



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
- [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
- [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

- [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $v_1$  - геом. пр.

$$v_1 = a$$

$$v_2 = b$$

$$v_3 = c$$

$v_4$  - корень ур.:

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$v_3 = ?$$

$$v_1 = a$$

$$v_2 = aq = b$$

$$v_3 = aq^2 = c$$

подстав. в ур.:

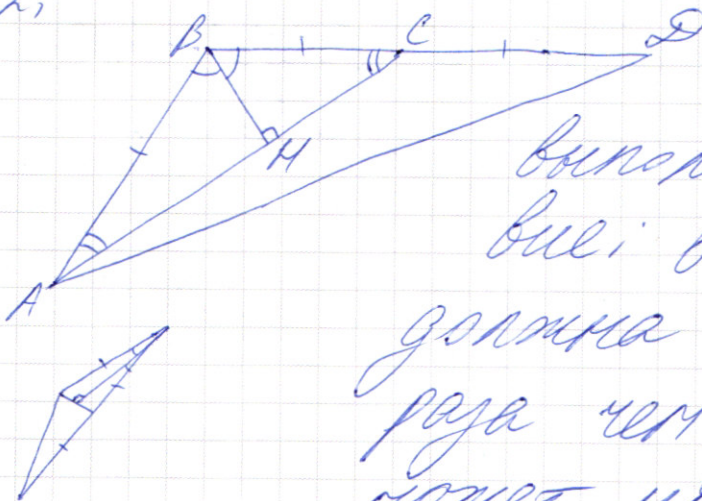
$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2aq \pm \sqrt{4a^2q^2 - 4a^2q^2}}{2a}$$

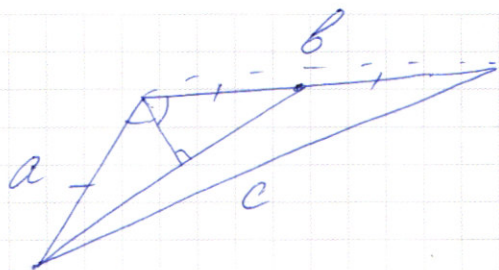
$$= \frac{2aq}{2a} = q \Rightarrow v_4 = q, \text{ также}$$

$$v_4 = v_3 q; q = v_3 q \Rightarrow v_3 = 1. \text{ Ответ: } v_3 = 1.$$

2.



твёрждение  
Условие, при котором  
выполняется данное усло-  
вие: в <sup>треуголь.</sup>  $\triangle ABC$ , одна сторона  
должна быть больше в 2  
раза чем другая. Третья  
может быть произвольной  
длиной, но меньше суммы двух других  
и больше чем меньшая сторона.  
 $\triangle ABC$  - р/б  $\Rightarrow$   $BH$  - бисс. и высота.



$$b = 2a \Rightarrow \text{Составляем уравн.:}$$

$$a < c < b + a \quad a + b + c = 900$$

$$a < c < 3a^{(*)} \quad \frac{3a}{a + 2a + c} = 900$$

$$c = \frac{900}{a}, \text{ учитывая усл. } (*) \Rightarrow$$

- В уравнение подставим нижний порок  $a = c$ ;

$$3a + a = 900$$

$$a = \frac{900}{4} = 225 \Rightarrow \underline{c > 225}$$

- Подставим верхний порок  $c = 3a$ ;

$$3a + 3a = 900$$

$$a = \frac{900}{6} = 150 \Rightarrow c < 3 \cdot 150 \Rightarrow \underline{c < 450}$$

кол-во треугол. зависит от кол-ва возможных знач.  $c, a$   $c \in [226; 449]$ , также должно выполнять условие:

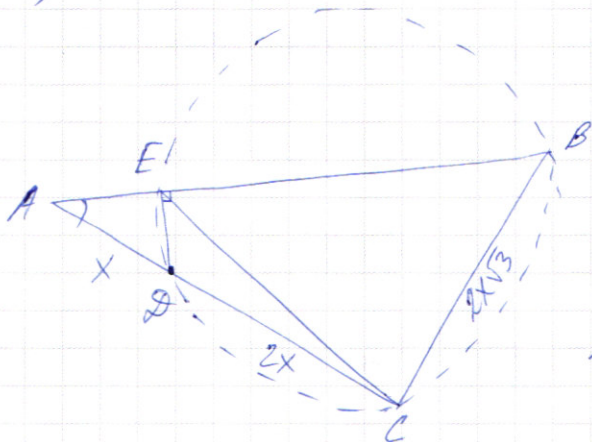
$$\frac{900 - c}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \underline{c : 3}, \text{ а число } : 3, \text{ когда}$$

