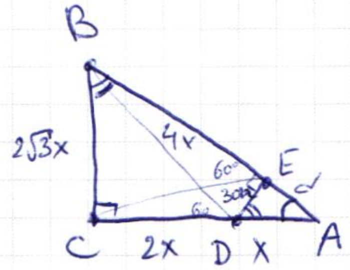
$a^2-12ab+6b^2=ab$ $\qquad a^2-13ab+6b^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$a^2+d^2=x^2$

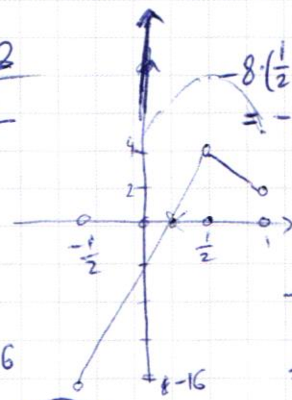
$\frac{a}{d}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}d$

$\frac{4}{3}d^2+d^2=x^2$

$\frac{7}{3}d^2=x^2$ $\qquad d=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}}$

$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$



$-8\cdot(\frac{1}{2})^2+6\cdot\frac{1}{2}+7=$

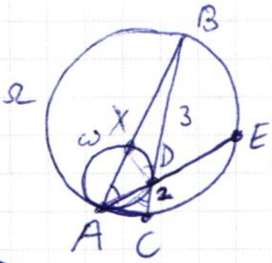
$=-2+3+7=8$

$-8+6+7=5$

$-8(-\frac{1}{2})^2-6\cdot\frac{1}{2}+7=$

$=-2-3+7=2$

$-8x^2+6x+7=-4x+6$

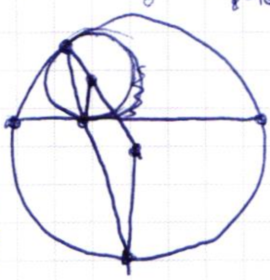


$BX\cdot BA=9$

$-8x^2+10x+1=0$

$8x^2-10x-1=0$

$x=\frac{10\pm\sqrt{100+32}}{16}$



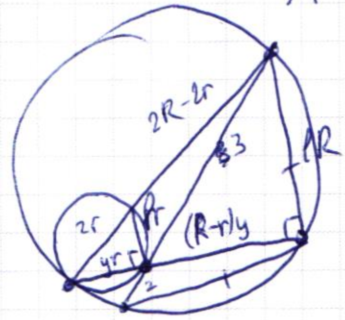
$\frac{1}{2}\to 4$

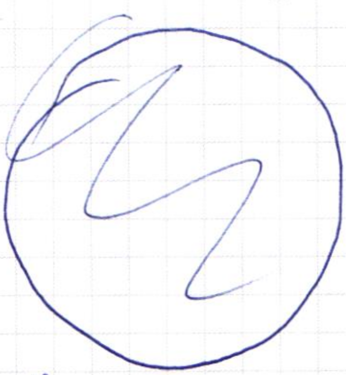
$1\to 5$

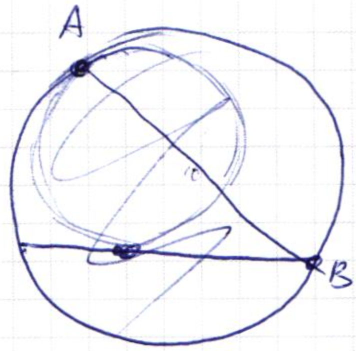
$0\to 3$

$2x+3$

$-\frac{1}{2}:\ \frac{2}{2}$



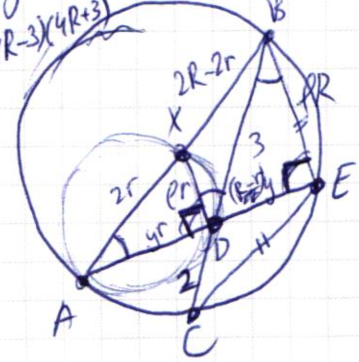




$l^2R^2+(R-r)^2y^2=9$

$l^2R^2+gR^2y^2=4R^2$

$y^2 r(2R-r)=(4R-3)(4R+3)$



$\underset{2R-2r}{BX}\cdot\underset{2R}{AB}=9$ $\qquad R(R-r)=\frac{9}{4}$

$AD\cdot DE=6$

$\cancel{\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AX}}$ $\qquad \frac{AD}{AX}=\frac{AE}{AB}$

