МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

№1.

$a = a \quad b = ak \quad c = ak^2 \quad x_1 = ak^3$

$ax_1^2 + 2bx_1 + c = a^3k^6 + 2a^2k^4 + ak^2 = 0 \qquad a \neq 0 \quad k \neq 0$

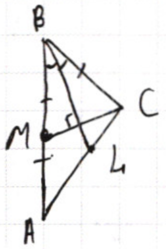
$a^2k^4 + 2ak^2 + 1 = 0$

$(ak^2+1)^2 = 0 \qquad ak^2 = -1 = c$

Если же a либо $k = 0$, то $ak^2 = 0$, $x_1 = \overset{ak^3}{0}$ подходит в качестве корня.

Ответ: $\{-1; 0\}$.

№2.

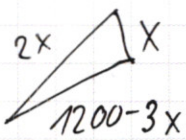


т.к. в $\triangle MBC$ BL - биссектриса и высота, то он равнобедренный.

$\Downarrow$

$AB = 2BC$

Обратное также верно: если у треугольника есть стороны x и $2x$, то условие задачи выполнено, т.к. $\triangle MBC$ будет равнобедр.

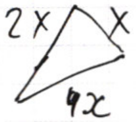


1) $3x > 1200 - 3x$ (нер-во треуг)

2) $\underbrace{1200 - 2x > 2x}$ 3) $1200 - x > x$

$300 > x > 200 \Rightarrow 98$ вариантов.

Пересечений не будет, т.к. я рассматриваю варианты, когда стороны x и $2x$ идут в таком порядке в положительном направлении, и если бы варианты совпали, то был бы треугольник вида



$p = 7x$. Но $1200 \not\vdots 7 \Rightarrow$ совпадений не будет

Ответ: 98.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

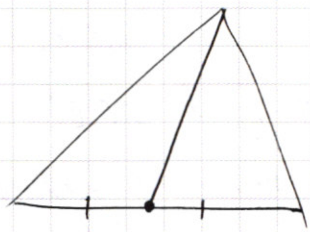
$a \quad ak \quad ak^2 \quad ak^3 \qquad a^3k^6 + 2a^2k^4 + ak^2 = 0$

$a^2k^4 + 2ak^2 + 1 = 0$

$(ak^2+1) = 0 \qquad ak^2 = c = -1$

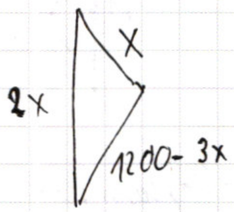
$(x-1)(y-2) = xy - 2x - y + 2$

$\cancel{(y-2x)}(y-$



$2x + x > 1200 - 3x$

$300 > x > 200$



$1200 - 2x > 2x \qquad x < 300$

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \qquad a = x-1 \quad b = y-2$

$\cancel{y^2 - 4y + 4 = 2 - 2x^2 + 4x} \qquad \cancel{b - 2a = \sqrt{ab}}$

$(y-2)^2 = y^2 - 4y + 4 \qquad 2x^2 - 4x - 1$

$(y-2x)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy \qquad -2x^2 - 4x - 4y - 4xy$

$\cancel{(x-2y)} \qquad 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 3$

$6x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x - 4y + 3 = xy - 2x - y + 2$

$6x^2 + 2y^2 - 5xy - 2x - 3y + 1 = 0$

$4a^2 + b^2 - 4ab = ab$

$4xy - 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 2x + y - xy - 2$

$4a^2 + b^2 - 5ab = 0$

$5xy - 2x^2 - 6x - 5y + 5 = 0$

$(a-b)(4a-b) = 0$

$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$

$\cancel{b=b} \begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$

$y^2 - 4y + 1$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$b = \sqrt{3 - 2a^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$

$a=x-1$

$b=y-2$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad b^2+4a^2-4ab=ab \quad b^2+4a^2-5ab=(a-b)(4a-b)=0$$

1) $a=b$ $\qquad y-2x\geqslant 0$

$2a^2+b^2=3a^2=3 \quad a=\pm1 \quad$ $x=2,\ y=3$ не подходит.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

