МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Если a, b и c – последов. члены геом. прогрессии, то $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$, где q – шаг в геом прогрессии.

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4 \cdot a^2 q^2 - 4a \cdot a \cdot q^2 = 0$

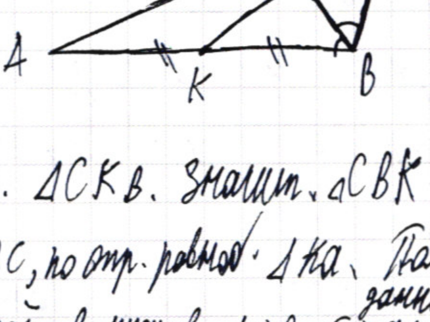
$x = \frac{-2b}{2a} = \frac{-2 \cdot a \cdot q}{2a} = -q$ – при этом x – 4ый член геом прогресси.

Тогда c (3-ий член) $= x : q = -1$.

Ответ: $c = -1$.

№2.

Давайте рассмотрим произвольный $\triangle ABC$, где CK – медиана и BP – бисс, $CK \perp BP$.



~~$\triangle CKB$: O~~ $BP \cap CK = O$

Рассм. $\triangle CKB$: BO – высота и бисс. $\triangle CKB$. значит $\triangle CBK$ – равноб. (призн. равноб. $\triangle$-ка). Тогда $KB = BC$, по опр. равноб. $\triangle$ка. Получаем, что одна сторона в два раза больше другой в произв. $\triangle$-ке с ~~такими~~ данным условием.

Пусть та сторона, которая в 2 раза меньше другой, будет x, тогда другая сторона $2x$, а третья $1200 - 3x$ (так как общий P – 1200 по условию). Воспользуемся неравенством $\triangle$-ка:

$$\begin{cases} 2x+x>1200-3x \\ x+1200-3x>2x \\ 2x+1200-3x>x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>1200-3x \\ 1200-2x>2x \\ 1200-x>x \end{cases} \quad \begin{cases} x>200 \\ x<300 \\ x<600 \end{cases} \quad 200<x<300$$

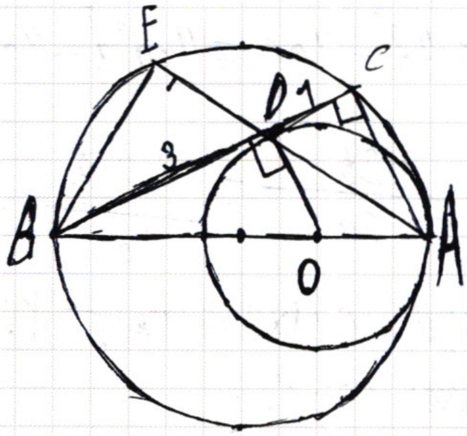
Значит x может быть от ~~*~~ 201 до 299, включительно. Всего 99 вариантов. Значит и Δ-ков будет 99.

Ответ: 99.

№ 5

Дано: две окр-ти: ~~Ω~~ Ω и w.
Ω и w касаются в т. A внутренним образом. AB – диаметр Ω. $\Omega > w$, BC – хорда окр-ти Ω, касается w в т. D, луч AD ~~$\cap$~~ $\cap\ \Omega = E$, $CD=1$, $BD=3$.

Найти: радиусы Ω и w



Решение:

1) Пусть ц. окр-ти w – O.
2) $\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр окр-ти ~~Ω~~ Ω
3) $OD \perp BC$. $\angle BDO = 90^\circ$ (усл, св-во касат.)
4) Рассм ΔBDO и ΔBCA:
$\angle BCA = \angle BDO$ и $\angle CBA$ – общий. Значит $\Delta BDO \sim \Delta BCA$. (~~по~~ признак подобия по двум углам)
5) ~~DC~~ $\frac{BC}{DC} = 4$ (усл) ~~$\Rightarrow$~~. Значит $k=4$ (коэфиц. подобия – k).