$l^2R^2+(R-r)^2y^2=9$

$\frac{l^2R^2+y^2R^2-2Rry^2+r^2y^2=9}{4R^2}$

$a+b\le 5$

$\frac{a}{2}+b\ge 4$ $\quad\to \frac{a}{2}\le 1$

$\frac{-a}{2}+b\le 2$ $\quad\to a\ge 2$

$\frac{AX}{AD}=\frac{BD}{BE}$

$\frac{2R}{yR}=\frac{3}{lR}$

$4R^2=l^2R^2+y^2R^2$

$l^2+y^2=4$

$y=\frac{2lR}{3}$ $\qquad \frac{4l^2R^2}{9}$

$(4R^2+9)l^2=36$

$2+b\le 5$ $\qquad b\le 3$

$1+b\ge 4$ $\qquad b\ge 3$

l

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$~~ $f: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$ ~~$f(2)=$~~

$n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$

$f(n) = f(\underbrace{p_1 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{a_1} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_2}_{a_2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{p_k \cdot \ldots \cdot p_k}_{a_k}) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(p_i) =$

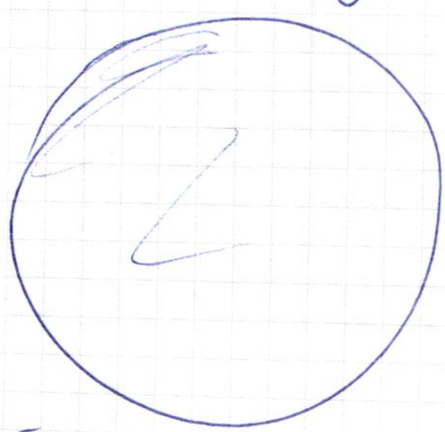
$= \sum_{i=1}^{k} a_i [\frac{p_i}{2}]$

$\underbrace{f(\frac{k}{l} \cdot l)}_{f(k)} = f(\frac{k}{l}) + \underbrace{f(l)}_{f(l)}$ $f(\frac{k}{l}) = f(k) - f(l)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$(x;y)$ $f(x) < f(y)$

2	1	9	2	16	4
3	1	10	3	17	8
4	2	11	5	18	3
5	2	12	3	19	9
6	2	13	6	20	4
7	3	14	4	21	4
8	3	15	3	22	6

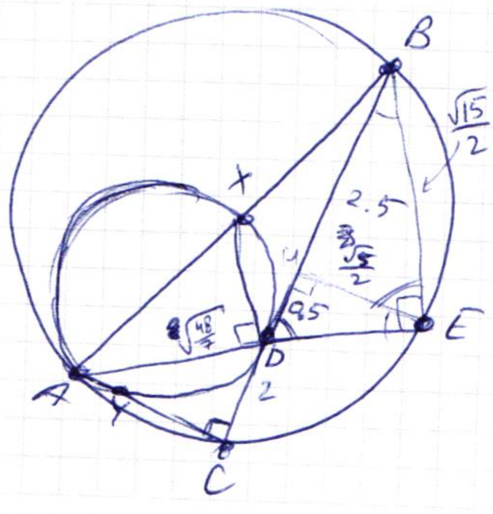


$\frac{21}{4} k = 36$

$k = \frac{48}{7}$

$3.75 + x^2 = 9$

$x^2 = 5.25 = \frac{21}{4}$



$CA \cdot CY = 4$ $CA^2 + 25 = BA^2$

$BA \cdot BX = 9$

$1.25 + 2.5 = 3.75 =$
$= 15 - 0.5^2 =$
$= \frac{\sqrt{15}}{2}$

$\frac{EH}{DH} = \frac{BH}{EH} \Rightarrow EH^2 = 2.5 \cdot 0.5 = 1.25$

$EH = \frac{\sqrt{125}}{10} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\frac{6\sqrt5}{5} - \frac{3\sqrt5}{2} = \frac{12\sqrt5 -}{10}}$

$\frac{3\sqrt5}{2} - \frac{6\sqrt5}{5} = \frac{15\sqrt5 - 12\sqrt5}{10} =$

$= \frac{3\sqrt5}{10}$

$\cancel{\frac{12\sqrt5}{5}}$

$\frac{3\sqrt5}{2} \cdot \frac{3\sqrt5}{10} = \frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{9}{4}$ ✓

