МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c - последовательные члены геом. прогрессии

$\Rightarrow$ $b = a \cdot q$ $c = a \cdot q^2$, где q - частное прогрессии

$\Rightarrow$ четвёртый член это aq^3, он корень уравнения

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

Если $a = 0 \Rightarrow$ ~~четвёртый член~~ ~~тоже~~ $a \cdot q^3 = 0 \Rightarrow c = 0$

Пусть $a \neq 0 \Rightarrow$ сократим на a.

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$ - очевидно, оба корня $x = q$

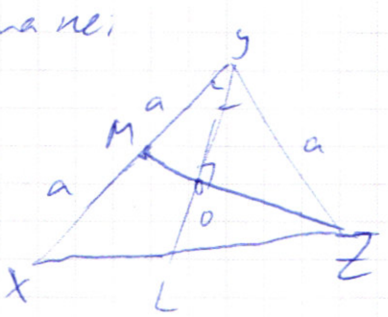
$\Rightarrow$ $q = aq^3$. Если $q = 0 \Rightarrow aq^2 = 0 \Rightarrow c = 0$

иначе $1 = aq^2 \Rightarrow c = 1$

Ответ: $c = 1$, или $c = 0$

№2.

Заметим, что если в $\triangle$ одна сторона вдвое длиннее другой $\Rightarrow$ в нём есть биссектриса, которая $\perp$ медиане:



ZM - медиана, $XY = 2YZ$

$\Rightarrow \triangle MYZ$ - р/б

$\Rightarrow$ YL не только биссектриса, но ещё высота.

Аналогично в другую сторону: если есть $\perp$ бисс. и мед. $\Rightarrow$ есть пара сторон, отличающихся в 2 раза.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (продолжение)

посчитаем сколько бывает △ периметра 1200, где одна сторона вдвое длиннее другой.

Пусть стороны: $x, 2x, y$ (1)

$\Rightarrow 3x+y=1200$ (2)

и должно выполняться нер-во △:

$2x < x+y \Rightarrow y>x \Rightarrow x<300$ (3)

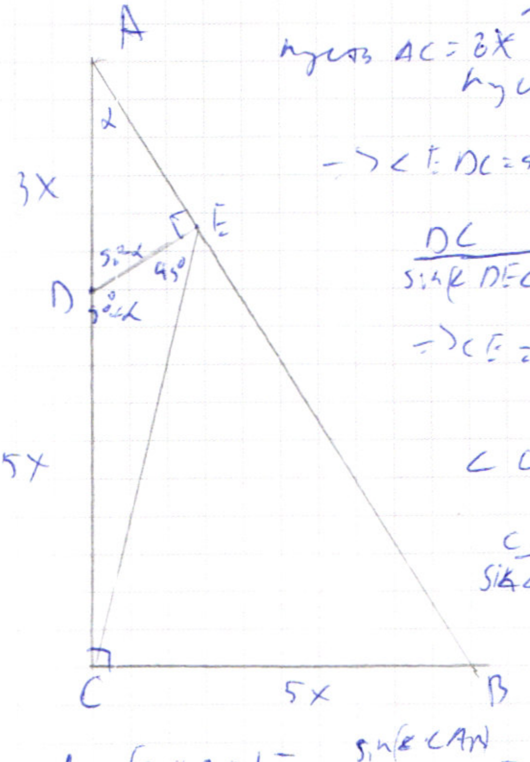
$y < 3x \Rightarrow x>200$ (4)

Очевидно, что все △ со сторонами $x, 2x, 1200-3x$, где $x \in [201; 299]$, $x \in \mathbb{Z}$ – существуют и подходят, других подходящих △ нет, т.к. там не выполняется какое-то из условий (1),(2),(3),(4).

$\Rightarrow$ существует 99 подходящих △

Ответ: 99

№4



пусть $AC = 8X \Rightarrow AD=3X$, $DC=5X$

пусть $\angle DAB=\alpha \Rightarrow \angle AED=90^\circ-\alpha$

$\Rightarrow \angle EDC = 90^\circ+\alpha$.