6) Пусть $CA = 4x$, тогда $DO = 3x$ (п.5)
7) $BO = \sqrt{BD^2+DO^2} = \sqrt{9+9x^2} = 3\sqrt{1+x^2}$
$BA = \sqrt{BC^2+CA^2} = \sqrt{16+16x^2} = 4\sqrt{1+x^2}$ (п. 6, усл, п 2, п. 3, Тh Пифагора)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (продолжение)

8) $DO = OA = 3x$ (п. 6, опр. радиуса)

9) $BO + OA = BA$. $3\sqrt{1+x^2} + 3x = 4\sqrt{1+x^2}$

$3x = \sqrt{1+x^2}$

~~$9x^2 = 1+x^2$~~

~~$8x^2 = 1$~~

$$\begin{cases} 9x^2 = 1+x^2. \\ 3x > 0 \\ 1+x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{8} \\ x > 0 \\ x^2 > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x > 0 \\ x^2 > -1 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

10) $OA = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ (п. 8, 9)

11) $BA = 4\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 4\cdot\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{4\cdot 3}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$..

радиус Ω равен $\frac{BA}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

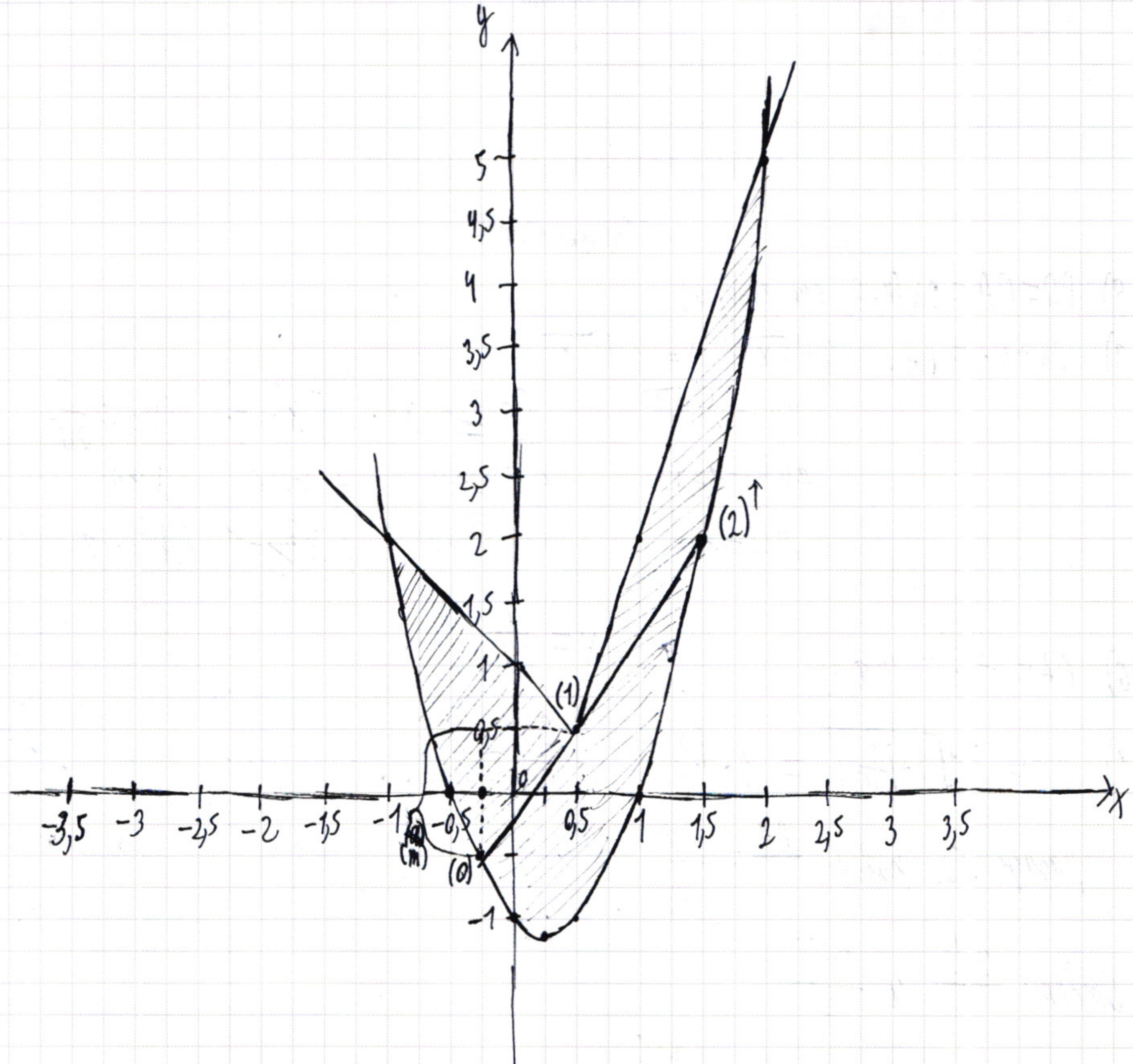
№ 6

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$

$2x^2 - x - 1$: ~~т~~ вершина параболы $(1/4; -8/9)$

$x + |2x-1|$

$$\begin{cases} 3x-1, \text{ если } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x, \text{ если } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



Из графика, заметим, что прямая, соедин. (1) и (2) не ~~пряма~~ пересек. ни одну точку из пром. (m). ~~∃ к~~ По условию мы должны найти такие a и b, чтобы для каждого $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ находился y. ~~∀x~~ $ax+b$ – это прямая. Получаем, ~~смещая~~ что даже смещая точку (2) вверх или точку (1) вниз, прямая всё равно не затронет промежуток m, а значит и не найдётся таких a и b, чтобы для $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2})$ нашёлся y.

