МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2-2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=1:3$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=2$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$8x-6|2x-1|\leqslant ax+b\leqslant -8x^2+6x+7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 22$, $2\leqslant y\leqslant 22$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Если a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии, то пусть q — отношение соседних чисел этой прогрессии, тогда получим $b = qa$, $c = q^2a$, а следующий член этой прогрессии q^3a. Тогда

$ax^2 - 2bx + c = 0$. Вместо „b" подставим qa, вместо „c" q^2a

$ax^2 - 2qax + q^2a = 0$. Решим это уравнение

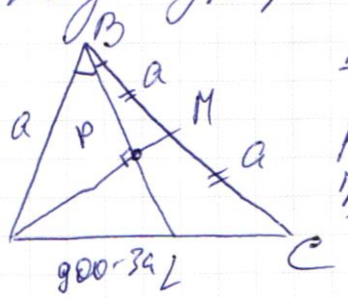
$D = 4q^2a^2 - 4a^2q^2 = 0 \quad a(x-q)^2 = 0$.

~~Тогда~~ $a \neq 0$, тогда $q = x$. Значит q — четвёртый член этой прогрессии тогда $q = q^3a$, тогда $q^2a = 1$, но $c = q^2a = 1$ — третий член прогрессии

Ответ: третий член прогрессии равен 1.

№ 2

Рассмотрим треугольник, у которого биссектриса перпендикулярна медиане. А $P = 900$



$\triangle ABC$, BL — биссектриса, AM — медиана $BL \perp AM$, $AM \cap BL = P$

Рассмотрим $\triangle ABM$: в нём BP — биссектриса и высота, значит $\triangle ABM$ — равнобедренный ($AB = BM$). Тогда пусть $BA = a$, тогда $BC = 2BA = 2a$, а $AC = 900 - 3a$ т.к. $P = 900$. Запишем необходимое и достаточное условие для существования этого треугольника, то есть неравенство треугольника

$$\begin{cases} 900 - 3a < 3a \\ 2a < 900 - 2a \\ a < 2a + 900 - 3a \text{ — (выполняется всегда)} \end{cases} \quad \begin{cases} 900 < 6a \\ 4a < 900 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 150 \\ a < 225. \end{cases} \text{ то есть}$$

$a = 151, 152 \ldots 224$ — значения a, при которых $\triangle$ существует

Всего этих значений 74 $(224 - 151 + 1)$. Это и есть количество способов

Ответ: 74.

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$ Сделаем тождественные преобразования.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \\ 2(y^2-2y+1)+x^2-12x+18=0 \end{cases} \begin{cases} (x-6)-(6y-6)=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ 2(y-1)^2+(x-6)^2-18=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ 2(y-1)^2+(x-6)^2=18 \end{cases}$$ Сделаем замену переменных, пусть $z=x-6$, $t=y-1$. Тогда.

$$\begin{cases} z-6t=\sqrt{zt} \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$$. Возведём обе части первого уравнения в квадрат и запомним, что $zt\geqslant 0$

$$\begin{cases} z^2-12tz+36t^2=zt \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases} \begin{cases} z^2+36t^2=13zt \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases} \begin{cases} 34t^2=13zt-18 \ (1) \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$$

1) $34t^2=13zt-18$ $\quad 34t^2+18=13zt$. $\quad z=\frac{34}{13}t+\frac{18}{13t}$

$$\begin{cases} z=\frac{34}{13}t+\frac{18}{13t} \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases} \begin{cases} z=\frac{34}{13}t+\frac{18}{13}t \\ 2t^2+\left(\frac{34}{13}t+\frac{18}{13t}\right)^2=18. \ (2) \end{cases}$$

2) $2t^2+\left(\frac{34}{13}t+\frac{18}{13t}\right)^2=18$

$\cancel{338}\,2\cdot 13^2 t^2+\left(34t+\frac{18}{t}\right)^2=18\cdot 13^2$

$2\cdot 13^2t^2+4\cdot 17^2t^2+8\cdot 17\cdot 9+\frac{18^2}{t^2}=18\cdot 13^2$

$2\cdot 13^2t^4+4\cdot 17^2t^4+8\cdot 17\cdot 9t^2+18^2=18\cdot 13^2t^2$

$t^4(2\cdot 13^2+4\cdot 17^2)+t^2(8\cdot 17\cdot 9-18\cdot 13^2)+18^2=0$

$t^4(13^2+2\cdot 17^2)+t^2(4\cdot 17\cdot 9-9\cdot 13^2)+9\cdot 18=0$

$647t^4-1585t^2+162=0$.