сумма его цифр  $: 3$

Продолжение на стр. 17,

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.0)  $S_{\triangle CED} = ?$



$$1) AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$AB = \sqrt{3x^2} \quad BC = \frac{2\sqrt{7}\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$AB = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 21}{9}} = \sqrt{\frac{21 + 28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$2) S_{\triangle AEC} = \frac{AE \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{21}\sqrt{3}}{3 \cdot 7} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}}{3 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 7}}{21} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{7}}{21} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \cos \angle BAC; \quad AE = AD \cos \angle BAC =$$

$$= \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{21}}{3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{7 \cdot 7 \cdot 3}}{3 \cdot 7} = \frac{7\sqrt{3}}{3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{DE}{AD} = \sin \angle BAC; \quad DE = AD \sin \angle BAC =$$

$$= \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{AE \cdot ED}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

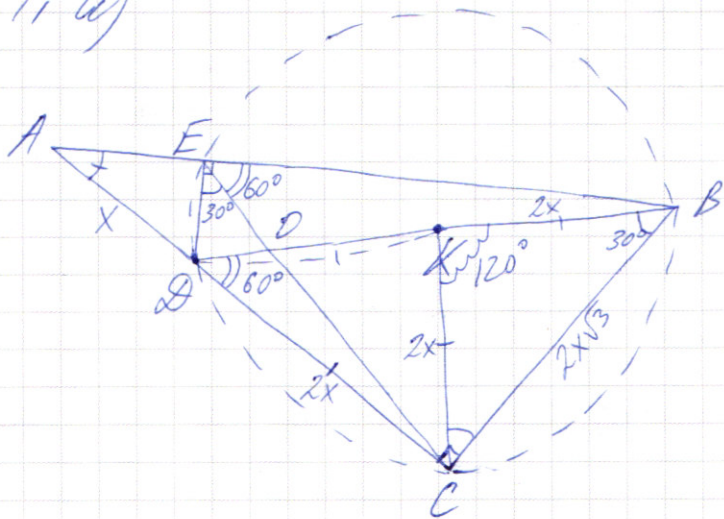
$$S_{\triangle CED} = S_{\triangle AEC} - S_{\triangle AED} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{9} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ:  $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ,

4, a)



$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = x$$

$$AC = 3x$$

$$DC = 2x$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$DE \perp AB$$

$\triangle ABC$  - прямоугол.

Найти  $\operatorname{tg} \angle BAC$

Решение: 1)  $DEBC$  - можно вписать в окр.

$$(т.к. \angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ)$$

2) Проведем  $BD$ ,  $\angle DCE = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$$

$$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

3) Центр окружн. <sup>(Т, К)</sup> лежит на середине  $BD$ , т.к.  $\triangle BCD$  - прямоугол. и впис., также против угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BD = 2CD \Rightarrow CD = \frac{1}{2} BD = DK = KC \text{ (} BD \text{ - diam., } KC, KB, KD \text{ - рад.)} \Rightarrow \triangle DKC \text{ - р/с} \Rightarrow$$

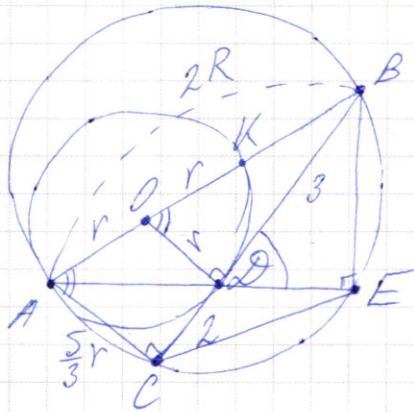
$$\Rightarrow \angle BKC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow BC = \frac{2 \cdot 2x \cdot \sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

51



$r$  - радиус. маленькой окр.

$R$  - рад. большой

$\parallel$   $BD$  - сек.;  $AB$  - касат.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BO \cdot OD = AB \cdot BK$$

$$9 = 2R(2R - 2r)$$

$$9 = 4R^2 - 4Rr \quad (1)$$

2)  $O$  - ц. малой окр.  $\Rightarrow OD \perp BD$ ;  $BD$  - касат.

$BC \perp AC$ , так как  $AB$  - диам.

