# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c, x=-k \qquad ax^2+2bx+c=0$

$b=ka \qquad D=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$

$c=k^2a \qquad x_{1,2}=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$$x_{1,2}=\frac{-ka\pm\sqrt{k^2a^2-k^2a^2}}{a}=-k$$

$$\begin{cases} b=ka \\ c=k^2a \\ -k=k^3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=k^2a \\ -1=k^2a \end{cases} \Leftrightarrow c=-1$$

Ответ: $-1$

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

для $x=1$:

$2+y^2-4-4y+3=0$

$y^2-4y+1=0$

$D=16-4\cdot1=12$

$y_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt3}{2}=2\pm\sqrt3$

$$\begin{cases} y_{1,2}=2\pm\sqrt3 \\ y\geq2 \end{cases} \Leftrightarrow y=2+\sqrt3$$

ОДЗ: $\begin{cases} y-2x\geq0 \\ xy-2x-y+2\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow$

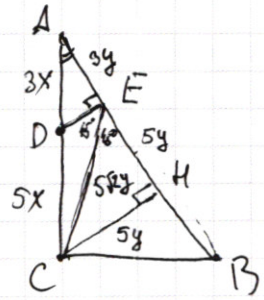
$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq2x \\ x(y-2)-(y-2)\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq2x \\ (x-1)(y-2)\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq2x \\ x\geq1 \\ y\geq2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\geq2x-2 \\ 1\leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x \\ 1\geq x \\ y\geq2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y\geq2 \end{cases}$

Ответ: $\{\overset{x}{1};\ \overset{y}{2+\sqrt3}\}$

№4




1. пусть $AD = 3x$, тогда $DC = 5x$

проведем высоту $CH$, тогда $DE \parallel CH$

$\triangle ACH \sim \triangle ADE$ ($\angle CAB$ - общ, $\angle DEA = \angle CHA$)

пусть $AE = 3y$, тогда $EH = 5y$.

$\measuredangle \triangle EHC$: $\angle CEH = \angle DEH - \angle DEC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

тогда и $\angle ECH = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\Downarrow$ $\triangle EHC$ - р/б $\triangle$ и $EH = HC = 5y$

$tg\angle BAC$ - ?

б) $AC = \sqrt{29}$

$S_{\triangle CED}$ - ?

2. $\measuredangle \triangle ACH$ ($\angle H$ - $90^\circ$)

по теореме пифагора:

$CH^2 + AH^2 = AC^2$

$tg\angle BAC = tg\angle HAC =$ (т.к. $\triangle ACH \sim \triangle ADE$)

$= \frac{CH}{AH} = \frac{5y}{8y} = \frac{5}{8}$

3. $\measuredangle \triangle CEH$: ($\angle CHE = 90^\circ$)

по теореме пифагора:

$CH^2 + EH^2 = CE^2$

$25y^2 + 25y^2 = CE^2$

$CE = 5\sqrt{2}y$

4. т.к. $\triangle ADE \sim \triangle ACH$, то

$\frac{AE}{DE} = \frac{AH}{CH}$, $\frac{3y}{DE} = \frac{8y}{5y}$, $DE = \frac{15y}{8}$

5. $\measuredangle \triangle ACH$ ($\angle CHA = 90^\circ$):

по теореме пифагора:

$CH^2 + AH^2 = AC^2$

$25y^2 + 64y^2 = \cancel{225}\,64\,x^2$

$89y^2 = 64x^2$, $y^2 = \frac{64}{89}x^2$

6. $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} DE \cdot CE \cdot \sin\angle DEC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2}y \cdot \frac{15}{8}y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{75}{8}y^2 = \frac{75}{16}y^2 = \frac{75}{16} \cdot \frac{64}{89}x^2 =$

$= \frac{75 \cdot 4}{89}x^2$

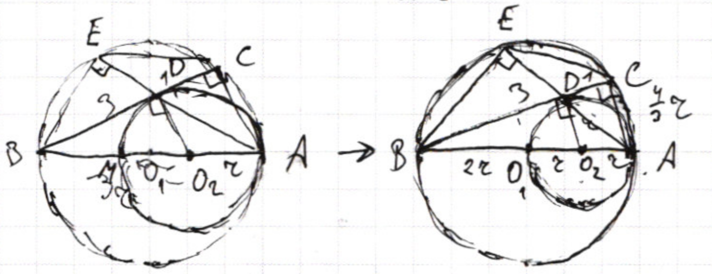
$AC = \sqrt{29} = 8x$, $x^2 = \frac{29}{64}$, $S_{\triangle CED} = \frac{75 \cdot 4}{89} \cdot \frac{29}{64_{16}} = \frac{75 \cdot 29}{89 \cdot 16} =$

$= \frac{2175}{1424}$ ед$^2$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{5}{8}$, $S_{\triangle CED} = \frac{2175}{1424}$ ед$^2$

## №5

R - больш. окр. r - мал. окр.




