

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
- [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
- [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

- [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3 $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}; \quad x \geq 6y \\ (x-6)^2 - 36 + 2(y-1) - 2 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 18xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - (x-6y) = \sqrt{y(x-6) - (x-6)^2} \\ \begin{cases} x-6y = \sqrt{y(x-6)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1) = 18 \end{cases} \end{cases}$

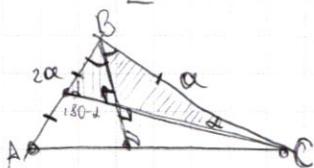
3//: $a = x - 6; \quad b = y - 1 \Rightarrow x = a + 6; \quad y = b + 1; \quad ab \geq 0$

$\begin{cases} a + 6 - 6b - 6 = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 = \sqrt{18 - 2b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 - 2b^2 - 13\sqrt{18 - 2b^2} \\ a^2 = \sqrt{18 - 2b^2} \end{cases}$

N2. $P = 5000$

$b \perp m$



$AB = 2BC$

$AC \leq 3a$ and $2a \leq AC + a$

$a \leq AC$

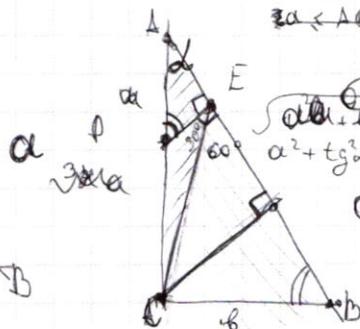
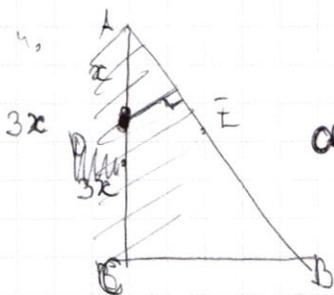
$P = 3a + AC; \quad 3a = 500 - AC$

$500 - 3a = AC \leq 3a; \quad 500 \leq 6a; \quad 150 \leq a$

$AC \leq 500 - AC; \quad AC \leq 250$

$500 - 3a \leq 3a$

$2a \leq AC = 500 - 3a; \quad 4a \leq 500; \quad a \leq 125$



$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}k$

$\textcircled{2} \quad \text{tg } \alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{EB}$

$DE = \frac{1}{3}BC; \quad AE = \frac{1}{3}EB$

$AE = AB - EB; \quad \text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$

$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \text{tg } \alpha a^2 = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(\sin 120^\circ EC \cdot AE + \sin 60^\circ EB \cdot EC) = \frac{1}{2} \sin 60^\circ EC \cdot AB = \frac{1}{2} \sin 60^\circ EC$

$\frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{EC}{\sin \alpha}; \quad a = \frac{\sin 120^\circ EC}{\sin \alpha}$

$\text{tg } \alpha a^2 = \sin 60^\circ$

N3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \sqrt{ab + 2b} \\ a^2 - 12b + 36b^2 \end{cases}$

$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) \quad f(a - \frac{1}{a}) = 0 = f(a) + f(\frac{1}{a})$ (свойство)

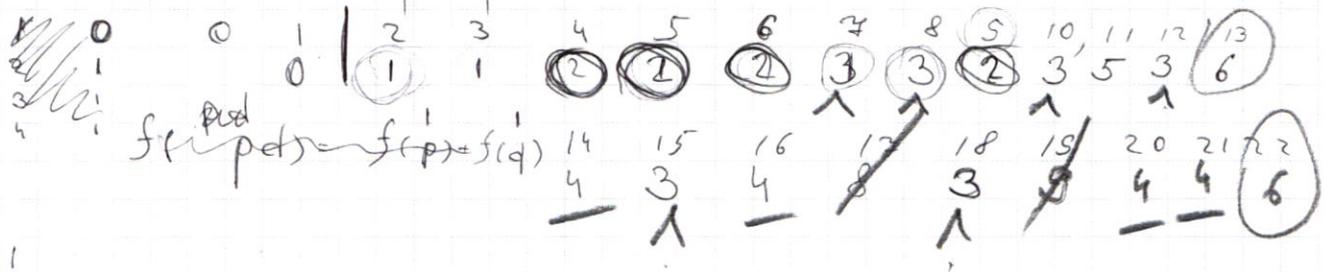
$f(p) = f(1 \cdot p) = f(1) + f(p) \Rightarrow f(1) = 0$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a) = -\left[\frac{p}{a}\right] \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) \searrow \Rightarrow \text{нум } a \nearrow, f\left(\frac{1}{a}\right) \searrow$$

