МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

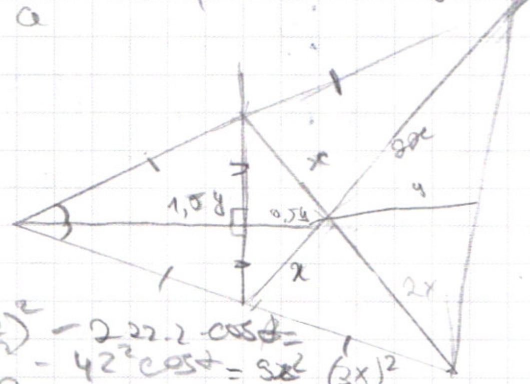
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, c \qquad b = aq \qquad c = aq^2$

$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad D = 4b^2 - 4ac = (2\sqrt{b^2 - ac})^2$

$\frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} = \frac{b}{a}$

$\frac{b}{a} = aq^3 \qquad b = a^2q^3 = aq \qquad aq^2 = 1$



$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 =$

$z^2 + (2z)^2 - 2 \cdot 2z \cdot z \cdot \cos\alpha =$

$5z^2 - 4z^2\cos\alpha = 5x^2 \quad (3x)^2$

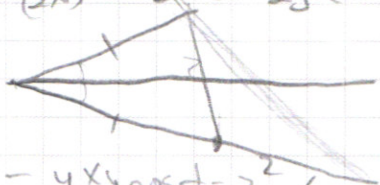
$(2y)^2 + x^2 - 2x \cdot 2y \cdot \cos\alpha = z^2$

$(2y)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2y \cdot (-\cos\alpha) = (2z)^2$

$xy - 2x - y + 2 = (x-1)(y-2)$

$(y-2x)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy =$

$= xy - 2x - y + 2$



$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$y^2 - (5x-1)y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$4y^2 + x^2 - 4xy\cos\alpha = z^2$

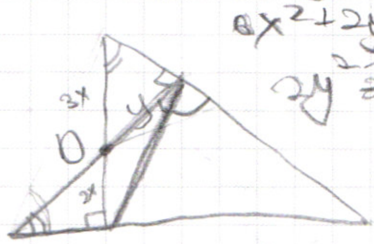
$4y^2 + 4x^2 + 8xy\cos\alpha = 4z^2$

$12y^2 + 6x^2 = 6z^2$

$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 5xy - 2x - 3y + 1 = 0$

$2y^2 - y(5x+3) + 2x^2 + 2x + 1 = 0$



$y^2 + z^2 = 9x^2$

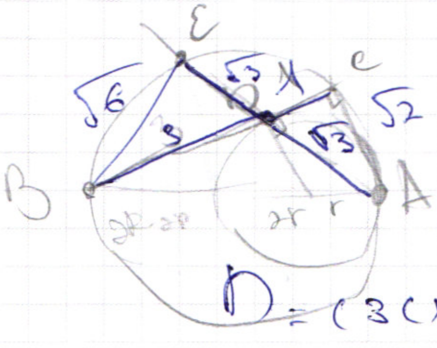
$z^2 = 9x^2 - y^2$

$z = \sqrt{9x^2 - y^2}$

$\frac{ED}{BD} = \frac{AD}{BD}$

$CD \cdot BD = ED \cdot DA$

$\frac{2Rr}{2R^2} = \frac{3}{4}$



$(2R - 2r)2r = 3$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$(x-1)(y-2) \geq 0$