Ответ: не существует.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

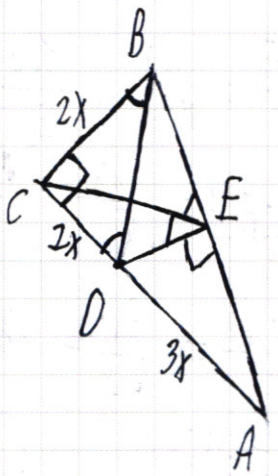
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг, AB - гип., $D \in AC$, $E \in AB$, $AD : AC = 3:5$ и $DE \perp AB$, $\angle CED = 45°$

Найти: а) $tg\ \angle$ ~~CED~~ BAC

б) $S_{\triangle CED}$, если $AC = \sqrt{29}$



Решение:

1) $\angle BED = \angle DEA = 90°$ (усл, ~~опр.~~ св-во перп.)

2) в четыр-нике $BCDE$: $\angle BCD + \angle BED = 180°$ (усл, п.1). Значит $BCDE$ - впис. четыр. (призн. впис. чет-ника)

3) ~~и~~ проведём BD. $\angle CBD = \angle CED$ и $\angle BDC = \angle CEB$, т.к. они опираются на одну дугу CD и BC соответственно. (п.2)

4) $\angle CEB = \angle BED - \angle CED = 90° - 45° = 45°$ ~~/~~ $= \angle CED$ (усл., п.1)

5) $\angle CBD = \angle CDB$ (п.4 и п.3)

6) $\triangle CBD$ - равноб (п.5, призн. равноб. $\triangle$-ка)

7) $CB = CD$ ~~= 2x~~. (п.6, опр. равноб. $\triangle$-ка)

8) ~~$\mathcal{B}$~~ Пусть $CA = 5x$. Тогда $DA = 3x$, $CD = 2x$ и $CB = 2x$ (усл, п.7)

9) Расм. $\triangle CBA$ и $\triangle DEA$: $\angle BCA = \angle DEA$ и $\angle A$ - общий. Значит $\triangle CBA \sim \triangle DEA$. (призн. подобия по двум углам)

10) ~~DE~~ $\frac{DA}{BA} = \frac{EA}{CA}$ ~~/~~ (п.9). $\frac{3x}{BA} = \frac{EA}{5x}$. ~~$15x$~~ $EA \cdot BA = 15x^2$ (п.8)

11) $BA=\sqrt{BC^2+CA^2}$ (~~#~~ Th Пифагора) $BA=\sqrt{4x^2+25x^2}=x\sqrt{29}$ (п.8)

12) $EA\cdot x\sqrt{29}=15x^2$. $EA=\frac{15x}{\sqrt{29}}$ (п.11, п.10)

13) $DE=\sqrt{DA^2-EA^2}=\sqrt{9x^2-\frac{225x^2}{29}}=\sqrt{\frac{261x^2-225x^2}{29}}=\frac{6x}{\sqrt{29}}$ (п.12, п.8, Th Пифагора)