$$f\left(\frac{pq}{a}\right) = f\left(\frac{p}{a}\right) + f\left(\frac{q}{a}\right) \quad \text{или } f\left(\frac{p}{a}\right) + f\left(\frac{q}{a}\right) - f\left(\frac{p}{a}\right) - f\left(\frac{q}{a}\right) = 0$$

$$= f(p) + f(q) - 2f\left(\frac{1}{a}\right) = f(p) + f(q) - 2f(a)$$

$$f\left(\frac{p_1 p_2 \dots p_n}{q_1 q_2 \dots q_m}\right) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) - f(q_1) - \dots - f(q_m) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m q_j$$



N 6 $8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

1. если $2x \geq 1, x \geq \frac{1}{2}$

$$8x - 12x + 6 = -4x + 6$$

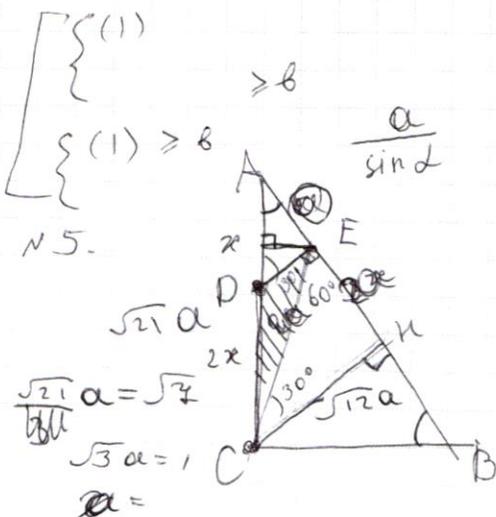
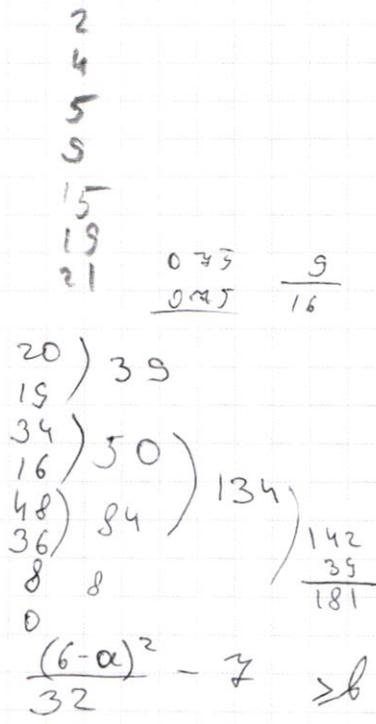
если $2x \leq 1, x \leq \frac{1}{2}$

$$8x + 6 - 2x + 6 = 20x + 6$$

2. $-2(4x^2 - 3x - 3,5) = -2((2x)^2 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}x - 3,5)$

$$\begin{cases} (a+4)x + (b-6) \leq 0 \\ (20-a)x + (6+b) \leq 0 \\ 0 \leq -8x^2 + (6-a)x + (7-b) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Delta \geq 0: 36 - 12a + a^2 + 32(7-b) \geq 0;$$



используем $\triangle ADE \sim \triangle ACB: \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\triangle ACE \sim \triangle ACB$

$$AC^2 = a^2 + 16a^2 + x \cos^2 60^\circ \cdot 4a \cdot a = 21a^2$$

$$AC = a\sqrt{21}$$

$$21 - 9 = 12$$

$$\frac{\sqrt{12}a}{3a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \sqrt{2} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \quad | : b^2 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2}{b^2} - 13 \frac{a}{b} + 36 = 0 \quad (1) \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$(1): \quad \begin{cases} t = \frac{a}{b} \\ \mathcal{D}: t \geq 0 \end{cases}; \quad t^2 - 13t + 36 = 0; \quad \mathcal{D} = 169 - 144 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \quad (1,7) \\ 4 \quad (1,2) \end{cases}$$

возвр к замене

$$(1.1) \quad \begin{cases} a = 9b \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}; \quad \begin{cases} 83b^2 = 18 \\ a = 9\sqrt{\frac{18}{83}}; \quad 2c = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} b = \sqrt{\frac{18}{83}} \\ y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \end{cases}$$

$$(1.2) \quad a = 4b \quad (\text{не ур})$$

$$\text{Ответ: } \left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CD = 2$$

$$BD = 3$$

Найти:

$r; R$

S_{BACE}

③ ΔBDN -прямоугольн: по Т теор: $BN^2 = 3^2 + DN^2$

$$(2R - r)^2 - r^2 = 3^2$$

$$\& 2R \cdot (2R - 2r) = 3^2$$

④ $\angle B$ (А отбрасывается на ВА) $\Rightarrow \angle B(A) = 90^\circ$
ВА - диаметр

⑤ $\Delta B(A)$ и ΔBDN - прямоугольн (по окруж): $\angle B$ - общий

$\Delta B(A) \sim \Delta BDN$ (по II углам)

⑥

$$\frac{BA}{BN} = \frac{5}{3}; \quad \frac{2R}{2R - r} = \frac{5}{3}; \quad 6R = 10R - 5r; \quad r = 0,8R$$

⑥ $2R(2R - 1,6R) = 3^2; \quad 0,8R^2 = 5; \quad R^2 = \frac{5 \cdot 3^2}{2^2}; \quad R = 1,5\sqrt{5}$
 $r = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} \sqrt{5} = 1,2\sqrt{5}$

⑦ ~~$S_{BACE} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \tau$~~ ΔBAC - прямоугольн: $CA^2 = 25 - (5(3 - 1,2))^2 = 25 - 5^2(1,8)$

ΔBAC - прямоугольн: по Т теор $CA^2 = -25 + (2R)^2 = -25 + \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2} = 45 - 20 = 15; \quad CA = \sqrt{15}$

⑧ ΔCAD - прямоугольн: по Т теор $DA = \sqrt{15 + 4} = \sqrt{19}$

⑨ окруж Ω по Т о пересек - в хордах $ED \cdot DA = 6; \quad ED = \frac{6}{\sqrt{19}} = \frac{6\sqrt{19}}{19}$

⑩ ΔCAD - прямоугольн: $\sin \angle CDA = \frac{\frac{6}{\sqrt{19}}}{\sqrt{19}}$

⑪ $S_{BACD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle CDA = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{19}} + \sqrt{19} \right) \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{19}} = \frac{1}{2} \left(\frac{30}{\sqrt{19}} + 5 \right) \sqrt{19} =$
 $\frac{12,5\sqrt{19}}{2 \cdot \sqrt{19}} = \frac{12,5\sqrt{19}}{38}$

Ответ: $R = 1,5\sqrt{5}; \quad r = 1,2\sqrt{5}; \quad S = \frac{12,5\sqrt{19}}{38}$

№ 2 Дано: ΔABC

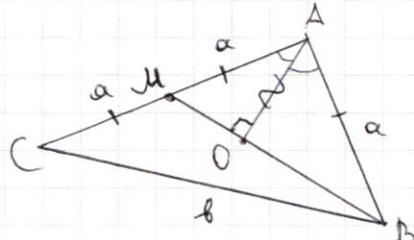
Решение:

$P = 500$

$$\begin{aligned} AB &= a \\ BC &= b \\ CA &= c \end{aligned}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$
 биссектриса \perp медиана
 высоты:

ка-во $\triangle ABC$



① $\triangle MOA$ и $\triangle BOA$ -
 прямые:

OA - общ

$$\angle MOA = \angle OAB$$

$$\triangle MOA = \triangle BOA$$

(по катету и гипотенузе к остому углу)
 $MA = BA = a$

② $CM = MA = a$ по отк медианы

$$P = a + b + c = 3a + b = 500; \quad b = 500 - 3a \quad (1), \quad b$$

③ по Т.о соотнош-ии сторон Δ :
 $3a = 500 - b$

$$\begin{cases} a < 2a + b \\ 2a < a + b \\ b < 3a \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < a + b (2) \\ a < b \\ b < 3a \end{cases}; \quad \begin{cases} a < b = 500 - 3a \\ 500 - 3a = b < 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a < 500 \\ 500 < 6a \end{cases}; \quad \begin{cases} 150 < a < 225 \end{cases}$$

④ из (1) следует, что кажде знак a соотв-ет-ся знак b и наоборот
 для каждого a суц-ет единств $\triangle ABC$ со сторонами

$$AB = a \in \mathbb{Z}$$

$$AC = 2a \in \mathbb{Z}$$

$$BC = \underbrace{500}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{3a}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{⑤ Ка-во } \Delta = 224 - 150 = 74$$