$4(Rr - r^2) = 3$

$D = (3(x-1))^2$

$y^2 - y(5x-1) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

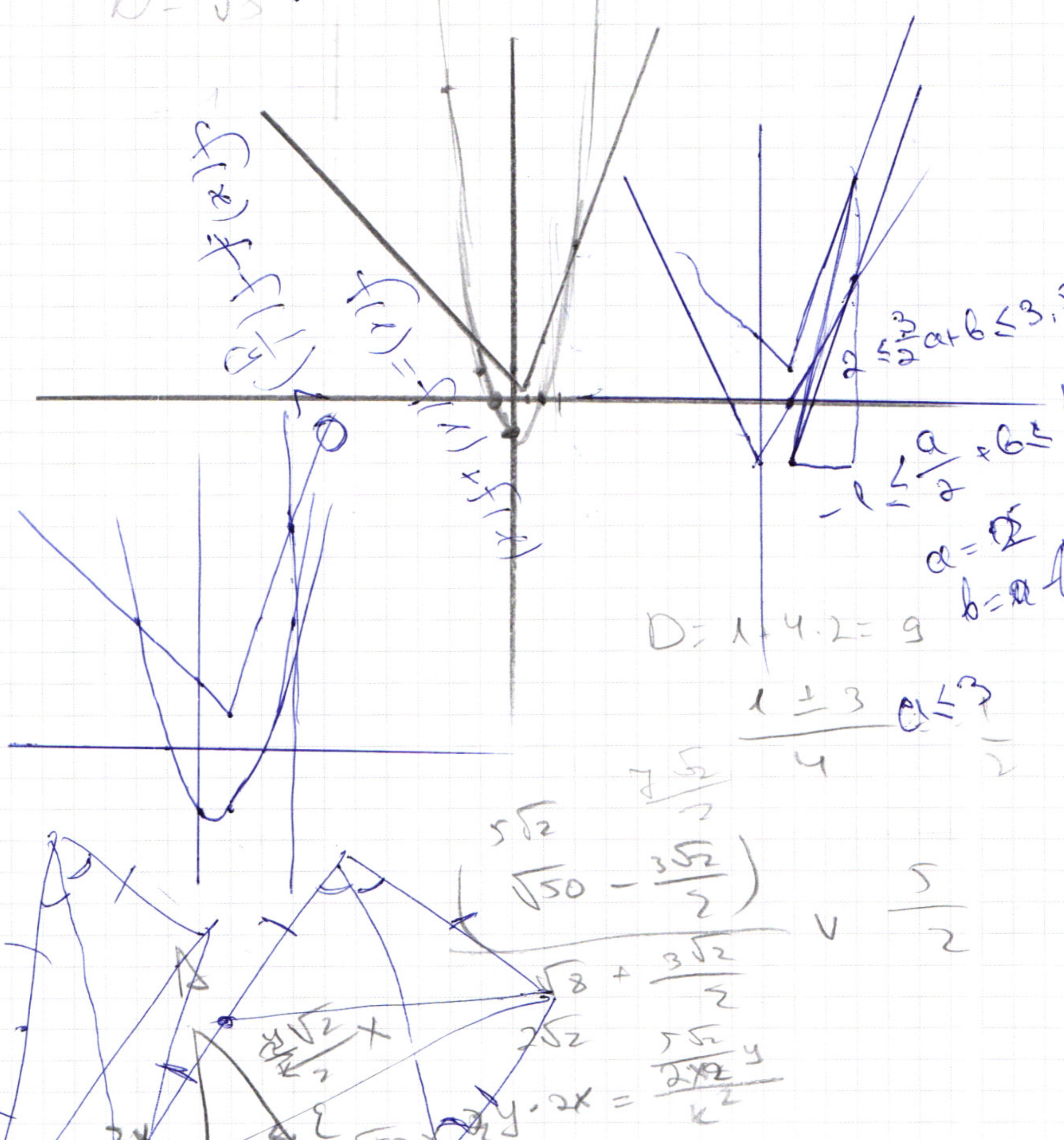
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$D = \sqrt{5}$



$2 \le \frac{3}{2}a + b \le 3,5$

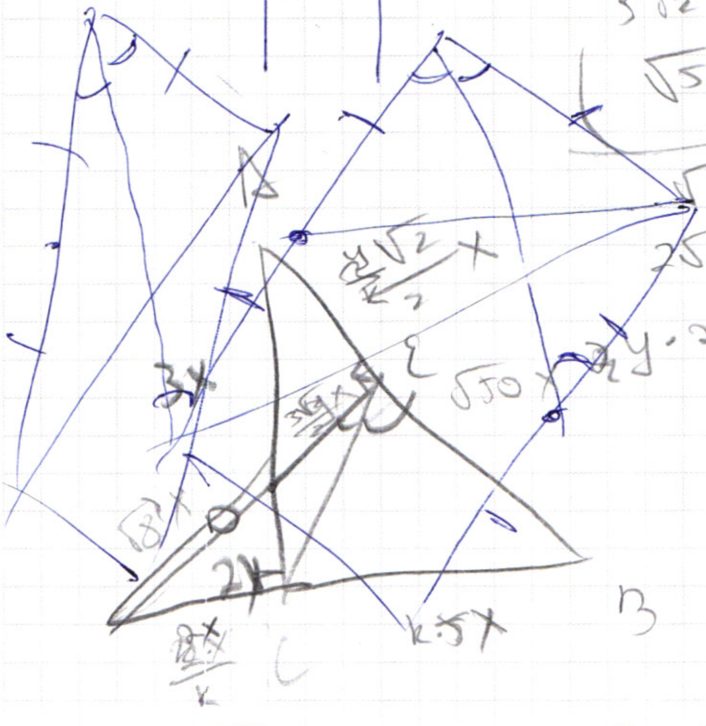
$-1 \le \frac{a}{2} + b \le \frac{1}{2}$