Решаем квадратное уравнение подставляем значение t в формулу для нахождения z, потом ~~находим x и y~~ проверяем условие $zt\geqslant 0$, потом находим x и y.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

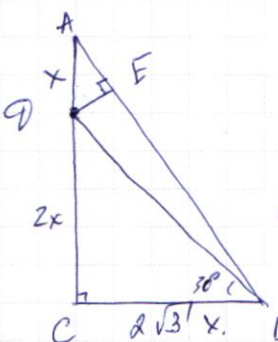
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, ~~A1~~ $D \in AC$ $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ $E \in AB$

$DE \perp AB$ $\angle DEC = 30°$ Найти: $tg\angle BAC$ − ?

Решение

а) Если $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ то $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$. Пусть $AD = x$, тогда $DC = 2x$

Заметим, что $\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$, значит $CDEB$ – вписанный значит $\angle DEC = 30° = \angle DBC$ т.к. они опираются на одну дугу.

В $\triangle DCB$ $tg\,30° = \frac{CD}{CB}$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{CB}$ $CB = 2\sqrt{3}x$.

$tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

б) $AC = \sqrt{7}$, тогда $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

По т. Пифагора $AB = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = x\sqrt{21}$

$\triangle DAE \sim \triangle CAB$, поэтому $\frac{DA}{AB} = \frac{DE}{CB}$; $\cancel{\frac{x}{AB}}$ $\frac{x}{x\sqrt{21}} = \frac{DE}{2\sqrt{3}x}$

$DE = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}} = \frac{2x}{\sqrt{7}}$.

По т. Пифагора $AE = \sqrt{DA^2 - DE^2} = \sqrt{x^2 - \frac{4}{7}x^2} = x\sqrt{\frac{3}{7}}$

Тогда $\sin\angle ADE = \cancel{\frac{x}{x\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{\frac{7}{3}}}$. $\frac{x\sqrt{\frac{3}{7}}}{x} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

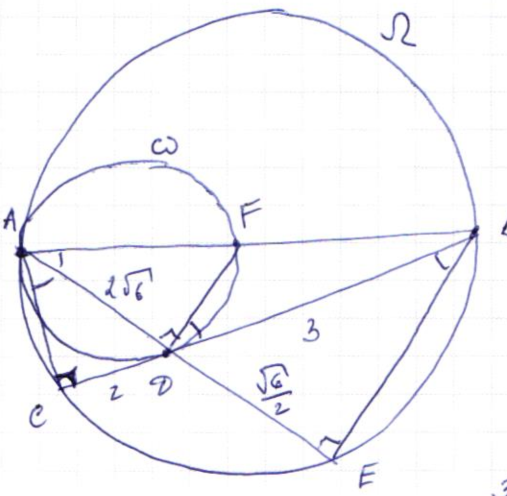
$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}DE \cdot CD \cdot \sin\angle CDE = \frac{1}{2}DE \cdot CD \cdot \sin\angle ADE =$

$\cancel{= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{7}} \cdot 2x \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{2x^2}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{7}{9}}{\sqrt{3}} = \frac{14}{9\sqrt{3}}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{7}} \cdot 2x \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} = 2 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $S_{\triangle CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

№ 5



Найти: S_{ABCD}, R радиусы ω и Ω.

Решение

R – радиус Ω r – радиус ω.

1) Центры касающихся окружностей и точка касания лежат на одной прямой. Поэтому AB содержит диаметр ω.

2) $DF \perp AD$, $BE \perp AE$ т.к. AF и AB это диаметры.
$DF \parallel BE$.

~~3) $\angle FDB = \angle CBE = \angle CAE$~~

3) $\angle FAD = \frac{1}{2} \smile FD = \angle FDB = \angle DBE = \frac{1}{2} \smile CE = \angle CAE$
значит AD - биссектриса $\triangle CAB$

4) $AC \perp CB$ т.к. AB диаметр Ω.