$2 - 7$

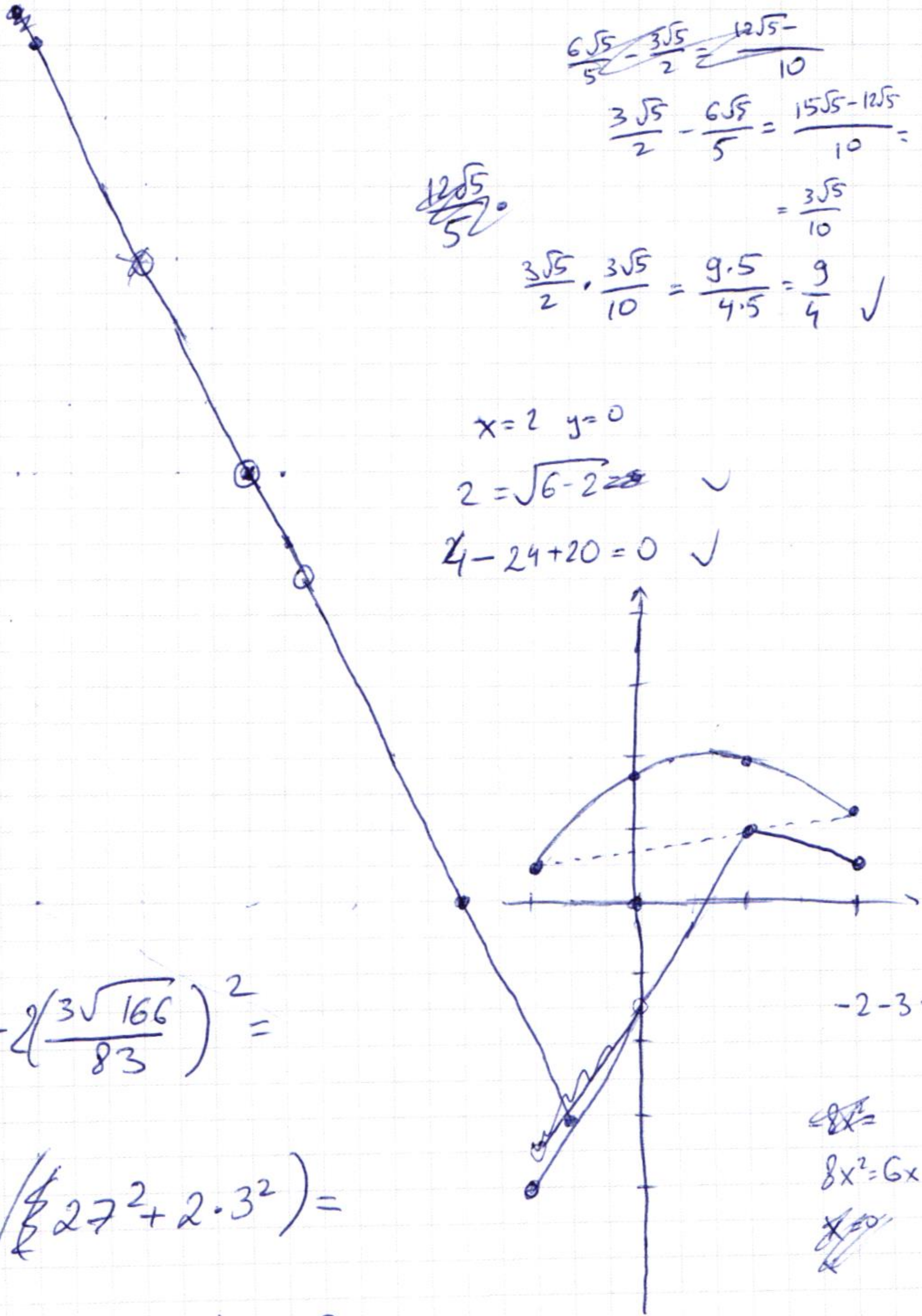
$15 - 3 = 12$

2 1
3 1
4 2
5 2
6 3
x 3

$x = 2 \quad y = 0$

$2 = \sqrt{6-2}$ ✓

$4 - 24 + 20 = 0$ ✓



$-2 - 3 + 7 = 2$

$\cancel{8x^2}$

$8x^2 = 6x$

$\cancel{x = 0}$

$$\left(\frac{27\sqrt{166}}{83}\right)^2 + 2\left(\frac{3\sqrt{166}}{83}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{83} \cdot \left(27^2 + 2 \cdot 3^2\right) =$$

$$= \frac{2}{83} \cdot (729 + 18) = \frac{2}{83} \cdot 747$$

$$\begin{array}{r} \times\, 83 \\ 9 \\ \hline 747 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)