$\frac{DC}{\sin(\angle DEC)} = \frac{CE}{\sin(\angle EDC)}$ по т. синусов для △CED

$\Rightarrow CE = \frac{DC \cdot \sin(\angle EDC)}{\sin(\angle DEC)} = \frac{5x \cdot \sin(90^\circ+\alpha)}{\sin 45^\circ} = 5x \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{2}$

$\angle CED = 45^\circ$ т.к. это $\angle DEB = \angle DEC = 90^\circ - 45^\circ$

$\frac{CB}{\sin\angle CEB} = \frac{EC}{\sin\angle EBC} \Rightarrow CB = EC \cdot \frac{\sin\angle CEB}{\sin\angle EBC} =$

$= \frac{5x \cdot \cos\alpha\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(90^\circ-\alpha)} = 5x$

$\operatorname{tg}(\angle CAB) = \frac{\sin(\angle CAB)}{\cos(\angle CAB)} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ по т. Пифагора

$AB^2 = (8x)^2 + (5x)^2 = 89x^2$

$S(DEC) = DE \cdot EC \cdot \sin \overset{45^\circ}{\angle(DEC)}$

$DE = AD \cdot \sin\alpha \quad \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5x}{AB} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot 5x}{AB} = \frac{15x^2}{AB}$

$EC = 5x \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{2} \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow EC = 5x \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{40\sqrt{2}x^2}{AB}$

$\Rightarrow S(DEC) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15x^2 \cdot 40\sqrt{2}x^2}{AB^2} = \frac{600x^4}{89x^2} = \frac{600}{89}x^2$

$AC = \sqrt{29} = 8x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{8}$

$\Rightarrow S(DEC) = \frac{600}{89} \cdot \frac{29}{64} = \frac{75 \cdot 29}{89 \cdot 8}$ Ответ: $\frac{75 \cdot 29}{89 \cdot 8}$

№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b$ пусть $x = -\frac{1}{4}$

$2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) - 1 \le -\frac{a}{4} + b$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 \le -\frac{a}{4} + b$

$\boxed{-\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4} + b \quad (1)}$

пусть $x = \frac{3}{2}$

$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 \le \frac{3}{2}a + b$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 \le \frac{3}{2}a + b$

$\boxed{2 \le \frac{3}{2}a + b \quad (2)}$

так же $ax + b \le x + |2x - 1|$. пусть $x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} + \left|2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right|$

$\boxed{\frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} \quad (3)}$

№6 (продолжение

Заметим ②-③: $\frac{3}{2}a+b-(\frac{1}{2}a+b)\ge \frac{3}{2}$

$a \ge \frac{3}{2}$

Теперь ③-① : $\frac{1}{2}a+b-(-\frac{a}{4}+b)\le \frac{1}{2}+\frac{5}{8}$

$\frac{3a}{4}\le\frac{9}{8}$ => $a\le\frac{3}{2}$

Есть $\frac{3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$ => $a=\frac{3}{2}$ ④

подставим ④ в ②:

$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}+b\ge 2$

$\frac{9}{4}+b\ge 8/4$ => $b\ge-\frac{1}{4}$

подставим ④ в ③: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+b\le\frac{1}{2}$ => $b\le-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\le b\le-\frac{1}{4}$ => $b=-\frac{1}{4}$

проверим, что пара $a=\frac{3}{2}$ $b=-\frac{1}{4}$ подходит:

$2x^2-x-1\le\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$ $x\in[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$

$2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}\le 0$

корни: $x_{1,2}=\dfrac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+6}}{4}=\dfrac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{4}=\dfrac{\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}}{4}=\dfrac{5\pm7}{8}=(-\frac{1}{4};\frac{3}{2})$

=> на отрезке $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$ неравенство либо везде выполнено, либо везде нет подставим $x=0$ и убедимся, что $-1<-\frac{1}{4}$ => победа

$\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\le x+|2x-1|$ => 2 случая $x\ge\frac{1}{2}$; $x\le\frac{1}{2}$

$x\ge\frac{1}{2}$: $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\le x+2x-1$ => $\frac{3}{4}\le\frac{3}{2}x$, при $x\ge\frac{1}{2}$ это правда

$x\le\frac{1}{2}$ => $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\le x+1-2x$ => $\frac{5x}{2}\le\frac{5}{4}$ при $x\le\frac{1}{2}$ это правда.

=> Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(\underset{\shortparallel}{x}\cdot 1) = f(x)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(x)$

$f(1) = f(p\cdot\frac{1}{p}) = f(p)+f(\frac{1}{p}) \Rightarrow f(\frac{1}{p}) = -f(p)$ (p-не обязательно простое)

Очевидно, что для $x\in\mathbb{N}$, $f(x)>0$

$f(\frac{x}{y})>0$, если $f(x)>f(y)$ и $f(\frac{x}{y})<0$, если $f(y)>f(x)$

Т.к. варианты для x и y в задаче сильно ограничены => их можно перебрать:

x	f(x)	значения f(x), в порядке возрастания, относительно x.
1	0	0
2	1	1
3	1	1
4	2	2
5	2	2
6	2	2
7	3	2
8	3	3
9	2	3
10	3	3
11	5	3
12	3	3
13	6	3
14	4	4
15	3	4
16	4	4
17	8	4
18	3	5
19	9	6
20	4	8
21	4	9

Чтобы $f(\frac{x}{y})<0$,

в пару $\forall x$ нужно подобрать y, что $f(y)>f(x)$

=> если $f(x)=0$ => подходят 20 вариантов, а если $f(x)=4$ => подходят 4, т.к. кол-во тех x, что $f(x)=4$ кол-во тех y, что $f(y)>f(x)$

Из этих соображений можно посчитать ответ, пользуясь этим

$1\cdot 20+2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+$
$+1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 0$
$=20+36+56+48+16+3+2+1+0$
$=182$ ← Ответ: 182 пары.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \qquad x-1=a \qquad y-2=b$$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{a\cdot b} \quad (1) \\ 2a^2+b^2-3=0 \quad (2) \end{cases}$$

$b-2a=\sqrt{a\cdot b}$ $\qquad$ $b\neq 0$, т.к иначе $a=0$ и (2) не выполняется.

$\cancel{\Rightarrow b^2-4ab+4a^2=ab}$ $\qquad$ $\Rightarrow$ можно делить на b

$\cancel{b^2-5ab+4a^2=0 \; (3)}$ $\qquad$ $\frac{b}{b}-\frac{2a}{b}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$ $\quad$ пусть $\sqrt{\frac{a}{b}}=c$

$\cancel{(3)-(2):\; 2a^2-5ab+3=0}$ $\qquad$ $1-2c^2=c$

$\cancel{a=\frac{5b\pm\sqrt{25b-}}{4}}$ $\qquad$ корни: $c=-1$; $c=\frac{1}{2}$

$c=-1$ - не подходит, т.к $\sqrt{\frac{a}{b}}\geq 0$

$\Rightarrow c=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4a=b$ (3)

подставим это в (2): $2a^2+16a^2-3=0$

$18a^2-3=0$

$6a^2=1$ $\quad$ $a=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ $\quad$ если $a<0 \Rightarrow b-2a=4a-2a=2a<0$,