2) $4a=b \quad 2a^2+b^2=18a^2=3$

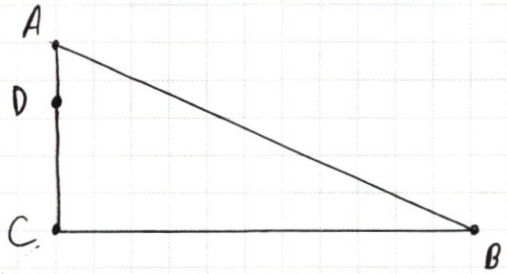
$a=\pm\frac{1}{\sqrt6} \quad b=4a=\sqrt{\frac{8}{3}}$

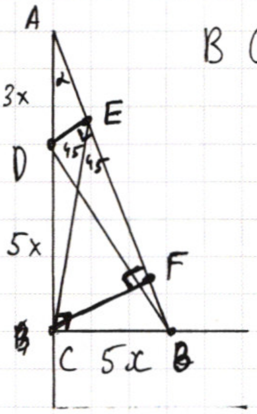
$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt6} \\ y=2+\sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=1-\frac{1}{\sqrt6} \\ y=2-\sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases}$$

~~Ответ: (2;3), (0;1), $(1+\sqrt6; 2+\sqrt6)$, $(1-\sqrt6; 2-\sqrt6)$.~~
~~$(1+\frac{1}{\sqrt6}; 2+\sqrt{\frac{8}{3}})$, $(1-\frac{1}{\sqrt6}; 1-\sqrt{\frac{8}{3}})$.~~

Аналогично $y=2-\sqrt{\frac{8}{3}}$, $x=1-\frac{1}{\sqrt6}$ не подходит.

Ответ: $(0;1)$, $(1+\frac{1}{\sqrt6}; 2+\sqrt{\frac{8}{3}})$





BCDE впис =>

$\angle CDB = \angle CEB = 45^\circ$

$tg\,\alpha = \frac{5}{8}$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

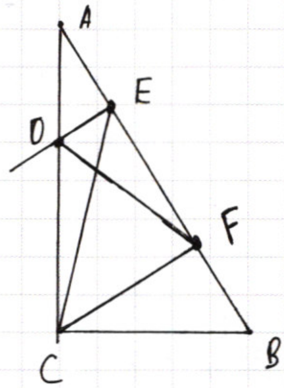
$$x = \sqrt{\frac{29}{64}} = \frac{\sqrt{29}}{8}$$

$AE \cdot AB = \cancel{13}\ 24x^2$

$$\frac{29}{64} \cdot 29 = \frac{145}{16}$$

$AB = \sqrt{89}\,x$

$$AE = \frac{24x}{\sqrt{89}} = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{89}}$$



$$DE = AE \cdot tg\,\alpha = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{89}} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15\sqrt{29}}{8\sqrt{89}}$$

$$EF = AE \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{89}}$$

20

$$S = \frac{DE \cdot EF}{2} = \frac{75 \cdot 29}{16 \cdot 89} = \frac{2175}{1424}$$

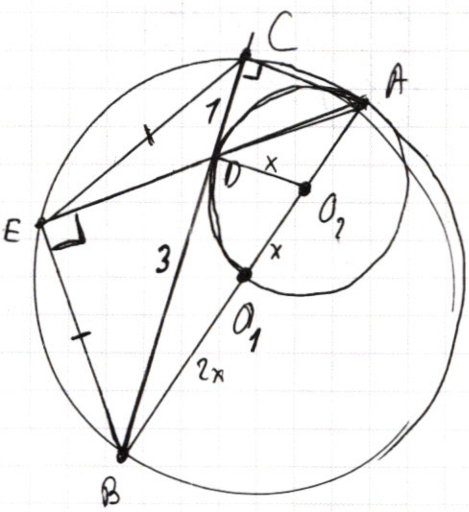
$$\frac{1{,}8 \cdot 4{,}2}{2} = 3{,}78$$