14) $tg\angle BAC=\frac{DE}{EA}=\frac{6x}{\sqrt{29}}:\frac{15x}{\sqrt{29}}=\frac{6x}{15x}=\frac{2}{5}=0,4$ (п.13, 12, опр tg в прям △-ке)

15) $S_{\triangle}DEA=\frac{DE\cdot EA}{2}=\frac{6x}{\sqrt{29}}\cdot\frac{15x}{\sqrt{29}}:2=\frac{45x^2}{29}$ (п.13, п.12)

16) $S_{\triangle}DEA=\frac{DA\cdot h}{2}=\frac{3x\cdot h}{2}$ (п.8), где h - высота из т. E.

17) $\cancel{45x^2}$ $\frac{45x^2}{29}=\frac{3x\cdot h}{2}$ $h=\frac{30x}{29}$ (п.16, 15)

18) $S_{\triangle}CED=\frac{CD\cdot h}{2}$ (т.к. высоты △CED и △DEA из т. E равны) =

$=\frac{2x\cdot 30x}{29\cdot 2}=\frac{30x^2}{29}$. (п.8, 17)

19) $CA=5x=\sqrt{29}$. $x=\frac{\sqrt{29}}{5}$ (усл, п.8)

20) $S_{\triangle}CED=\frac{30x^2}{29}=\frac{\frac{30\cdot 29}{25}}{29}=\frac{30\cdot 29}{25\cdot 29}=\frac{6}{5}=1,2$

Ответ: $tg\angle BAC=0,4$, $S_{\triangle}CED=1,2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

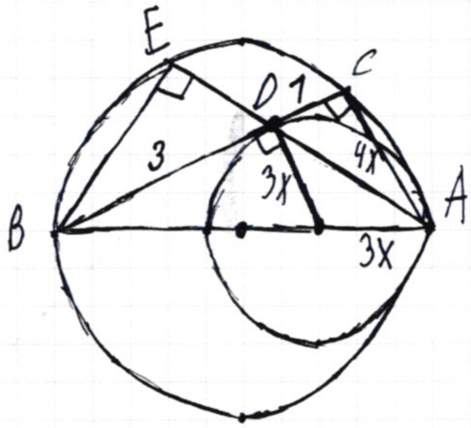
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ED \cdot DA = 3$