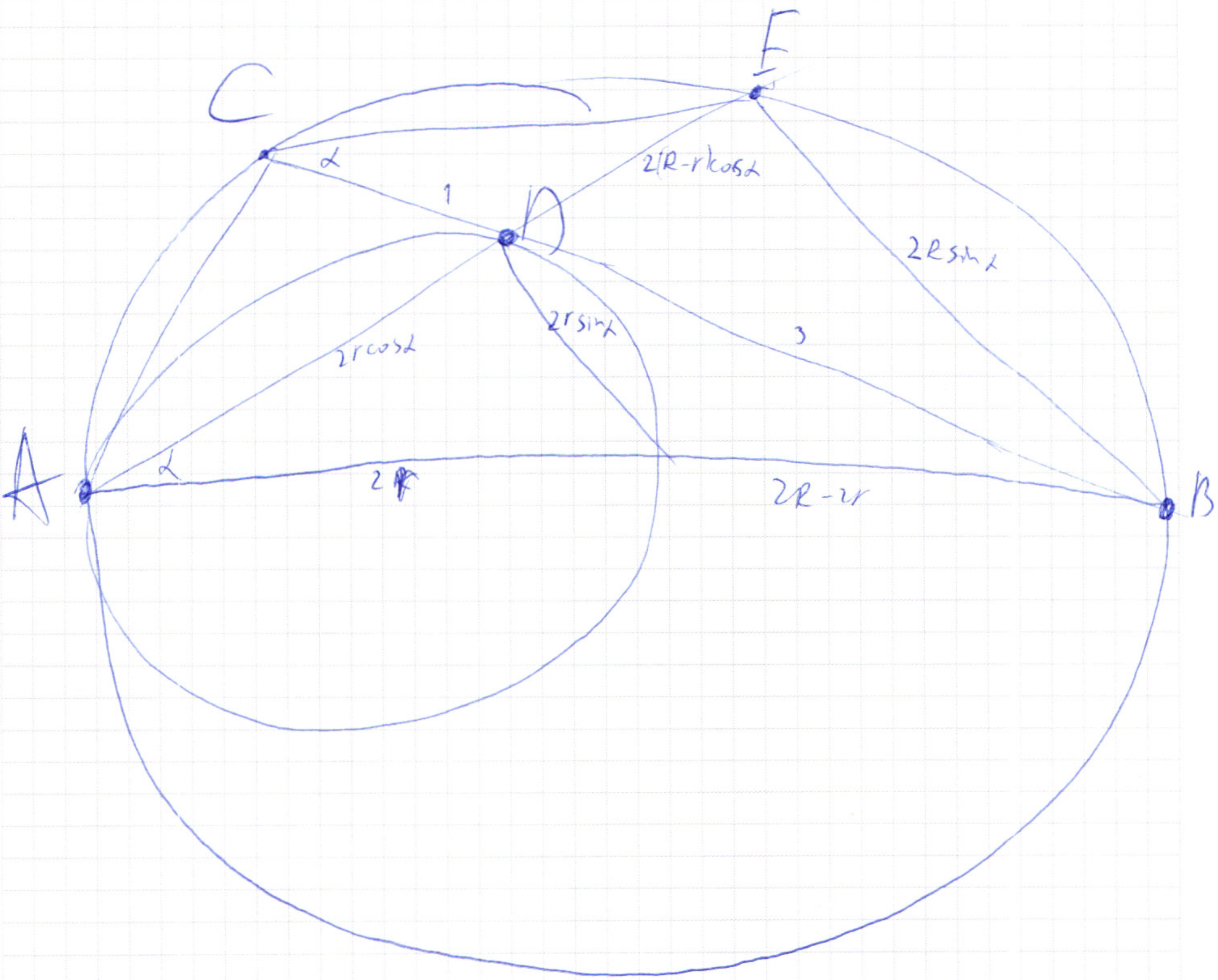
но это $\sqrt{ab}\geq 0 \Rightarrow (?)!$

$\Rightarrow a\geq 0 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow b=4\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$

$\Rightarrow x=a+1=1+\sqrt{\frac{1}{6}}$ $\qquad$ $y=b+2=2+4\sqrt{\frac{1}{6}}$

Ответ: $x=1+\sqrt{\frac{1}{6}}$ $\quad$ $y=2+4\sqrt{\frac{1}{6}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{2r\cos\alpha}{1} = \frac{1}{2R-r\cos\alpha}$

$R-r\cos\alpha = \frac{3}{r\cos\alpha}$

$(R-r)\cdot r\cos\alpha^2 = 3$

$4rR = 9$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

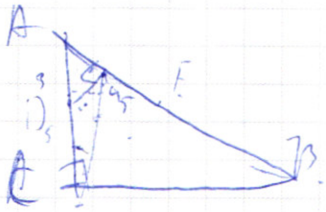
(1) $\frac{-a}{4}+b > \frac{-5}{8}$

(2) $\frac{a}{2}+b \le \frac{1}{2}$

(3) $\frac{3}{2}a+b \ge 2$

$\cancel{\frac{3}{2}b+b \ge \frac{-15}{4}+2}$

$\cancel{\frac{5}{2}b > \frac{-7}{4}}$



$\frac{BC}{AC}$

(3)-(2) $\Rightarrow a \ge \frac{3}{2}$

(2)-(1) $\Rightarrow \frac{3}{4}a \le \frac{9}{8} \Rightarrow a \le \frac{3}{2}$

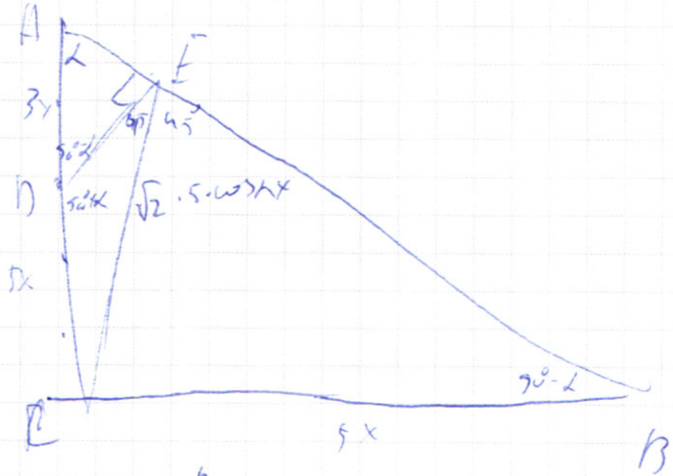
$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$ (4)