5) $AC = AB \sin\angle ABC = 2R \sin\angle ABC$. По свойству биссектрисы $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB}$ $\frac{2R\sin\angle ABC}{2R} = \frac{2}{3}$ $\sin\angle ABC = \frac{2}{3}$.

По основному тригонометрическому тождеству
$\sin^2\angle ABC + \cos^2\angle ABC = 1$ $\cos^2\angle ABC = \frac{5}{9}$ $\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Заметим, что ~~$AB = CB\cos\angle ABC$, тогда $2R = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$~~

$AB = \frac{CB}{\cos\angle ABC} = 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$ $AB = 2R$ $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

6) По т. Пифагора $\triangle ABC$ $AC = \sqrt{45 - 25} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

7) По т. Пифагора $\triangle ACD$ $AD = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6}$.

8) По свойству пересекающихся хорд: $AD \cdot DE = CD \cdot DB$
$DE = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

9) $\triangle AFD \sim \triangle ABE$ $\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AB}$ $AF = 2r$. $AB = 2R$

$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}(2+\frac{1}{2})} = \frac{r}{R}$ $\frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{r}{R}$ $\frac{4}{5} = \frac{r}{R}$ $r = \frac{4}{5}R = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$.

10) $S_{BACE} = \frac{1}{2}\cdot AE \cdot CB \cdot \sin\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{5}{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{5}{6}}$. Ответ: $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$ $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ $r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Посчитаем значения для всех простых ≤ 22 т.к $f(p) = [\frac{p}{4}]$.

$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(5) = 2$
$f(7) = 3$
$f(11) = 5$
$f(13) = 6$
$f(17) = \cancel{7}\ 8$
$f(19) = 9$

Теперь посчитаем оставшиеся пользуясь тем, что $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$
$f(8) = f(4) + f(2) = 3$
$f(9) = f(3) + f(3) = 2$
$f(10) = f(2) + f(5) = 3$
$f(12) = f(3) + f(4) = 1 + 2 = 3.$
$f(14) = f(2) + f(7) = 4$
$f(15) = f(3) + f(5) = 3$
$f(16) = f(4) + f(4) = 4$
$f(18) = f(2) + f(9) = 3$
$f(20) = f(4) + f(5) = 4$
$f(21) = f(3) + f(7) = 4$
$f(22) = f(2) + f(11) = 6.$

Теперь заметим, что

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$, также заметим, что

$f(2) = f(2) + f(1)$, значит $f(1) = 0$.

Т.к. $f(1) = 0$, то $0 = f(1) = f(\frac{1}{y}) + f(y)$, значит

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$. Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Теперь заметим, что среди $f(n)$, где $n = 2, \dots, 22$

1 – 2 штуки
2 – 4 штуки
3 – 6 штук
4 – 4 штуки
5 – 1 штука
6 – 2 штука
7 – 0 штук
8 – 1 штука
9 – 1 штука

Если $f(\frac{x}{y}) < 0$ то $f(x) < f(y)$

Посчитаем количество таких пар $(x; y)$ (Для каждого значения f считаем количество значений меньших его).

$20 + 19 + 2 \cdot 17 + 16 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 =$

$= 39 + 34 + 16 + 48 + 36 + 8 = 39 + 50 + 48 + 36 + 8 =$

$= 89 + 84 + 8 = 181$ Ответ: 181.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

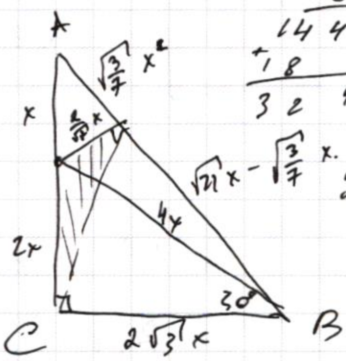
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$z^2+36t^2=13zt$ 169 $\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$

$\cancel{z}^2$ $2t^2+z^2=18$ $\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ +18 \\ \hline 324 \end{array}$ $x^2=\frac{4}{7}x^2+$

$z^2+36t^2=13zt.$



$9x^2+12x^2=\sqrt{21}x.$

~~z 2 6t~~

$2t^2+z^2=18.$

$\left\{\begin{array}{l} \cancel{18}\,36t^2+18z^2=324 \\ 2\ \cancel{z^2+3t^2=13zt} \end{array}\right.$

