МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1. при $a=0$ каждый член геом. прогрессии также равен нулю т.е. $b=0$, $c=0$, $d=0$ (d - четвёртый член геом. прогрессии)

Проверим является ли корнем уравнения

$ax^2+2bx+c=0$ $d=0$.

$0x^2+0x+0=0$

$x\in\mathbb{R}$ т.к. $0\in\mathbb{R}$, то $d=0$ явл. корнем ур-нения

Значит при $a=0$ $c=0$

2. при $a\neq0$ $b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

По Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{aq^2}{a}=q^2 \\ x_1+x_2=-\frac{2aq}{a}=-2q \end{cases}$$

т.к. d является одним из корней уравнения, то не умаляя общности пусть $x_1=d=aq^3$, тогда

$$\begin{cases} aq^3\cdot x_2=q^2 \\ aq^3+x_2=-2q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\frac{1}{aq} & (1) \\ aq^3+\frac{1}{aq}=-2q & (2) \end{cases}$$

Решу (2): $aq^3 + \frac{1}{aq} = -2q \quad | \times aq \quad , \begin{cases} a \neq 0 \\ q \neq 0 \end{cases}$

$a^2q^4 + 1 = -2aq^2$

Замена: $aq^2 = c$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

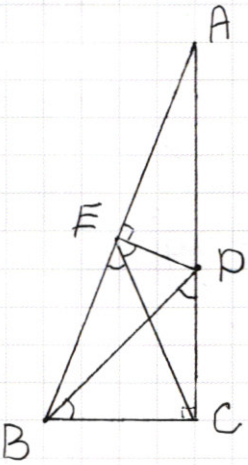
$(c+1)^2 = 0$

$c = -\underline{1}$

Ответ: при $a=0 \quad c=0$

при $a \neq 0 \quad c = -\underline{1}$

№4



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$

$D \in AC$, $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $E \in AB$,

$DE \perp AB \quad \angle CED = 45^\circ$

б) $AC = \sqrt{29}$

Найти: а) $tg\, BAC$, б) S_{CED}

Решение:

а)

1. $\left.\begin{array}{l} \angle DEB = 90^\circ \text{ (т.к. } DE \perp AB) \\ \angle DCB = 90^\circ \end{array}\right\}$ BEDC - вписанный, значит

1) $\angle CBD = \angle CED = 45^\circ$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу

2) $\angle BEC = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ$

$\angle BDC = \angle BEC = 45^\circ$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

2. $\triangle BDC$, $\angle B = \angle D = 45^\circ$, значит $BC = CD$ по признаку равнобедр. $\triangle$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Пусть $AC = 5x$, $x \neq 0$ тогда $AP = 3x$ по усл.

$PC = AC - AP = 5x - 3x = 2x$

$BC = PC = 2x$ по п. 2

$tg_{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$

б)

1. $PC = \frac{2}{5} \cdot AC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$AP = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29}$

2. ~~[illegible]~~ $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ по Т. Пифагора:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + \frac{4}{25} \cdot 29} = \sqrt{\frac{29}{25} \cdot 29} = \cancel{\frac{29}{5}}$

$= \frac{29}{5}$

3. $\triangle AEP \sim \triangle ACB$ по двум углам ($\angle A$ - общий; $\angle E = \angle C = 90^\circ$) значит $\frac{EP}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{3\sqrt{29} \cdot 5}{5 \cdot 29} = \frac{3}{\sqrt{29}}$

$EP = \frac{3}{\sqrt{29}} BC = \frac{3}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{6}{5}$

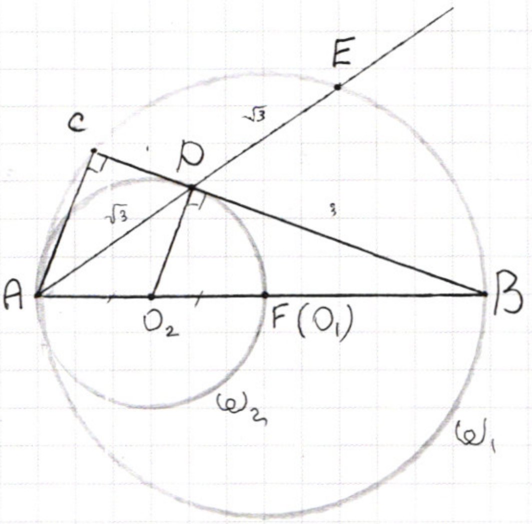
4. $\cos_{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{29} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{29}}$