(4)→(2) $\Rightarrow \frac{3}{4}+b \le \frac{1}{2}$ $b \le -\frac{1}{4}$

(4)→(3) $\frac{9}{4}+b \ge 2$

$b \ge -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{1}{4}$

$DC = 3x \cdot \sin\alpha$



$\frac{5}{8}$

$AC = 8x$

$\frac{EC}{DC} = \frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}\cdot\cos\alpha$

$CB = \frac{\sqrt{2}\cdot 5\cdot\cos\alpha x}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}$

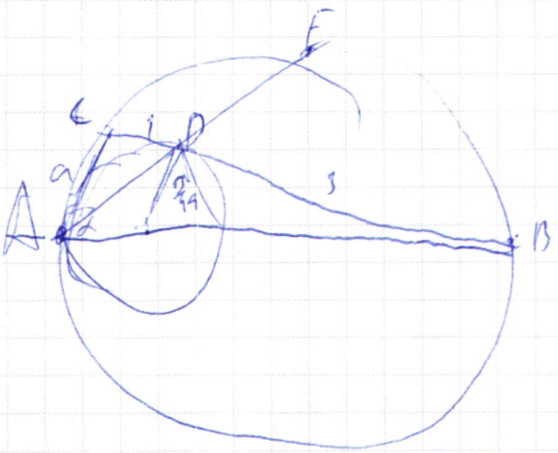
$\frac{CB}{EC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 45\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}$

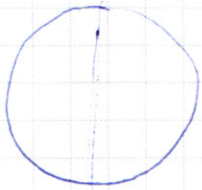
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



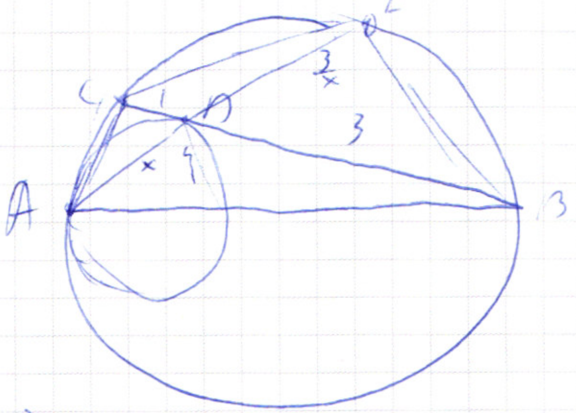


$2R \cdot 4R \cdot 2r \quad 1 = 9$

$AD \cdot DE = 3 = \cos^2\alpha \quad RP$

$\sqrt{a^2 a}$

$a^2 + 1 + \sqrt{a^2 a} + \frac{3}{4R} = 9$



$\frac{1}{R} = \frac{x}{\frac{x+3}{x}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad aq \quad aq^2$

1) 1

2) 55

3)

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

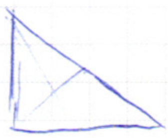
$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

$aq^3 = 9$

$aq^2 = 4$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0$



$h = \sqrt{3-2a^2}$

$3 - 2a^2 - 5a\sqrt{3-2a^2} + 4a^2 = 0$

$2a^2 + 3 = 5a\sqrt{3-2a^2}$

$4a^4 + 12a^2 + 9 = 75a^2 - 50a^4$

$54a^4 - 63a^2 + 9 = 0$

$3x + y \geq 1200$

$3x \geq 600$

$x \geq 201 - 399$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$b^2 = 4a$

$\frac{a}{b} = c$

$y - 2x \geq 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$1 - 2c = \sqrt{c}$

$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$1 + 4c^2 - 5c = 0$

$\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$c = 1$

$c = \frac{1}{4}$

$2a = \sqrt{4a^2} = 2a$

$f(1)=0$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -\left[\frac{p}{2}\right]$

x	$f(x)$
1	0 x
2	1 x
3	1 x
4	2 x
5	2 x
6	2 x
7	3 x
8	3 x
9	2 x
10	3 x
11	5 x
12	3 x
13	6 x
14	4 x
15	3 x
16	4 x
17	8 x
18	3 x
19	9 x
20	4
21	4