$2t^2+z^2=18.$

$z^2+36t^2=13zt$ $\frac{x}{\sqrt{21}x}=\frac{DE}{2\sqrt{3}x}$

$17z^2=\cancel{34}\ 324-13zt.$ $\frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}}=DE$ $\frac{2}{\sqrt{7}}x=DE$

$\left\{\begin{array}{l} 2t^2+z^2=18 \\ z^2+36t^2=13zt \end{array}\right.$ $2t^2+z^2=18.$

$2t^2+\left(\frac{34}{13}t+\frac{18}{13t}\right)^2=18.$

$34t^2=13zt-18$

$2\cdot 13^2t^2+\left(34t+\frac{18}{t}\right)^2=18.$

$34t^2-13zt+18=0.$ $2\cdot13^2t^2+34^2t^2+2\cdot18\cdot34+\frac{18^2}{t^2}=18$

$z=\frac{34t^2+18}{13t.}=$ $2\cdot13^2t^4+34^2t^4+2\cdot18\cdot34t^2+18^2=$

$=\frac{34}{13}t+18.$ $=18\cdot13^2t^2$

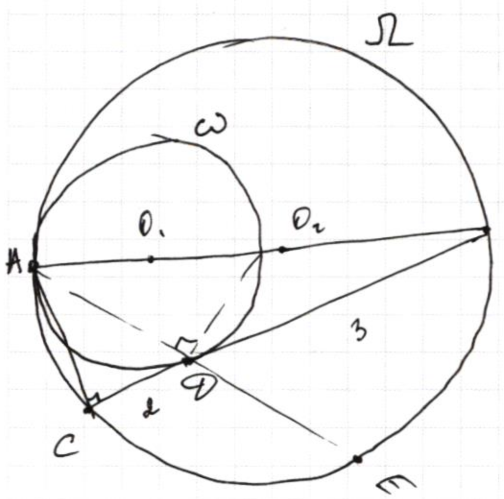
~~2·13t⁴~~

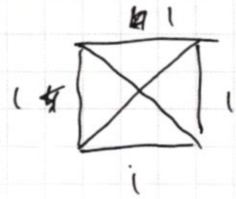
$\left\{\begin{array}{l} z^2+36t^2=13zt \\ 2t^2+z^2=18. \end{array}\right.$ $\cancel{2t^4}(13^2+17^2$ $z-6t=\sqrt{zt}$

$2t^2+z^2=18$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)





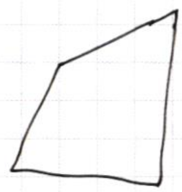
$CD = 2$

$BD = 3.$

$R = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$

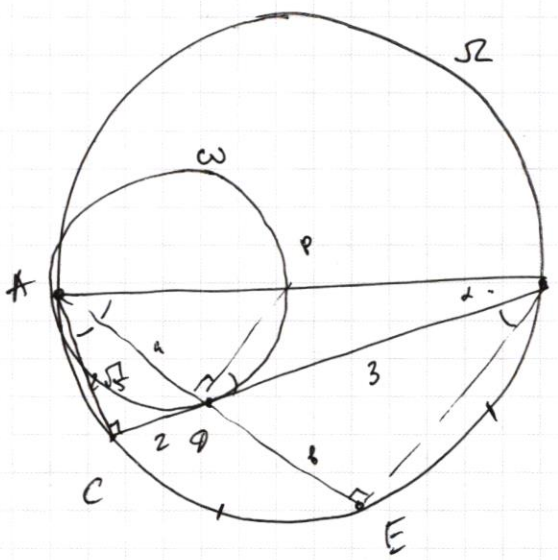
$2R = \frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 3\sqrt{5}.$

$\sin\alpha = \frac{2}{3}.$ $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$



$\cancel{AC = 2}$

$\cancel{45-25=}$ $2\sqrt{5}.$



$\triangle APD \sim \triangle ABE$ $\qquad \frac{R}{r} = \frac{5}{2}.$

$R, r.$

$\cancel{\frac{a}{2} = \frac{b}{3}.}$ $\qquad \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

$\frac{r}{R} \cdot \cancel{\frac{R}{r}} = \frac{a}{a+b}.$ $\qquad \cancel{\frac{r}{R} = 1 + \frac{b}{a}.}$