Центр, малой окр. лежит на  $AB$ , т.к.  $AB$  - диам. большой окр.

$$\Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO}{AB}; \quad \frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10R - 5r = 6R \quad | \quad (2) \Rightarrow (1):$$

$$4R = 5r$$

$$r = \frac{4R}{5} \quad (2)$$

$$9 = 4R^2 - \frac{4R \cdot 4R}{5} \quad | \cdot 5$$

$$45 = 20R^2 - 16R^2$$

$$4R^2 = 45$$

$$R^2 = \frac{45}{4}; \quad R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2}} = \frac{3\sqrt{15}}{2} \quad (3)$$

(3)  $\Rightarrow$  (2)

$$r = \frac{24 \cdot 3\sqrt{5}}{5 \cdot 2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Ответ:  $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ;  $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ;  $S_{\text{BASE}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

2. Продолжение:

Целая часть числа  $\frac{449}{3}$  - это кол-во цифр от 1 до 449, которые ;3

Целая часть  $\frac{449}{3}$  равна 149

Целая часть числа  $\frac{226}{3}$  - это кол-во цифр от 1 до 226, которые ;3

Целая часть  $\frac{226}{3}$  равна 75

Кол-во ~~возможн~~ змс с и з

кол-во ~~возможн~~ змс труг, равно:

$$149 - 75 = 74$$

Ответ: 74.

$$6. \quad 8x - 6 / (2x - 1) \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$(a, b) = ?$   
 выполн,  
 где всех  
 $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$$1) \quad 8x - 6 / (2x - 1) \leq ax + b$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 8x - 12x + 6 \leq ax + b \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x + ax \geq 6 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 8x + 12x - 6 \leq ax + b \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x(20 - a) \leq b + 6 \end{cases}$$

$4 + a \neq 0 (3)$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -4x - ax \leq b - 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \geq \frac{6 - b}{4 + a} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 20x - ax \leq b + 6 \end{cases}$$

$$x \geq \frac{6 - b}{4 + a} \Rightarrow \frac{6 - b}{4 + a} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{b + 6}{20 - a} \\ 20 - a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{b + 6}{20 - a} \\ 20 - a < 0 (4) \end{cases} \Rightarrow \frac{b + 6}{20 - a} = \frac{1}{2}$$

~~(1) + (3) + (4)~~

$$\begin{aligned} 6 - b &= 4 + a \\ 2b + 12 &= -2a + a \\ a &< -4 \\ b & \end{aligned}$$

$$ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$8x^2 - x(a - b) + b - 7 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{a - b \pm \sqrt{a^2 + 12a + 36 - 4 \cdot 8}}{16}$$

$$(x - 6y)^2 + (y - 1)(x + b) - (x - 6)^2 - 2(y + 4)(y + 2) = 0$$

$$(x - 6y)^2 - (x - 6)(y - 1 + x - 6) - (2y - 4)(y + 2) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2): -13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 - 2y^2 + 12x + 4y - 20 = 0$$

$$(1) + (2): 2x^2 - 13xy + 36y^2 + 2y + x - 6 - 12x + 20 = 0$$

$$\begin{cases} (x - 6y)^2 = (y - 1)(x - 6) \\ (x - 6)^2 + 2(y^2 - 2y + 1 - 9) = 0 \end{cases} \quad \text{при } x - 6y \geq 0$$

$$\begin{cases} (x - 6y)^2 = (y - 1)(x - 6) \\ (x - 6)^2 + 2(y - 4)(y + 2) = 0 \end{cases}$$

Выбором удовлетворяет:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$7. F(ab) = F(a) + F(b)$$

$$F(p) = \lfloor p/2 \rfloor$$

$$\log_{10} \log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b \Rightarrow b > a \Rightarrow \log_{10} b > \log_{10} a$$

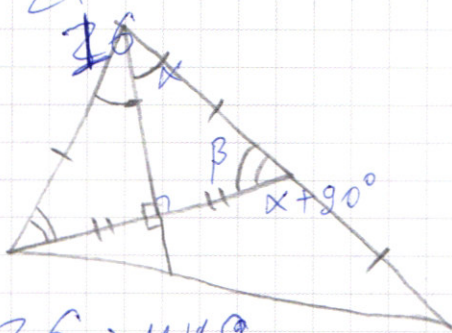
$$\log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b$$