Ответ: 74

$$\text{НЗ. } \begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}; \quad \text{D: } \begin{cases} xy - 6y - x + 6 \geq 0 \\ x \geq 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} \\ (x^2 - 12x + 36) - 36 + (2y^2 - 4y + 2) - 2 + 20 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + (y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\text{З// } a = x - 6, \quad b = y - 1 \Rightarrow x = a + 6, \quad y = b + 1 \quad \text{D: } \begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 6b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 6 - 6b - 6 = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7. Дано: $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \lfloor p/2 \rfloor$, $p \in$ простые числа

Решение: $f(a) = f(1 \cdot a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$$f(1) = 0 \quad (1)$$

$$f(1) = 0; f\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = 0; f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a) = 0; f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a) \quad (2)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) - f(b) \quad (3)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0 \Leftrightarrow f(a) - f(b) \geq 0 \Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \quad (3)$$

Зная $f(p) = \lfloor p/2 \rfloor$, $p \in$ прост. числа; $f(ab) = f(a) + f(b)$ узнаем $f(2) \dots f(22)$

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(a)$	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8

18	19	20	21	22
3	5	4	4	6

Значение $f(a)$	Кол-во $f(a)$	Кол-во чисел стоящих $f(a)$
5	1	20
8	1	15
6	2	17
3	1	16
4	4	12
3	6	6
2	4	2
1	2	0

И по (3): $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow$ для каждого y будет образе
кака пара со всеми x , если $f(x) \leq f(y)$

$$\text{Кол-во пар} = (22-1) \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 13 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 8 =$$

$$20 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 12 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 181$$

Ответ: 181

№5 Дано:

Решение:

$\triangle ABC$ - прямоугольный

$D \in AC$; $E \in AB$

$AD:AC = \frac{1}{3}$

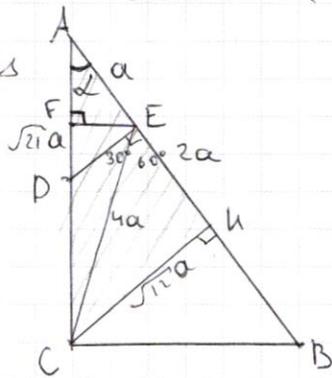
$DE \perp AB$

$\angle CED = 30^\circ$

$AC = \sqrt{7}$

Найти:

$S_{\triangle CED}$



① $\angle DEB = \angle DEC + \angle CEB \Rightarrow \angle CEB = 50 - 30 = 60^\circ$

② Опустим CH - перпенд-яр $\triangle ABC$

③ $\triangle ADE$ и $\triangle ACH$: $\angle E = \angle H$
 $\angle A$ - общ

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$ (по 2-м углам)

$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EH = 2AE = 2a$

$\cos 60^\circ = \frac{2a}{CE}$; $CE = 4a$

④ $\triangle ACE$: по т. кос $AC^2 = a^2 + 16a^2 - 2 \cos 120^\circ 4a \cdot a =$

$= 17a^2 + 4a^2 = 21a^2$

⑤ $\triangle ACH$: по т. Пифагора $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 21a^2 - 9a^2 = 12a^2$

$\operatorname{tg} \angle = \frac{\sqrt{12}a}{3a} = \frac{\sqrt{12}}{3}$; $\sin \angle = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{28}}{7}$

б) ① Опустим EF - перпенд на AC

② $AC = \sqrt{21}a = \sqrt{7}$; $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$DC = AC - AD = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}(\sqrt{21}a) = \frac{2\sqrt{21}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

③ $\triangle AFE$: $FE = a \sin \angle = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

④ $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} FE \cdot CD = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2\sqrt{21}}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{1 \cdot 2\sqrt{4}}{2 \cdot 3\sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{12}}{9}$

Ответ: $\operatorname{tg} \angle = \frac{\sqrt{12}}{3}$; $S = \frac{\sqrt{12}}{9}$

№5 Дано

Решение

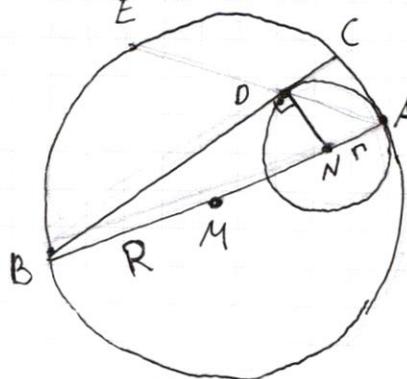
окр Ω
окр ω

$\Omega \cap \omega = A$

AB - диаметр Ω

BC - касательная к ω

$AD \cap \Omega = E$



① BC - касательная к ω

$BC \perp DN$ (по св. вы касат-ой)

② Ω и ω касаются

A, M, N лежат на прямой



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)