$\frac{R}{r} = 1 + \frac{b}{a}.$

$\frac{a}{2r} = \frac{b+a}{2R}$

$\frac{R}{r} = \cancel{1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.}$

$AC = 2\sqrt{5}.$

$\frac{a}{3} = \frac{2}{b}.$

$ab = 6.$

$AC = 2R\sin\alpha.$

$\frac{2R\sin\alpha}{2R} = \frac{2}{3}.$ $\qquad \sin\alpha = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{4}{9}$

$AC = 2R\sin\alpha.$

$\cos\alpha = \cancel{\sqrt{5}}\ \frac{\sqrt{5}}{3}.$

$\frac{2R}{2R\sin\alpha} = \frac{3}{2}$

$2R = 5 \cdot \cos\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$

$\sin\alpha = \frac{2}{3}.$

$\left(\frac{5\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \frac{125}{36} - 25.$ $\qquad R = \frac{5\sqrt{5}}{6}.$

$4 + 20 = 24$

$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

$\frac{560}{36} - 25. = 525($

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a,\ b = aq,\ c = aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = ax^2 - 2aqx + aq^2$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0 \qquad x = q$

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3$

4

$q.$

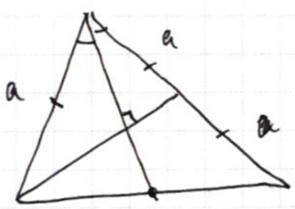
$aq^2 = 1.$

$25 \times 9 = 225$

$\frac{900}{6} = \frac{300}{2} = 150$

№2

$\frac{900}{4} = 9 \cdot 25 \; 225$



$\cancel{3a < 900 - 3a}$

$\begin{cases} 3a > 900 - \cancel{3a}\ 3a. \\ 2a < a + 900 - 3a. \end{cases}$ $\begin{cases} 6a > 900 \\ 2a < 900 - 2a. \end{cases}$

$\begin{cases} 6a > 900 \\ 4a < 900 \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{900}{6} \\ a < \frac{900}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a > 150 \\ a < 225. \end{cases}$

$151 \ \_\_\_ \ 224.$

$1 \ \_\_\_ \ 74.$

$224 - 150 = 74$

Ответ: 74.

$\begin{cases} z - 6t = \sqrt{zt} \\ 2t^2 + z^2 = 18 \end{cases}$

№3

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x^{\cancel{2} } \cancel{- 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6}$

$(x-6) - 6y + 6 = \sqrt{(y-1)(x-6)}.$

$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(y-1)(x-6)}.$

$\cancel{p - 6q = \sqrt{pq}}.$

$p \ z \qquad \cancel{q}\ t.$

$\cancel{x^2 - 6x}$

$2(y^2 - 2y + 1) + x^2 - 12x + 18 = 0 \qquad 2(y-1)^2 + (x-6)^2 - 18 = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} \cancel{x-6=} \end{cases}$

$\cancel{p=x-6}$ $\quad z=x-6$

$\overline{q=}$ $\quad t=y-1$

$\cancel{(x-6)}$

$$\begin{array}{r} 6\\ 18\\ \times 18\\ \hline 144\\ +18\\ \hline 324 \end{array}$$

$\begin{cases} z-6t=\sqrt{zt} \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z^2+36t^2-12zt=zt \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$

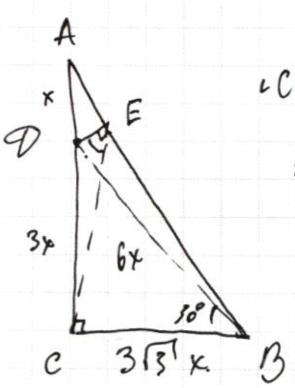
$\begin{cases} z^2+36t^2=13zt \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 34t^2=13zt-18 \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} 13zt=34t^2+18 \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z=\frac{34t^2+18}{13t} \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z^2=\frac{34^2t^4+2\cdot18\cdot34+324}{169t^2} \end{cases}$

$$2t^2+\frac{34^2t^4+2\cdot18\cdot34t^2+324}{169t^2}=18$$

$$2\cdot169t^4+34^2t^4+2\cdot18\cdot34t^2+18^2=18\cdot169t^2$$

$$t^4(2\cdot13^2+34^2)+t^2(2\cdot18\cdot34-18\cdot13^2)+18^2=0.$$



$\angle CED=30^\circ.$

$AC=\sqrt{7}.$

$tg\angle BAC$

$AC=\sqrt{7}.$

$$tg\,30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\frac{DC}{CB}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ $\quad \frac{3x}{CB}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$\frac{CB}{3x}=\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{CB}{3x}=\sqrt{3}.$