5. $\angle EPC = \angle PEA + \angle EAP = 90^\circ + \angle BAC$ как внешний угол $\triangle EPA$, $\sin EPC = \sin(90^\circ + \angle BAC) = \cos\angle BAC$

6. $S_{EPC} = \frac{1}{2} EP \cdot PC \cdot \sin EPC = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} =$

$= \frac{6}{5}$ Ответ: $\frac{6}{5}$

№5



Дано: $\omega_1(O_1; R)$, $\omega_2(O_2; r)$; $R > r$

ω_1, ω_2 касаются внутр. образом в точке A.

AB - диаметр ω_1

BC - касательная к ω_2

$BC \cap \omega_2 = D$; $AD \cap \omega_1 = E$

$CD = 1$; $BD = 3$

Найти: r, R, S_{BACE}

Решение:

1. Пусть AF - диаметр ω_2, тогда

$BD^2 = BF \cdot AB$ по Т. об отрезках секущ.

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$9 = 4(R - r)R$

2. $\angle ACD = \frac{1}{2} \smile AD = 90^\circ$ как вписанный;

$O_2D \perp BC$ по св-ву касательной т.е.

$\angle O_2DB = 90^\circ$

3. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по двум углам ($\angle B$ - общий; $\angle D = \angle C = 90^\circ$ по п. 2), значит

$$\frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4}$$

4. из п.1 и п. 3 следует система $\begin{cases} 9 = 4(R - r)R \\ \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4} \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 9 = 4(R-r)R \\ 8R - 4r = 6R \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 2r \\ 9 = 4\cdot r\cdot 2r \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 2r \\ r^2 = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

5. т.к. $R = 2r$, то $AF = AO_1$ т.е. F и O_1 совпали

6. $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ (п. 2) по Т. Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \sqrt{18-16} = \sqrt{2}$$

7. $\triangle ACD$, $\angle C = 90^\circ$ по Т. Пифагора:

$$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

8. $\triangle CDE \sim \triangle ADB$ по двум углам ($\angle ADB = \angle EDC$ как вертикальные; $\angle ABC = \angle AEC$ как вписанные, опирающ. на одну дугу) тогда $\frac{S_{CDE}}{S_{ADB}} = \left(\frac{CD}{AD}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$S_{CDE} = \frac{1}{3} S_{ADB}$

9. $\triangle CDA \sim \triangle EDB$ по двум углам ($\angle ADC = \angle EDC$ как вертикальные; $\angle CAE = \angle CBE$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.)

Значит $\frac{S_{EDB}}{S_{CDA}} = \left(\frac{BD}{AD}\right)^2 = 3$

$S_{EDB} = 3 S_{CDA}$

10. $S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{EDB} = 3 \cdot S_{ACD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

11. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

$S_{ABD} = S_{ABC} - S_{ACD} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$S_{CDE} = \frac{1}{3} S_{ABD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. $S_{ACEB} = S_{ACD} + S_{CDE} + S_{EDB} + S_{ABD} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} +$
$+ \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{ACEB} = 4\sqrt{2}$

№7

т.к. 1 можно представить как $\frac{a}{a}$, $a \neq 0$ то

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f(1) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$,

значит $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$. тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)$ можно разложить следующим образом:

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$, т.к.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ то $f(y) > f(x)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. для $x=1$ $y \neq 1$ т.е. $y \in \{2, 3 \ldots, 20, 21\}$

   20 вариантов

2. для $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$ $(f(2)=f(3))$ $y \in \{4, 5, 6 \ldots, 20, 21\}$

   т.к. функция от каждого следующего простого больше, а составные в разложении имеют простые, значения от которых суммируются.

   36 пар $(x; y)$

3. распишем значения функций от следующих целых чисел.