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$$

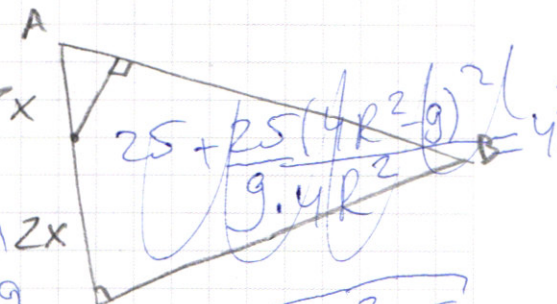
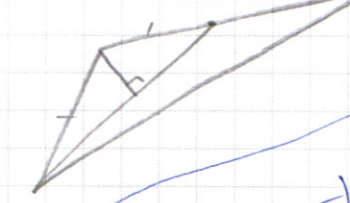
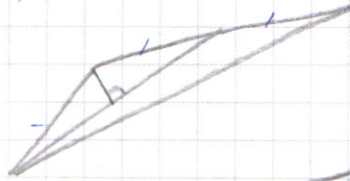
$$\log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b$$

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$$\begin{array}{r} 226 \overline{) 3} \\ -21 \\ \hline 175 \end{array}$$



$$r = \frac{4R^2 - 9}{4R}$$



226; 449

$$\begin{array}{r} 449 \overline{) 3} \\ -3 \\ \hline 149 \end{array}$$

$$r = \frac{\sqrt{4R^2 - 25}}{25}$$

$$25 + \frac{25}{9}r^2 = 4R^2$$

226 - 10 149

227 - 11

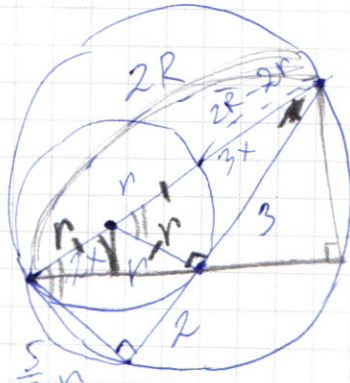
228 - 12 +

229 - 13 -

230 - 5 -

31	369	51
320	√42	52
√33	43	53
34	44	54
35	√45	55
36	46	56
37	47	57
38	48	58
√39	49	59
3-r	3	5
5-r	5	12
		15

140



$$\frac{3-r}{5} = \frac{r}{x} \quad 3x = r \cdot 5r$$

$$x = \frac{5}{3}r$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 - 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 - 2y^2 - 12x - 4y + 20 \end{cases}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\begin{cases} x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$-13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 + 12x - 36 + 2y^2 + 4y + 16 = 0$$

$$38y^2 + 10y + 13x - 26 - 13xy = 0$$

$$\frac{AD}{AB} =$$

$$28y^2 + 10y(y+1) - 13x(y-1)$$

$$AD \cdot AC = AE \cdot AB$$

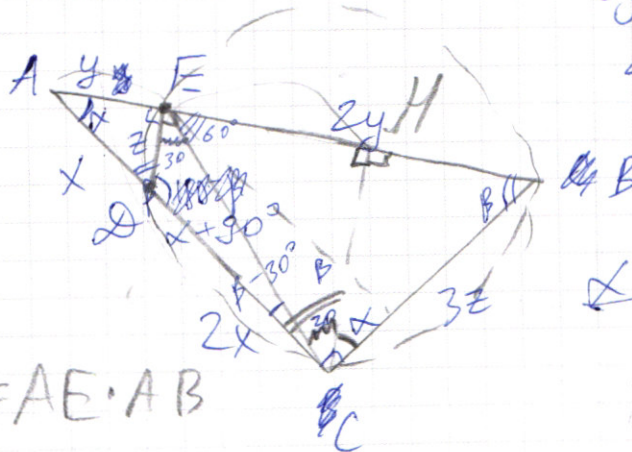
$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$

$$\text{tg} \angle BAC = ?$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\frac{AD}{BC} =$$



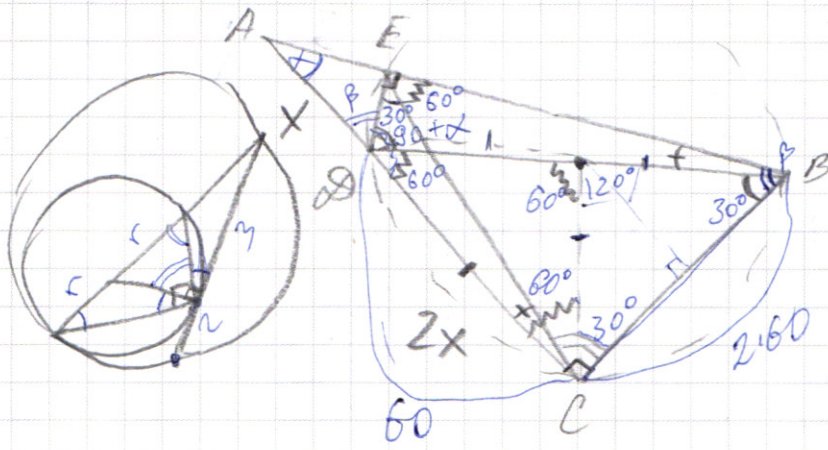
$$x + 90 + \beta = 30 + 30 = 180$$

$$AD \cdot AC = AE \cdot AB$$

$$EC = 2EM$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AB \cdot AB = AD \cdot AC$$