$CB=3\sqrt{3}x$

$\cancel{z-6t+2t^2+z^2=\sqrt{z}}$

$z-6t-2t^2-z^2=\sqrt{zt}-18$

$z(1-z)$ $\quad \begin{cases} z-6t=\sqrt{zt} \\ 2t^2+z^2=18 \end{cases}$ $\quad z-6t\cancel{+2t^2+z^2=\sqrt{zt}+18}$

$2(t-$

2 3 4 5 6 7 8 9 10.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ $\quad f(0)=0$ $\quad \cancel{f(p) = \lfloor \frac{p}{2}}$ $\quad f(p) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

$f(1)=0$.

$f(ab) = f(a) + f(b)$.

$f(\frac{x}{y}) < 0$.

$f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x/y)$.

$f(p) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

$f(2) = 1 \qquad f(4) = 2$

$f(3) = 1 \qquad f(6) = 2$

$f(5) = 2 \qquad f(8) = 3$

$f(7) = 3 \qquad f(9) = 2$

$f(11) = 5 \qquad f(10) = 3$

$f(13) = 6 \qquad f(12) = 3$.

$\cancel{f(n)} = f(n^2) + f(\frac{1}{n})$.

$f(\cancel{\frac{1}{n}}) = f(n^2) - f(n)$.

$f(1) = f(n) + f(\frac{1}{n})$.

$f(n) = -f(\frac{1}{n})$.

10 ± 4

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$.

$\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{8}$

y

$\frac{5-2\sqrt{3}}{8}$.

$x > -\frac{1}{2}$. $\quad \frac{3}{16} < \frac{1}{8}$.

$y = 8x - 12x + 6 =$

$x \geq \frac{1}{2}$

$= -4x + 6$.

$\frac{1}{2} \le \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

x

$-8x^2 + 6x + 7 = 8x - 6|2x-1|$

$-8x^2 + 6x + 7 = 8x - 12x + 6$.

$-8x^2 + 6x + 7 = -4x + 6$.

$D = b^2 - 4ac =$

$-8x^2 + 10x + 1 = 0$.

$= 100 - 32 = 48$

$8x^2 - 10x - 1 = 0$.

$\frac{1}{2} \le \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad x = \frac{10 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{10 \pm 4\sqrt{3}}{16}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$f(n)$	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6

$f(2)=1 \quad f(4)=f(2)+f(2)=2 \quad f(6)=f(2)+f(3)=2 \quad f(8)=f(2)+f(4)=3$

$f(3)=1 \quad f(10)=f(2)+f(5)=3 \quad f(12)=f(3)+f(4)=3 \quad f(14)=4$

$f(5)=2 \quad f(15)=f(3)+f(5)=3 \quad f(16)=f(4)+f(4)=4. \quad \cancel{f(17)=} \quad f(18)=f(2)+f(9)=3$

$f(7)=3 \quad f(20)=f(4)+f(5)=4 \quad f(21)=f(3)+f(7)=4$

$f(11)=5 \quad f(22)=f(2)+f(11)=6.$

$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

$t^4(13^2+2\cdot 17^2)+t^2(4\cdot 17\cdot 9-9\cdot 13^2)+9\cdot 18=0$

$647t^4-1585t^2+162=0.$

$2197-612=1585$

$18\times 9=162$

$169+169=338$

$289+289=578$

$578+169=647$

$68\times 9=612$

$169\times 13=507\ldots$

2197

$17\times 17=119+17\ldots=289$

1 – 2

2 – 4

3 – 6

4 – 4

5 – 1

6 – 2

7 – 0

8 – 1

9 – 1

$\cancel{5+10+6}$

2 . . . 22

1 . . . 21.

$48+36=84$

$92+89=181$

1585×1585: 7925, 14800

$x \leq \frac{1}{2}.$

$8x-6(1-2x)=-8x^2+6x+7.$

$8x-6+12x=-8x^2+6x+7$

$8x^2+2x-13.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)