$f(4)=2$	$f(11)=5$	$f(18)=3$
$f(5)=2$	$f(12)=3$	$f(19)=9$
$f(6)=2$	$f(13)=6$	$f(20)=4$
$f(7)=3$	$f(14)=4$	$f(21)=4$
$f(8)=3$	$f(15)=3$	
$f(9)=2$	$f(16)=4$	
$f(10)=3$	$f(17)=8$	

Таким образом для:

1. $x \in \{4; 5, 6; 9\}$ подходят оставшиеся 14 значений y.

   $4 \cdot 14 = 56$ пар

2. $x \in \{7; 8; 10; 12, 15; 18\}$ подходят остальные 8 значений y; $6 \cdot 8 = 48$ пар

3. $x \in \{14; 16; 20; 21\}$ подходят $y \in \{11; 13; 17; 19\}$

$4 \cdot 4 = \underline{16}$ пар

4. для ~~$x \in$~~ $x = 11$ $y \in \{13; 17; 19\}$

$\underline{3}$ пары

5. для $x = 13$ $y \in \{17; 19\}$

$\underline{2}$ пары

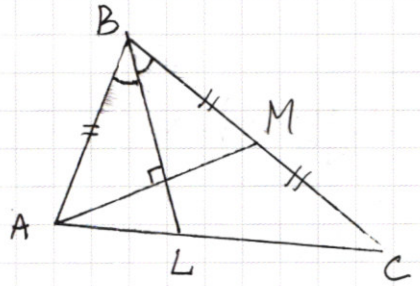
6. для $x = 17$ $y = 19$ – $\underline{1}$ пара

Таким образом всего пар, удовлетворяющих усл. –

$20 + 36 + 56 + 48 + 16 + 3 + 2 + 1 = 182$

Ответ: 182

№2



Пусть в некотором $\triangle ABC$

BL – бис-са, AM – медиана, $AM \perp BL$

тогда в $\triangle ABM$ бис-са явл. высотой т.е. $AB = BM$,

$BM = MC = \frac{1}{2} BC$ т.к. M – основание медианы

таким образом $BC = 2AB$. Действительно в любом треугольнике, в котором одна из сторон вдвое больше другой бис-са, проведённая из угла между ними перпендикулярна медиане, проведённой к стороне, что в 2 раза больше

(в равнобедр $\triangle$ бис-са явл. высотой)

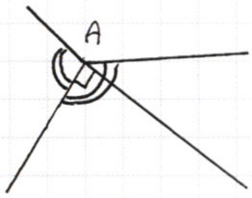
Бис-са и медиана, проведённые из одного угла не могут быть перпендикулярны

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. иначе угол, из которого они проведены окажется более 180°.



Таким образом стороны искомых Δ a, b, c должны одовлетворять условию:

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} b = 2a \\ a+b+c = 1200 \\ c < a+b \\ b < a+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + c = 1200 \\ c < 3a \\ a < c \end{cases}$$

1. $a < 300$ иначе $a \geq c$
2. $a > 200$ т.к. иначе $c \geq 3a$

для каждого a существует единственное значение b. т.к. сумма сторон задана, то и c определяется однозначно, значит кол-во треугольников равняется кол-ву значений a, $a \in \{201; 202; \ldots; 299\}$ – 99 значений

Ответ: 99.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

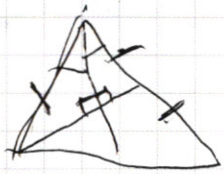
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c $\quad b = aq,\ c = aq^2 \quad x_1 = aq^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2\cdot aq\,x + aq^2 = 0$



$$\begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{aq^2}{a} = q^2 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{a} = -\dfrac{2aq}{a} = -2q \end{cases}$$

$a \quad b$

c

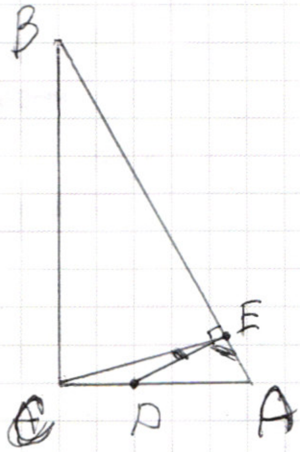
$b = 2a$

$$\begin{cases} aq^3 \cdot x_2 = q^2 \quad x_2 = \dfrac{1}{aq} \\ aq^3 + x_2 = -2q \end{cases}$$