$9+9x^2$ $\quad 16x^2+16$

$\cancel{4\sqrt{(1+x^2)}}$

$3\sqrt{(1+x^2)}$ $\quad 4\cdot\sqrt{(x^2+1)}$



$8 \quad 3\sqrt{1+x^2}+3x = 4\cdot\sqrt{x^2+1}$

$3x = \sqrt{x^2+1}$

$4\sqrt{x^2+1} = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}+1} =$

$= 4\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$\cancel{3x^2 = x}$

$9x^2 = x^2+1$

$8x^2 = 1$

$\cancel{x = \pm 1}$

$x^2 = \frac{1}{8}$

$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

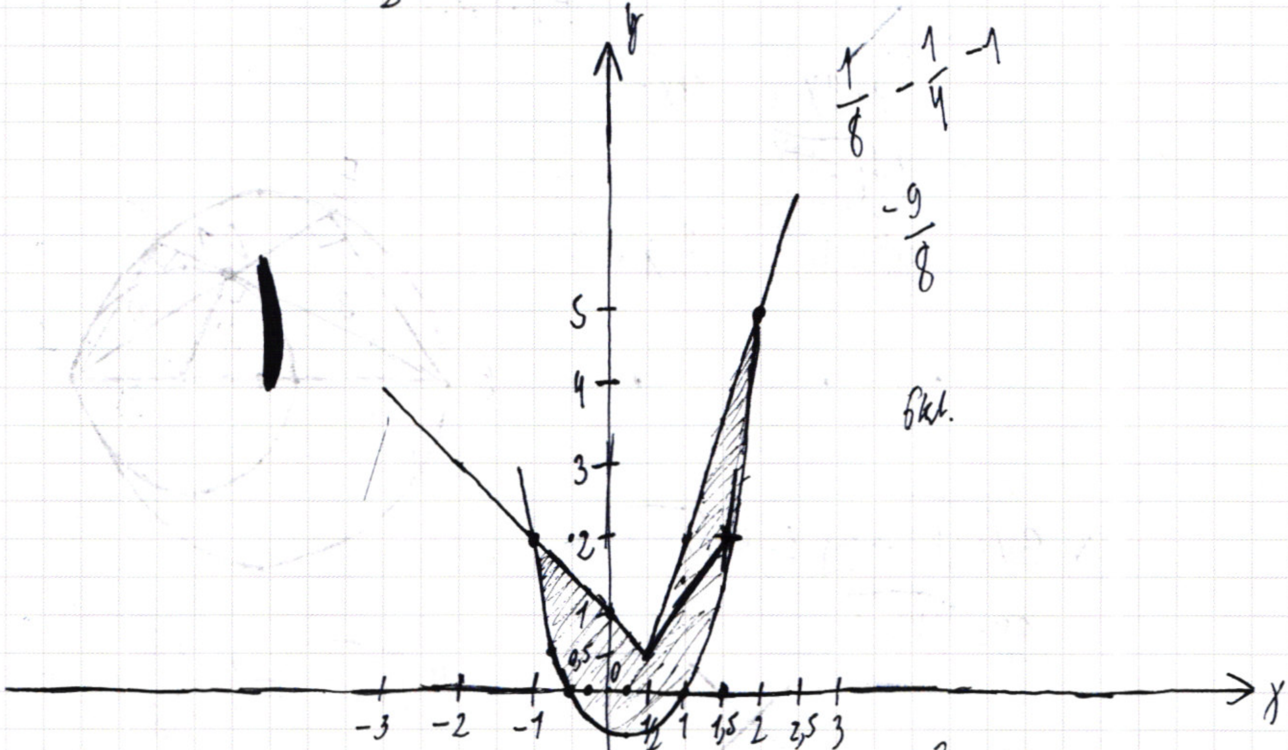
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x+|2x-1|=y$ $\qquad$ $2x^2-x-1$

$2x-1\geq 0 \qquad x\geq \frac{1}{2}$ — $3x-1$ $\qquad$ $\frac{-b}{2a} \qquad \frac{1}{4}$

$2x-1<0 \qquad x<\frac{1}{2}$ — $-x+1$



$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$

$-\frac{9}{8}$

6кл.

$Sxy = y^2+4x^2+2x+y-2$

1.6 и 30

$Sx=\frac{y^2+4x^2+2x+y-2}{y}$ $\qquad$ 1,6

30

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2-4xy+4x+4y-3=xy-2x-y+2$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$-5y(x-1) \qquad 5\cdot(x-1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a

$b=a\cdot q$

$c=a\cdot q^2$

$d=a\cdot q^3$

$ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot(a\cdot q^3)^2+2\cdot a\cdot q\cdot a\cdot q^3+aq^2=0$

$a^3\cdot q^6+2\cdot a^2\cdot q^4+aq^2=0$

$\cancel{a}\,aq^2\cdot(a^2\cdot q^4+2aq^2+1)=0$

$a^2\cdot q^4+2aq^2+1=0$

$x+1200-3x>2x$

$4x<1200$

$x<300$

$2x+1200-3x>x$

$2x<1200$

$x \quad 2x \quad \boxed{x<600}$

$1200-3x$

$x+2x>1200-3x$

$3x>1200-3x$

$6x>1200 \quad \boxed{x>200}$

$D=4b^2-4ac$

$x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=\frac{-a\cdot q}{a}=$

$=-q$

$1200=10\cdot10\cdot6\cdot2=$

$=5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2=$

$=5^2\cdot3\cdot2^4$

$4a^2q^2-4a^2q^2=0$

$200<x<300$

290 580

330

4ый $-q$

3ий -1

2ой от 201 до 299

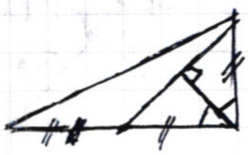
100 200 99 д-ов.