$a = 2$

$b = a - 1\frac{1}{2} - 1$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$

$\frac{1 \pm 3}{4}$ $a \le \frac{3}{2}$



$\frac{7\sqrt{2}}{2}$

$5\sqrt{2}$

$\left(\sqrt{50} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \vee \frac{5}{2}$

$\sqrt{8} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$2\sqrt{2}$

$y \cdot 2x = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} y}{k^2}$

$7\sqrt{2}$

$f(p) = [p/2]$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\frac{1}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~Пусть коэффициент на который отличаю~~

Т.к. a, b, c – последовательные члены прогрессии (геометрической), то $b^2 = ac$, $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$.

$ax^2+2bx+c=0$, $D=(2b)^2-4\cdot ac=4(b^2-ac)=0$

Значит, у уравнения один корень – $-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$.

Т.к. корень – 4 член прогрессии, то $-\frac{b}{a}=a\cdot q^3$.

$-b=a^2q^3=-a\cdot q$

Тогда, если $q=0$, то все члены прогрессии (начиная со второго) равны 0.

Если $a\neq 0$ и $q\neq 0$, то $a\cdot q^2=-1$.

Значит, $c=-1$.

Ответ: $c=-1$ или все члены прогрессии, начиная со второго, равны 0.

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-4xy=xy-2x-y+2, \\ xy-2x-y+2\geq 0, \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3. \end{cases}$$

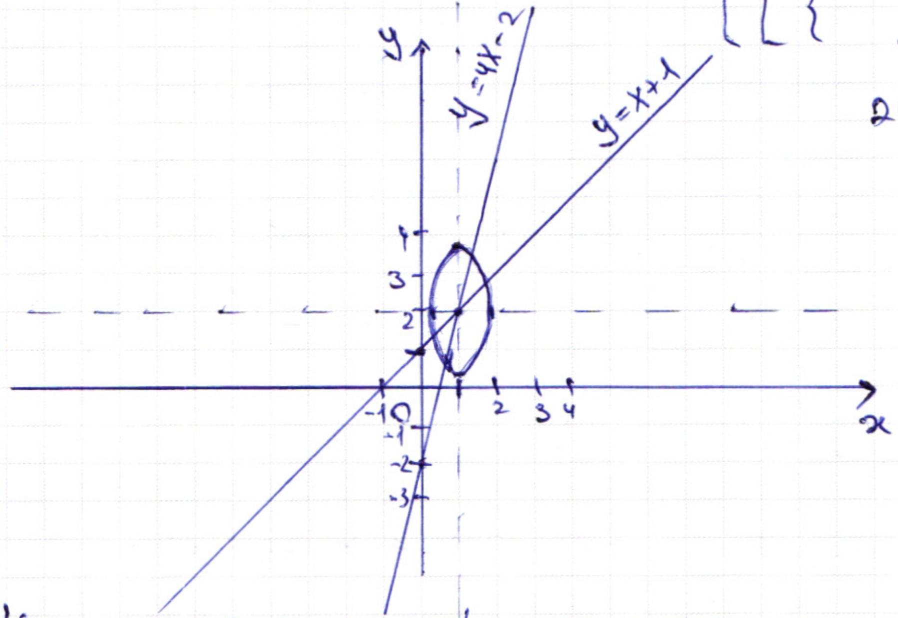
$$\begin{cases} y^2-y(5x-1)+4x^2+2x-2=0 \\ (x-1)(y-2)\geq 0 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3. \end{cases}$$

$D=(5x-1)^2-4\cdot(4x^2+2x-2)=25x^2-10x+1-16x^2-$
$-8x+8=9x^2-18x+9=9(x-1)^2=(3(x-1))^2$

$$\begin{cases} y=\dfrac{(5x-1)\pm|\overset{3x-3}{3(x-1)}|}{2} \\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ y<2\end{cases}\end{array}\right. \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=4x-2 \\ y=x+1 \end{array}\right. \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ y<2\end{cases}\end{array}\right. \end{cases}$$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$ — уравнение эллипса



Найдём точки пересечения эллипса и прямых, это будут решения системы.

1) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=x+1 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x-2 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}\end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=x+1 \\ 2(x-1)^2+(x-1)^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x-2 \\ 2(x-1)^2+(4x-4)^2=3 \end{cases}\end{array}\right.$ $\quad 16(x-1)^2$

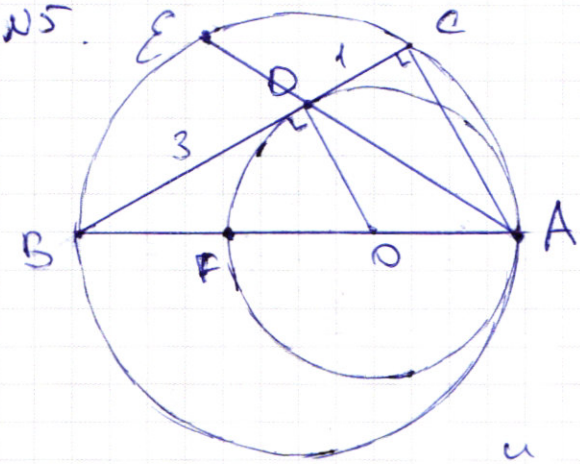
3) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=x+1 \\ (x-1)^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x-2 \\ (x-1)^2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6} \end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=2+\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=2-\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: решением системы являются 4 точки: $(3;2)$; $(0;1)$; $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{6}; 2-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.



Пусть r — радиус ω, а R — радиус Ω.

Т.к. A — точка внутреннего касания, то касательная к одной окружности в точке A будет и касательной к другой окружности.

Значит, центры окружностей и точка A на одной прямой.

Т.к. AB - диаметр Ω, то центр Ω лежит на AB, значит и центр ω лежит на AB.

Пусть O - центр ω. Тогда $OD \perp BC$, т.к. BC касается ω в D. Также, $OA = r$.

Т.к. AB - диаметр Ω, а $C \in \Omega$, то $\angle BCA = 90^\circ$.

Тогда $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ ($\angle CBA$ - общий, $\angle BDO = \angle BCA = 90^\circ$, B, O, A - $O \in [AB]$) по двум углам.

Тогда, $\frac{DO}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{3+1}$

Т.к. $AB = 2R$, $OA = r$, то $BO = 2R - r$.

$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{R}{2}.$$

Пусть AB повторно пересекает ω в точке F.

Тогда, по теореме об отрезке касательной —

$BD^2 = BF \cdot BA = (BA - FA) \cdot BA$

$FA = 2OA = 2r = R$

$BF \cdot BA = (2R - R) \cdot 2R = BD^2 = 9$

$2R^2 = 9$

$R^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, а $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Тогда, $DO = r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $AC = \frac{4}{3} DO = \sqrt{2}$.

По теореме Пифагора для $\triangle DCA$ — $CD^2 + CA^2 = DA^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$

Т.к. BACE — вписанный, то $ED \cdot DA = CD \cdot BD = 3$.

$ED = \frac{3}{DA} = \cancel{\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}\ \sqrt{3}$.

Аналогично $\angle BCA - \angle BEA = 90°$.

$S_{BCA} = \frac{1}{2} CB \cdot CA = 2\sqrt{2}$.

$S_{CDA} = \frac{1}{2} CD \cdot CA = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S_{BDA} = S_{BCA} - S_{CDA} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Для $\triangle BED$ по теореме Пифагора верно —

$BE^2 + ED^2 = BD^2 \Rightarrow BE^2 = BD^2 - ED^2 = 9 -$ [illegible] $= 6$

$BE = \cancel{\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}\ \sqrt{6}$. $S_{BDE} = \frac{1}{2} BE \cdot ED = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Т.к. BACE — вписанный, то $\triangle CDE \sim \triangle ADB$ с коэфф. подобия $\frac{CD}{AD}$.