$aq^3 + \dfrac{1}{aq} = -2q \quad | \times aq$

$a^2q^4 + 1 = -2aq^2$

$aq^2 = c$

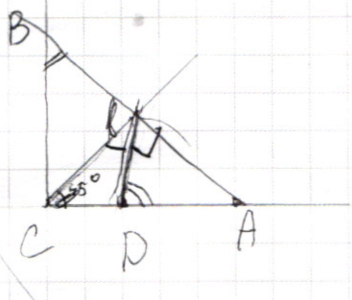


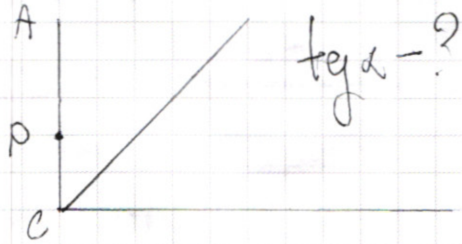
$c^2 + 1 = -2c$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

$\underline{c = 1}$

N



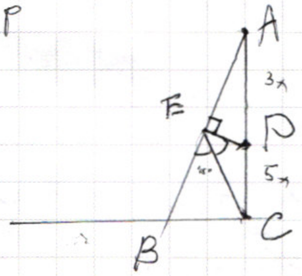


$tg\alpha - ?$

BEDC – вписаный, BP – диаметр

AC

$AD \cdot \cancel{AC} = AE \cdot AB$



$\frac{6}{5}$

$3x \cdot 5x =$

$AE = \frac{3x \cdot 5x}{}$

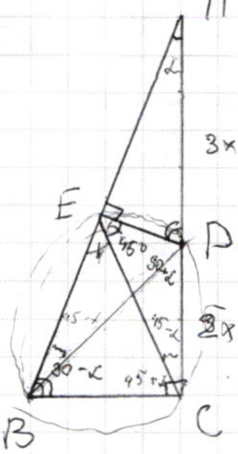
$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$\frac{29}{5}$

$\frac{\sqrt{29} : 0{,}4}{1}$

$\frac{3x}{AE} = \frac{AB}{5x}$

$\frac{EP}{BC} = \frac{AE}{5x} =$



$\sin(90 + \alpha) = \cos\alpha$

$116 : 4 = 29$

$180 - 45 - 90 - \alpha = 90 - 45 - \alpha = 45 - \alpha$

$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = \sqrt{29}$

$29 \cdot 2 = 58$

$\frac{\sqrt{29}}{y} = \frac{5}{2}$

~~△ABC Т синусов:~~

$y = \frac{2\sqrt{29}}{5} = 0{,}4\sqrt{29}$

~~$\frac{EC}{\sin A} = AB$~~

~~0,4~~

$5{,}8 \quad \sqrt{29}x$

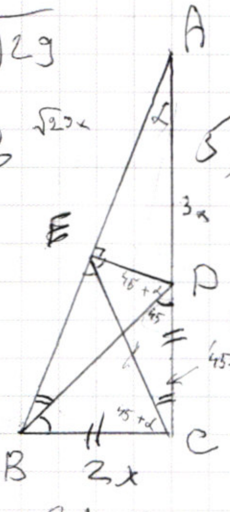
$0{,}16 \cdot 29 + 29 = 1{,}16 \cdot 29$