900 300 600

300

$a\cdot q^3=-q$

$a=-\frac{1}{q^2}$



301 602

297

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{4x^2+25x^2}=\sqrt{29x^2}=x\sqrt{29}$$

$$x=\frac{\sqrt{29}}{5} \qquad \frac{6\cdot\cancel{30\cdot 29}}{5\cdot\cancel{25\cdot 29}}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

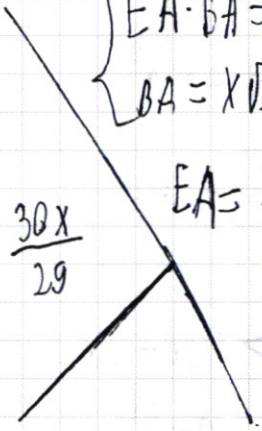
$$\frac{\frac{6x}{\sqrt{29}}\cdot\frac{15x}{\sqrt{29}}}{2}=\frac{45x^2}{29} \qquad 5x=\sqrt{29}$$

$$\cancel{\sqrt{2x^2+5x^2}=x\sqrt{7}}$$

$$\cancel{2x^2-4x+1+y^2-4y+2\neq 0}$$

$$\frac{30\cdot\frac{29}{25}}{29} \qquad \cancel{\sqrt{2}x} \quad \cancel{y} \qquad \frac{30x^2}{29}$$

$$\begin{cases} \cancel{EA\cdot BA=15x^2} \\ \cancel{DE+EA=x\sqrt{7}} \end{cases} \quad BA$$



$$\begin{cases} EA\cdot BA=15x^2 \\ BA=x\sqrt{29} \end{cases}$$

$$EA=\frac{15x}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{6x}{\sqrt{29}}:\frac{15x}{\sqrt{29}}=\frac{2}{5}=(3y) \qquad y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \qquad \frac{15x}{29} \qquad \frac{30x}{29}$$

$$\frac{45x^2}{29}:3x$$

$$4x^2+y^2+2x+y-2=5xy$$

$$2x^2+y^2-4x-4y+3=5xy-2x^2-6x-5y-5$$

$$\frac{14x}{\sqrt{29}}$$

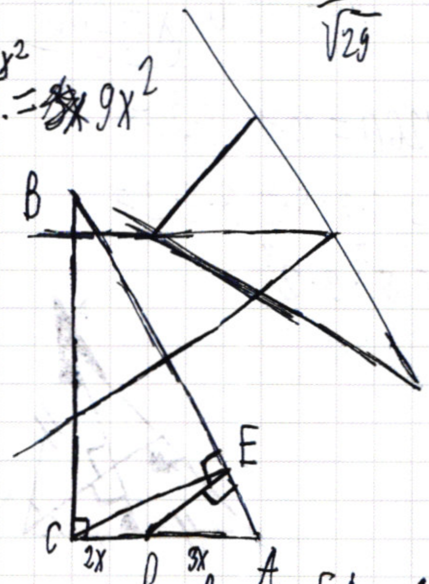
$$-2x^2-6x-5y-5+5xy=0 \qquad \frac{225x^2}{29}+\frac{36x^2}{29}=9x^2$$

261

$$25\cdot 9=$$

36

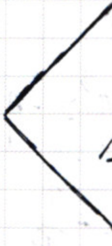
$$-2x-y+2=2x^2+y^2-6x-5y+5 \qquad \frac{6x}{\sqrt{29}}$$



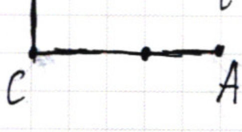
$$\frac{\sin}{\cos}=\frac{\frac{\text{прот}}{\text{гип}}}{\frac{\text{прил}}{\text{гип}}}$$

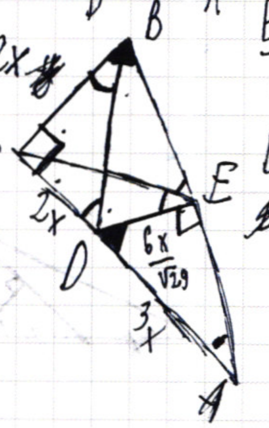
$$2x^2+y^2-6x-5y+5+xy$$

$$\frac{\text{прот}\cdot\cancel{\text{гип}}}{\cancel{\text{гип}}\cdot\text{прил}}=\frac{\text{прот}}{\text{прил}}$$



$$\cancel{\frac{EA}{3}}$$





$$\frac{EA}{5x}=\frac{3x}{BA}$$

$$EA\cdot BA=15x^2$$

$$tg\angle BAC$$

$$\frac{DE}{DA}=\frac{DE}{3}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)