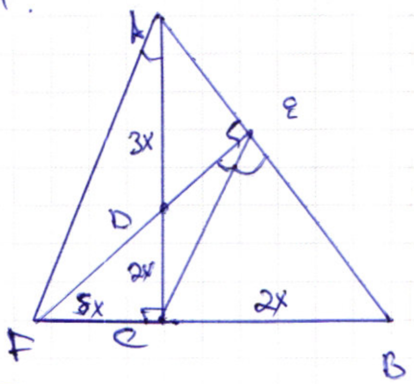
Тогда, $S_{CDE} = \frac{CD^2}{AD^2} \cdot S_{BDA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S_{BACE} = S_{CDE} + S_{CDA} + S_{BED} + S_{BDA} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

№4.



Пусть $AD = 3x$. Тогда, $AC = 5x$ и $DC = 2x$

Продлим AD до пересечения с CB в точке F.

Т.к. $\angle CED = 45°$, $\angle DEB = 90°$, то

EC — биссектриса $\triangle FEB$.

Т.к. $AC \perp CB$, то $\angle FCA = \angle DEA = 90°$.

Тогда, FCEA — вписанный. Тогда, $\angle FAC = \angle CED = 45°$

Тогда, $\triangle FCA$ — равнобедренный ($\angle FCA = 90°$, $\angle FAC = 45°$).

$FC = AC = 5x$

Также $\angle EAD = \angle DFC$ из вписанности FCEA.

Тогда, $tg(\angle BAC) = tg(\angle DFC)$

$tg \angle DFC = \frac{DC}{FC} = \frac{2}{5}$ (т.к. $\angle FCD = 90°$)

а) $tg\, BAC = \frac{2}{5}$

Т.к. $tg\, BAC = \frac{2}{5}$, то $CB = \frac{2}{5} AC = 2X$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. EC – биссектриса, то $\frac{EF}{EB} = \frac{FC}{CB} = \frac{5}{2}$

Т.к. $FCEA$ – вписанный, то $\triangle EDA \sim \triangle CDF$.

$\frac{ED}{DC} = \frac{AD}{FD}$.

По теореме Пифагора для $\triangle FCD$ – $FD^2 = FC^2 + CD^2 =$
$= 29x^2 \Rightarrow FD = \sqrt{29}\,x$

$ED \cdot FD = AD \cdot DC = 6x^2$.

$ED = \frac{6x^2}{\sqrt{29}\,x} = \frac{6\sqrt{29}}{29}x$

$FE = ED + FD = \frac{6\sqrt{29}}{29} + \sqrt{29} = \frac{35\sqrt{29}}{29}$

По теореме Пифагора для $\triangle ACB$ – $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 29x^2$.
$AB = \sqrt{29}\,x$.

Т.к. $\frac{FE}{EB} = \frac{FC}{CB}$, то $EB = FE \cdot \frac{2}{5} = \frac{14\sqrt{29}}{29}$.

Тогда, $AE = AB - EB = \frac{29\sqrt{29}}{29} - \frac{14\sqrt{29}}{29} = \frac{15\sqrt{29}}{29}$.

$\frac{S_{ACE}}{S_{ACB}} = \frac{AE}{AB} = \frac{15}{29}$ (т.к. C – общая вершина, а $E \in [AB]$).

$\frac{S_{CED}}{S_{ACE}} = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{5}$ (аналогично $\frac{S_{ACE}}{S_{ACB}}$).

Тогда, $S_{CED} = \frac{2}{5} S_{ACE} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{29} \cdot S_{ACB} = \frac{6}{29} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB =$
$= \frac{3}{29} \cdot 10x^2$. Т.к. $AC = \sqrt{29}$, то $5x = \sqrt{29}$, $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

$S_{CED} = \frac{3}{29} \cdot 10 \cdot \frac{29}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$.

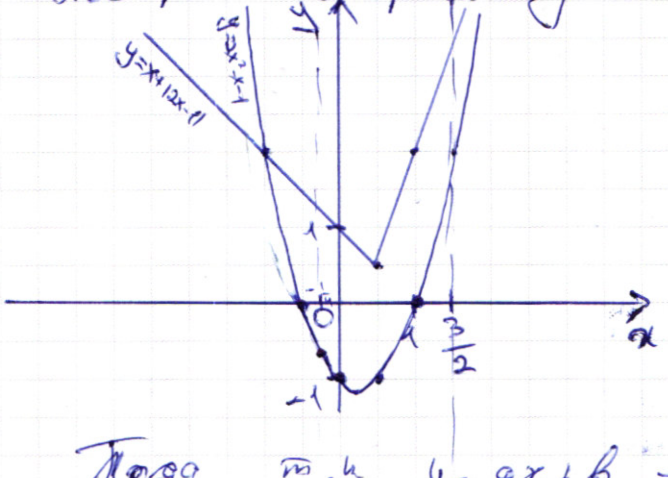
Ответ: а) $tg\, BAC = \frac{2}{5}$

б) $S_{CED} = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

№6.