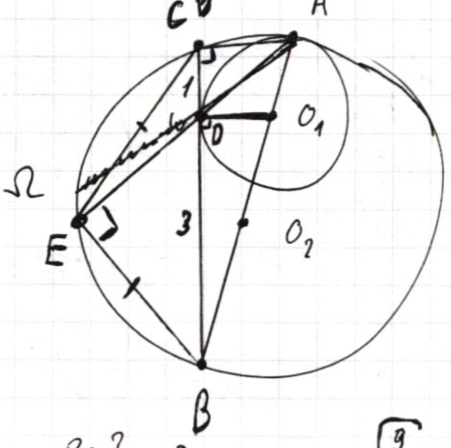
$$\frac{3{,}8}{20} = \frac{38}{200} = \frac{19}{100}$$

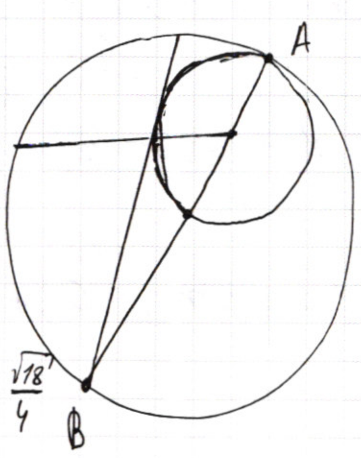
$$\frac{29 \cdot 75}{16 \cdot 89} : \frac{29 \cdot 5}{16} =$$

$$= \cancel{\frac{75}{89}}\ \frac{15}{89}$$

$r_1 = \frac{1}{2} r_2$





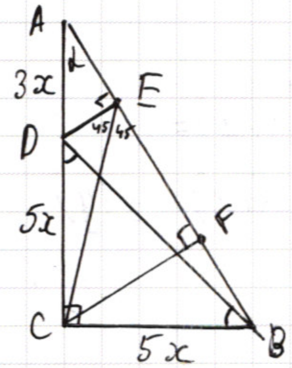


$8x^2 = 9$ $\quad X = \sqrt{\frac{9}{8}} = \cancel{\frac{\sqrt{8}}{8}}\ \frac{\sqrt{18}}{4}$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



а) $BCDE$ - вписанный, т.к. $\angle DEB = \angle ABC =$
$= 180^\circ$

$\angle CED = \angle CBD = 45^\circ$

$\angle CEB = \angle CDB$ => $\triangle CDB$ равнобедр.

$tg\,\alpha = \frac{5}{8}$

б) $AD \cdot AC = AE \cdot AB = 24x^2$ (из вписанности).

$AB = \sqrt{89}\,x$ (пифагор) => $AE = \cancel{\frac{\sqrt{89}}{24}}x$ $\frac{24x}{\sqrt{89}}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{8}$ $AE = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{89}}$

$S_{CED} = S_{FED}$ ($DE \parallel CF$)

$S_{FED} = \frac{DE \cdot EF}{2}$ $DE = AE \cdot tg\,\alpha = \frac{15\sqrt{29}}{8\sqrt{89}}$

$EF = \frac{5}{3} AE = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{89}}$ (теорема Фалеса)

$S_{FED} = \frac{DE \cdot EF}{2} = \frac{75 \cdot 29}{2 \cdot 8 \cdot 89} = \frac{2175}{1424} = S_{CED}$

Ответ: $\frac{5}{8}$; $\frac{2175}{1424}$.

$S = \frac{EO_1 \cdot CB}{2} + S_{AO_1C}$

$S_{AO_1C} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{4} = 7\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} + \frac{\frac{\sqrt{18}}{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$