~~$BC = 5{,}8 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}}$~~ $=$

$\sqrt{1{,}16 \cdot 29} =$

$= \frac{29 \cdot 2 \cdot 0{,}1 \cdot 2}{\sqrt{29}} = 29 \cdot 2 \cdot 0{,}1$

$= \sqrt{0{,}01 \cdot 4 \cdot 29^2} =$

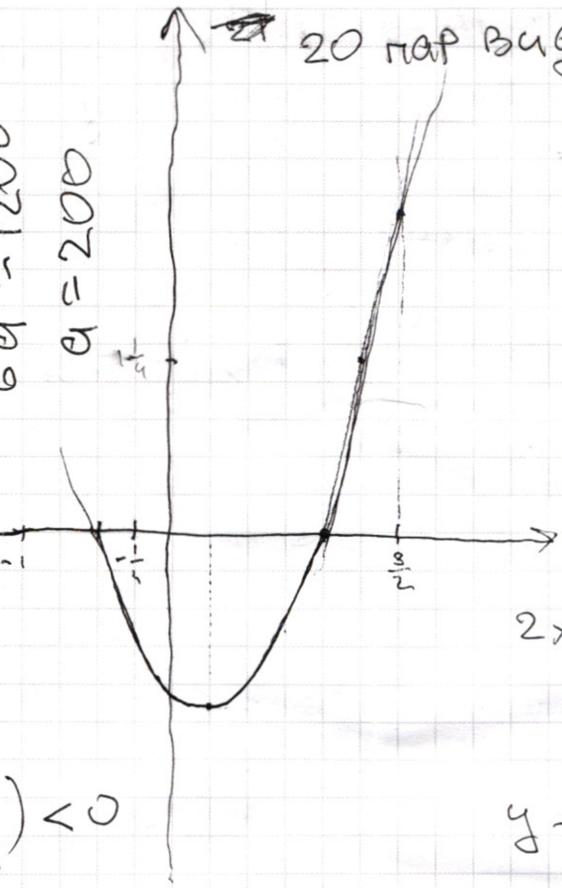


☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Край:
$4a = 1200$
1) $a = 300$
$6a = 1200$
$a = 200$

20 пар вида $f\left(\frac{1}{y}\right)$



$$\begin{cases} y - 2x = -\sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$y = 2x^2 - x - 1$

$x_B = \frac{1}{4}$

$y_B = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-2-8}{8} = \frac{-9}{8}$

нули: $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1) = 0$

$f(y) > f(x)$

~~$f(3) = f(1) = 0$~~

$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$18 \times 2 = 36$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(15) = 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f(1) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

~~$0 = 2 +$~~

$f(1) = 0$	$f(8) = 3$
$f(2) = 1$	$f(9) = 2$
$f(3) = 1$	$f(10) = 3$
$f(4) = 2$	$f(11) = 5$
$f(5) = 2$	$f(12) = 3$
$f(6) = 2$	$f(13) = 6$
$f(7) = 3$	$f($

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

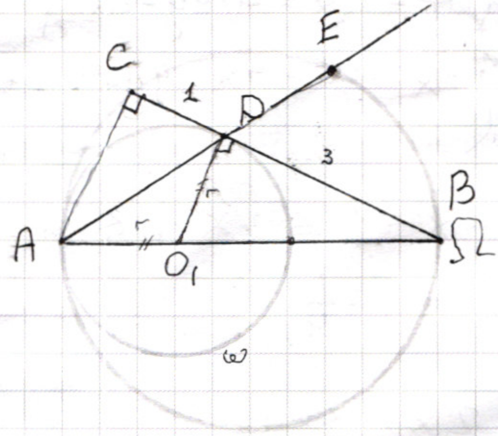
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найти: r, R, S_{BACE}



~~$9 + r^2 = $~~

$3^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 4Rr - 9 = 0$

$4R(R - r) = 9$

$= 130 + 52 = 182$

$= 20 + 50 + 60 + 52 =$

$= 20 + 36 + 56 + 48 + 16 + 3 + 2 + 1 =$

$BP^2 = (2R - 2r)2R$

$$\begin{cases} 9 = 4R(R - r) \\ \dfrac{2R - r}{2R} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$8R - 4r = 6R$

$2R = 4r$

$R = 2r$

$9 = 4 \cdot 2r^2$

$9 = 8r^2$

$r^2 = \frac{9}{8}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{(2R)^2 - 16} =$

$= \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$

$\frac{z}{9}$

$9h^+$

~~96~~$^+$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

$AP = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$

$\triangle CPE \sim_{\triangle} APB$ с коэф. подобия

$k = \frac{CP}{AP}$ — $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)