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

Построим графики $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1|$.



Чтобы неравенство выполнялось нужно, чтобы графики $y = ax + b$ на участке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ лежал между $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1|$.

Тогда, т.к. $y = ax + b$ – прямая, то ~~любая её точка должна~~ рассмотрим три точки этой прямой – с абсциссой $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$. Тогда, если эти точки удовлетворяют неравенству то и весь отрезок $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ удовлетворяет неравенству.

Это верно т.к. $y = x + |2x - 1|$ линейна на $(-\infty; \frac{1}{2}]$ и на $[\frac{1}{2}; +\infty)$ значит если на каждом из этих участков $y = ax + b$ ниже хотя бы двумя точками, то и все точки между этими двумя ниже $y = x + |2x - 1|$ на этом участке.

Аналогично и с $y = 2x^2 - 2x - 1$ если какие-то две точки $y = ax + b$ выше $y = 2x^2 - x - 1$ и находятся внутри нашей параболы с ветвями вверх то и весь отрезок с концами в этих точках выше параболы.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{a}{4} + b \\ y_1 = 2 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - (-\frac{1}{4}) - 1 = -\frac{5}{8} \\ y_2 = -\frac{1}{4} + |2 \cdot (-\frac{1}{4}) - 1| = 1\frac{1}{4} \\ y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$ – для первой точки

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{a}{2} + b \\ y_1 = -1 \\ y_2 = \frac{1}{2} \\ y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$ – для второй точки.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3a}{2} + b \\ y_1 = 2 \\ y_2 = 3{,}5 \\ y_1 \le y \le y_2 \end{cases}$$ — для третьей точки.

Все три системы должны выполняться одновременно.

1) $\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4} + b \le \frac{5}{4} \\ -1 \le \frac{a}{2} + b \le \frac{1}{2} \\ 2 \le \frac{3a}{2} + b \le 3{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{5}{2} \le -a + 4b \le 5 \\ -2 \le a + 2b \le 1 \\ 4 \le 3a + 2b \le 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -5 \le 8b - 2a \le 10 \\ -\frac{9}{2} \le 6b \le 6 \\ 3 \le 2a \le 9 \end{cases}$ Значит $a > 2{,}5$, если решение есть.

$$\begin{cases} 1{,}5 \le a \le 4{,}5 \\ -\frac{9}{2} \le b \le 1 \\ -5 \le 8b - 2a \le 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \ge 4b - 5 \\ a \le 4b + 2{,}5 \\ 1{,}5 \le a \le 4{,}5 \\ -\frac{9}{2} \le b \le 1 \end{cases}$$

$a \ge 4b - 5$ неверно при $4b - 5 \ge 4{,}5$, что невозможно при допустимых b.
$a \le 4b + 2{,}5$ неверно при $4b + 2{,}5 \le 1{,}5$, что верно для $b < -\frac{1}{4}$.
~~Значит система равносильна~~

$$\cancel{\begin{cases} 4b-5 \le a \le 4b+2{,}5 \\ -\frac{1}{4} \le b \le \frac{7}{6} \end{cases}} \qquad \cancel{\begin{matrix} 4b-5 < 4{,}5 & \text{при } b < \frac{19}{8} \\ 4b+2{,}5 > 1{,}5 & \text{при } b > \frac{12}{8} \end{matrix}}$$

~~Ответ: все пары удовлетворяющие неравенству можно задать системой~~ $\cancel{\begin{cases} -\frac{1}{4} \le b \le \frac{7}{6} \\ 4b-5 \le a \le 4b+2{,}5 \end{cases}}$ ~~т.е.~~
~~для любого $b \in [-\frac{1}{4}; \frac{7}{6}]$ подходящие $a \in [4b-5; 4b+2{,}5]$.~~

$4b-5 \geq 1,5$ при $b \geq \frac{13}{8}$

$4b+2,5 \leq 4,5$ при $b \leq \frac{1}{2}$

Значит, при $b \in [\frac{1}{2}; \frac{7}{8}]$ все a, что лежат на $[1,5; 4,5]$ ~~для~~ подходят, а при $b \in [-\_; \frac{1}{2}]$ все a, что лежат на $[1,5; 4b+2,5]$ подходят.