$2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

$\cancel{\frac{27}{16}}$

$8b - 2a \geq 5$

$3a + b \geq 8$

$f(x/y) =$
$= f(x) - f(y)$

$\cancel{2ab + 2b \geq 31}$ $\quad \cancel{b \geq \frac{31}{16}}$

$1 \leq 26b \quad b \geq \frac{1}{26}$

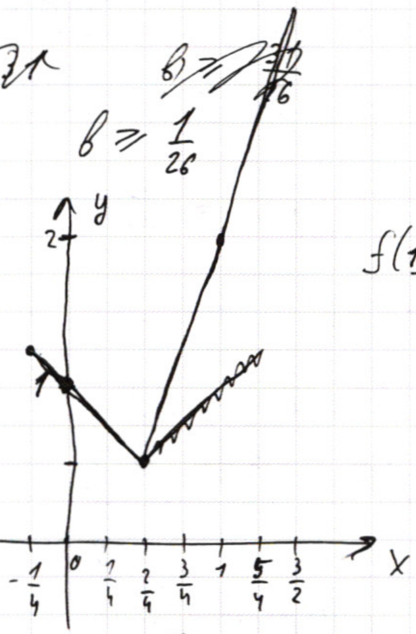
$f\left(\frac{2^k a}{b}\right) =$

$f(1) = 0$

$f(b) = f(b^2) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(b^2) = 2f(b)$

$f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$



$\cancel{-\frac{1}{4}a + b \leq \frac{5}{4}}$

$\cancel{\frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2}}$

$\cancel{\frac{3}{2}a + b \leq 3}$

$\cancel{3a \leq 12b}$

$\cancel{a \leq 4b}$

$b \geq \frac{3}{8}$

$4b - a \geq 5$

$a + 2b \leq 1$

$3a + 2b \leq 3$

$-3a \geq 3 \quad a \geq -1$

$4a + 4b \leq 4 \quad a + b \leq 1$

$b \leq 2$

$\frac{9}{2} + \frac{3}{8} =$

$\cancel{3a + b \geq 6 \geq 4 + 3a + 2b}$

$6a \leq 9$

$a \leq \frac{3}{2}$

$\frac{21}{4} \quad b \leq -\frac{1}{16}$

$2a - 8b \leq 5$

$3a + b \geq 4$

4

$a \geq \frac{9}{8}$

$8b + 3a \leq 12$

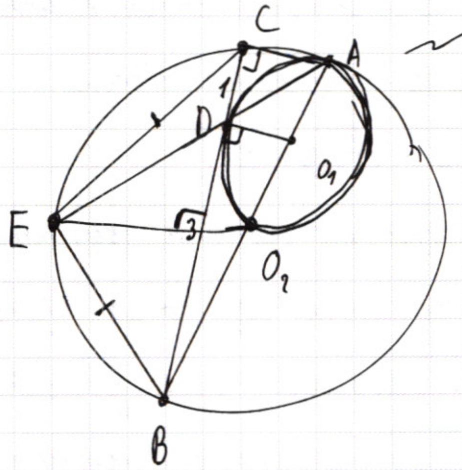
$3a \geq \frac{57}{16} \quad a \geq \frac{19}{16}$

$5a \leq 17 \quad a \leq \frac{17}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 5. O_1 и O_2 – центры окр

AB ~~является также и диамет~~ содержит точку O_1 (в силу симметрии)

$O_1D \perp BC$ (тк касательная)

$\angle ACB = 90°$ (опирается на диаметр)

$$DO_1 \parallel CA \Rightarrow \frac{BA}{AO_1} = \frac{4}{1} = \frac{2r_2}{r_1}$$

$r_2 = 2r_1$

$$\cancel{BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}} \quad \overset{3}{BD} = \sqrt{BO_1^2 - O_1D^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2} = \sqrt{8}\, r_1$$

$$r_1 = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad r_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

По лемме Архимеда E – середина дуги CEB $\Rightarrow CE = EB \Rightarrow$

$\Rightarrow EO_2 \perp BC$ из-за симметрии

$$S_{BACE} = S_{BEC} + S_{BO_2C} + S_{CO_2A} = \frac{BC \cdot EO_2}{2} + S_{CO_2A}$$

$$S_{BEC} + S_{BO_2C} = \frac{BC \cdot r_2}{2}$$

$S_{CO_2A} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ (CO_2 – медиана).