$$\beta + 90 + \alpha = 180$$

$$BD \cdot BC = BK \cdot BA$$

$$AD \cdot DE = BD \cdot CD$$

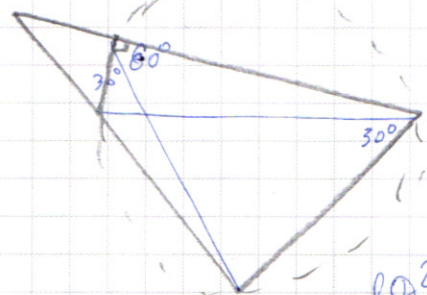
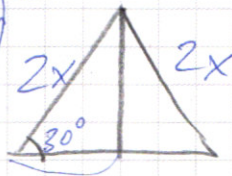
$$15 = 2R(2R - 2r)$$

$$4R^2 - 4Rr - 15 = 0$$

$$AD \cdot DE = 6$$

$$r^2 + 9 = (2R - 2r)^2$$

$$(2R - r)^2$$



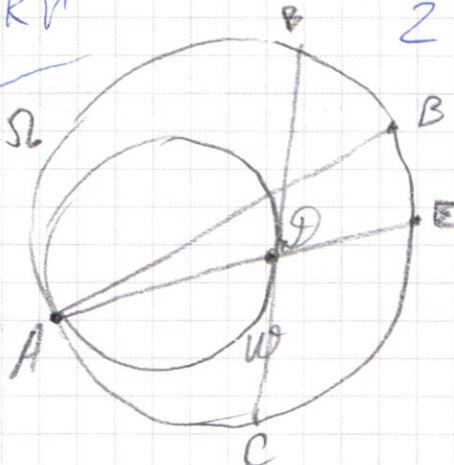
$$BD^2 = BK \cdot BA$$

$$9 = 4 \dots$$

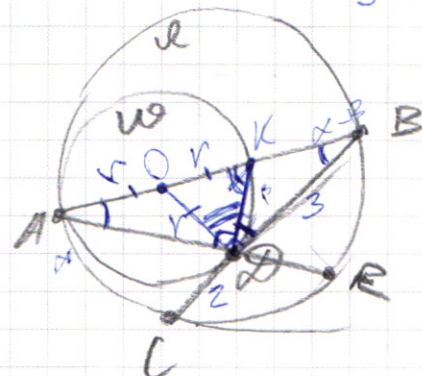
$$r^2 + 9 = 4R^2 - 4Rr + r^2$$

$$9 = 4R^2 - 4Rr$$

$$r = \frac{2x \cdot \sqrt{3}}{2}$$



$$R = \frac{r + \sqrt{r^2 + 15}}{2}$$



$$R_{1,2} = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 + 4 \cdot 4 \cdot 15}}{8}$$

$$= \frac{4r \pm 4\sqrt{r^2 + 15}}{8}$$



$$x - 6y = \sqrt{y(x-6)} \quad y(x-6) - 1(x-6)$$

$$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6) \quad (2) \quad x-6y \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y - 8) = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y^2 - 2y + 1 - 9) = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 3^2 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-4)(y+2) = 0 \quad (2)$$

$$(x-6y)^2 = xy + 6 - 6y - x$$

$$\frac{(x-6y)^2}{(y-6)^2} = y-1$$

$$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 2y^2 - 4y + 4 - 1 + 20 = 0$$

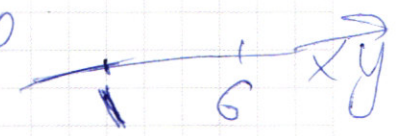
$$16 + (x-6)^2 + (2y-1)^2 = 17$$

$$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$$

$$(x-10)^2 + 2(x-6)^2 + 2(y-4)(y+2) - 16 + 2(-2) \cdot 4 = 0$$

$F(a,b)$

$F(a,b) = f(a) + f(b)$



3 x-