Ответ: для $b \in [\frac{1}{2}; \frac{7}{8}]$ решениями будут пара $(a; b)$, где $a \in [1,5; 4,5]$

№7. $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} f(2)=1;\ f(3)=1;\ f(4)=2f(2)=2;\ f(5)=2; \\ f(6)=2;\ f(7)=3;\ f(8)=3;\ f(9)=2;\ f(10)=3;\ f(11)=5;\ f(12)=3; \end{array} \right.$

$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0$

Значит, $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

Т.к. ~~функция~~ значение функции у простых чисел это целая часть, что ~~больше~~ не меньше, а у составных это сумма простых множителей, то $f(x)$ при $x \in N$, $x > 1$ всегда ≥ 1, а $f(\frac{1}{x})$ при тех же x всегда < 0.

Т.к. $f(1) = 0$, то если в паре это не x, то $f(x/y) = f(x) \geq 0$, тогда, если в паре есть, то $y = 1$, а $x \neq 1$

Т.к. $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$, то $f(\frac{x}{y}) < 0$ если $f(y) > f(x)$ ~~т.к.~~

~~на натуральных x $f(x)$ растёт~~

$\left[\begin{array}{l} f(13)=6;\ f(14)=4;\ f(15)=3;\ f(16)=4;\ f(17)=8; \\ f(18)=3;\ f(19)=9;\ f(20)=4;\ f(21)=4. \end{array} \right.$

Все пары вида $(1; y)$, где $y \geq 2$, $y \in N$ — подходят под условие. Таких пар 20.

Если $f(x) = 1$, то пар — $2 \cdot 18 = 36$. Если $f(x) = 2$, то пар — $4 \cdot 14 = 56$

Если $f(x) = 3$, то пар — $6 \cdot 8 = 48$

Если $f(x) = 4$, то пар — $4 \cdot 4 = 16$.

Если $f(x) = 5$, то пар — $1 \cdot 3 = 3$

Если $f(x) = 6$, то пар — $1 \cdot 2 = 2$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $f(x)=8$, то пар — $1\cdot 1=1$

Если $f(x)=9$, то пар нет, т.к. это наибольшее для $x\in[1;21]$.

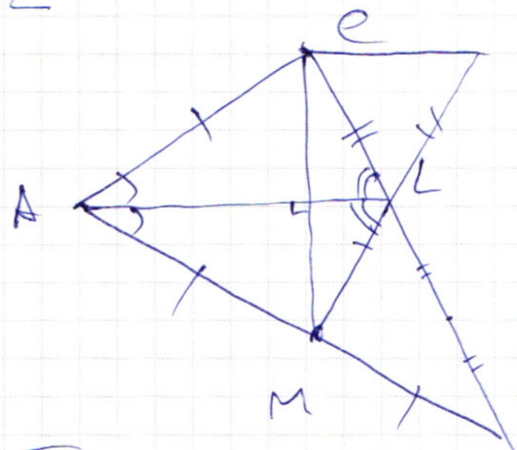
Мы перебрали все пары и посчитали в каких $f(x)>f(y)$.

Тогда, сумма таких пар искомое число:

$$\overset{56}{20+36}+\overset{112}{56}+\overset{160}{48}+\overset{176}{16}+3+\overset{8}{2}+1=182.$$

Ответ: 182 пары подходят под условие.

№2



$AM=MB$

$AL\perp CM$.

Т.к. AL — биссектриса и высота в $\triangle ACM$, то $AC=AM$.

Значит, $AB=2AC$.

Тогда, CLM — тоже равнобедренный. $LM=CL$

Т.к. AL — биссектриса $\triangle CAB$, то

$$\frac{CL}{LB}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow LB=2CL.$$

$$CB<AC+AB\Rightarrow CL<AC.$$

$$CB+AC+AB=1200$$

$$3CL+3AC=1200$$

$$\begin{cases}CL+AC=400\\ CL<AC\end{cases}$$

$CL = 400 - AC$

$400 > AC \geq 200$

Значит, таких пар AC и CL — 198

~~Ответ: 198.~~ $ML + LB > MB$

$3CL > AC$

$CL > \frac{400}{3} = 133$.

$CL \in [134; 199]$.

Ответ: 65 ~~пар~~ треугольников.