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$$

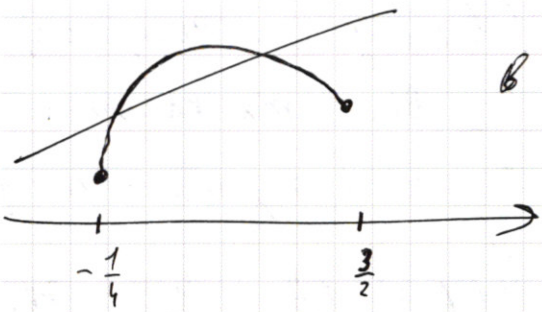
$$\frac{S_{ABC}}{2} = \frac{AC \cdot BC}{4} = \sqrt{2}$$

$$S_{BACE} = \frac{4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $4\sqrt{2}$.

№6.

Т.к. графики прямой и параболы пересекаются не более чем по 2 точкам, то если в начале промежутка и в конце ~~прям~~ значение прямой больше, то и во всех точках промежутка тоже (иначе ~~параб~~ ветви параболы должны быть направлены вниз, но у нас вверх).



(Скорость роста функции в ~~в~~ момент первого пересечения больше, чем у прямой, а во второй момент меньше, поэтому ветви должны быть напр. вниз,

т.к. если $f(x) = ax^2 + bx + c$, то $f'(x) = 2ax + b$, а значит если $f'(x)$ убывает, то $a < 0$ $\angle X$).

$\Downarrow$

Достаточно написать, что в точках $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b$

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 \leq -\frac{1}{4}a + b \\ \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 \leq \frac{3}{2}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq 2a - 8b \\ 4 \leq 3a + b \end{cases}$$

условия для первой части нер-ва.

$ax + b \leq x + |2x - 1|$

$g(x) = x + |2x - 1|$ Функция $g(x)$ имеет 2 прямых участка.

Если $ax + b$ будет меньше, чем в начале и в конце прямого участка, то и между тоже (иначе у 2 прямых больше 1 пересеч)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Запишем условия на 3 конца прямых участков:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}a+b \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b-a \le 5 \\ a+2b \le 1 \\ 3a+2b \le 6 \end{cases}$$

Добавим условия из первого нер-ва:

$$\begin{cases} 2a-8b \le 5 & (1) \\ 3a+b \ge 4 & (2) \\ 4b-a \le 5 & (3) \\ a+2b \le 1 & (4) \\ 3a+2b \le 6 & (5) \end{cases}$$

Если каждое из нер-в будет выполнено, то условие задачи также будет выполнено (объяснено выше).

Из 4 и 5: $a+b \le \frac{7}{4}$ (6)

~~Из 6 и 2: $2a \ge 3 \Rightarrow a \ge \frac{3}{2}$ (7)~~

Из 6 и 2: $a \ge \frac{9}{8}$

№ 7.

$$f(1^k \cdot a) = k \cdot f(1) + f(a)$$

$$f(1) = 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$$

$$f(y) > f(x).$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots$$

$$f(n) = \left[\frac{p_1}{2}\right] \cdot \alpha_1 + \left[\frac{p_2}{2}\right] \cdot \alpha_2 + \ldots$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f(x)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

0 - 1 шт 3 - 6 шт 6 - 1 шт 9 - 1 шт

1 - 2 шт 4 - 4 шт ~~7~~

2 - 4 шт 5 - 1 шт 8 - 1 шт

Теперь найдем кол-во способов выбрать x и y так, что

$f(x) < f(y)$ кол-во способов (первый множитель - кол-во способов выбрать x, второй - y)

$f(x) = 0$ $1 \cdot 20 = 20$ +

$f(x) = 1$ $2 \cdot 18 = 36$ +

$f(x) = 2$ $4 \cdot 14 = 56$ +

$f(x) = 3$ $6 \cdot 8 = 48$ +

$f(x) = 4$ $4 \cdot 4 = 16$ +

$f(x) = 5$ $1 \cdot 3 = 3$ +

$f(x) = 6$ $1 \cdot 2 = 2$ +

$f(x) = 8$ $1 \cdot 1 = 1$

$f(x) = 9$ 0

$= 182$ способа

Ответ: 182 пары.