: 0
: 1 x
: 1 x
: 2 x
: 2 x
: 2 x
: 2 x
: 3 x
: 3 x
: 3 x
: 3 x
: 3 x
: 3 x
: 4 x
: 4 x
: 4 x
: 5 x
: 6 x
: 8 x
: 9 x

a b

$-\frac{a}{4}+b \geq -\frac{5}{8}$ $\quad \frac{a}{2}+b \leq \frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}a+b \geq 2$

$1 \to 10$
$2 \to 12$
$4 \to 14$
$6 \to 8$
$4 \to 4$
$1 \to 3$
$1 \to 2$
$1 \to 1$
$1 \to 0$

Σ

$b \geq \frac{a}{4} - \frac{5}{8}$

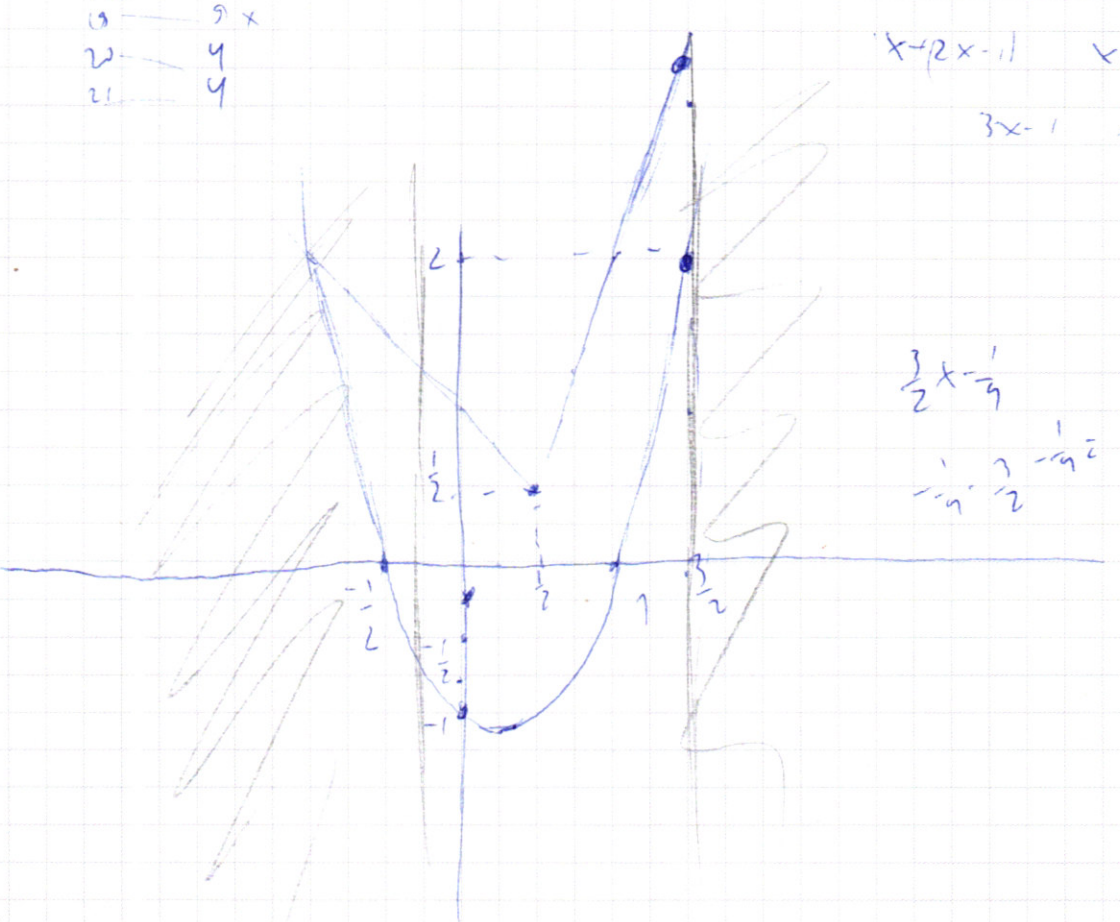
$\frac{a}{2} + \frac{a}{4} - \frac{5}{8} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}a \leq \frac{9}{8}$

$a \leq \frac{3}{2}$

$x-(2x-1) \quad x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$3x-1 \quad x < \frac{1}{2} \quad 3-x+1$



$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4}^2$

$-\frac{1}{4}\frac{3}{2} - 1 =$
$= -\frac{5}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)