1. т.к $BC$ - касательная, то $DO_2 \perp BC$ и $DO_2 = r$

$\angle BEA = \angle BCA = 90°$, т.к. углы опираются на диаметр.

($\angle CBA$ - общ; $\angle BDO_2 = \angle BCA$)

$\triangle BCA \sim \triangle BDO_2 \Rightarrow \frac{BD}{BO_2} = \frac{DC}{O_2A}$, $\frac{3}{BO_2} = \frac{1}{O_2A} \Rightarrow 3O_2A = BO_2$,

$O_2A = O_2M = r$, тогда $AB = D = 2R = 4r$. $3r = BO_2 = r + BM$,

$BM = 2r = R \Rightarrow O_1 = M$;

2. $\triangle DBO_2$ ($\angle BDO_2 = 90°$):

по теореме пифагора:

$DO_2^2 + BD^2 = BO_2^2$

$r^2 + 9 = 9r^2$

$r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. т.к $\triangle BCA \sim \triangle BDO_2$, то $\frac{CA}{DO_2} = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$, $CA = \frac{4}{3}r = \sqrt{2}$

$\sin \angle CDA = \frac{CA}{DA} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

по теореме пифагора в $\triangle DCA$ ($\angle DCA = 90°$): $DC^2 + CA^2 = DA^2$

$1 + \frac{16}{9}r^2 = DA^2$

$1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{9}{8} = DA^2$, $DA = \sqrt{3}$

4. т.к $\triangle BED \sim \triangle ACD$ ($\angle EDB = \angle CDA$ (вертик.) и $\angle BED = \angle DCA$)

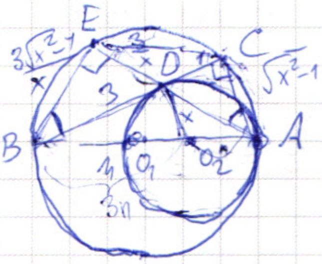
$\Downarrow$

$\frac{ED}{BD} = \frac{DC}{DA}$, $\frac{ED}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $DE = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

5. $S_{BECA} = \frac{1}{2} EA \cdot BC \cdot \sin \angle CDA = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3} =$
$= 4\sqrt{2}$

Ответ: $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{BECA} = 4\sqrt{2}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$D = 4n$

$R = 2n$

$r = n$

$ED \cdot DA = 3$

$\frac{1}{x} = \frac{ED}{3}$, $ED = \frac{3}{x}$

$\cancel{BE}\ CA = \sqrt{x^2-1}$

$\left(\frac{3\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2 + \left(\frac{3}{x} + x\right)^2 = 16 + x^2 - 1$

$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3}{x \cdot BE}$ $\quad x \cdot BE = \frac{3\sqrt{x^2-1}}{x}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2}$

$\frac{9(x^2-1)}{x^2} + \frac{9}{x^2} + 6 + x^2 = x^2 + 15$

$9 - \frac{9}{\cancel{3}x^2} + \frac{9}{x^2} + 6 + x^2 = x^2 + 15$

$1 + x^2 - 1 = x^2 \quad 1$

$\frac{9(x^2-1)}{x^2} + \frac{9}{x^2}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$tg\,\alpha = \sqrt{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{2}$

$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$

$9 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{x^2-1}\right)^2 = 9r^2$

$9 + \frac{9}{16}(x^2-1) = 9r^2$

$1 + \frac{1}{16}(x^2-1) = \cancel{9}r^2$

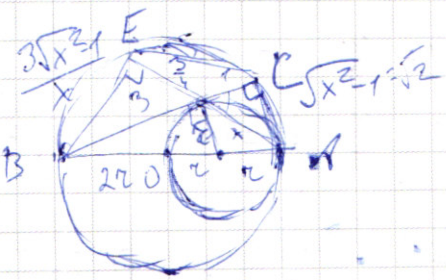
$1 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16} = r^2$

$\frac{15}{16} + \frac{1}{16}x^2 = r^2$

$\cancel{15}x^2 + 15 = 16r^2$

$x^2 + 15 = 16 \cdot \frac{9 \cdot 2}{16}$

$x = \sqrt{3}$




$\frac{9(x^2-1)}{x^2} + \frac{9}{x^2} + 6 + x^2 = \cancel{16}r^2$

$\sqrt{2} \cdot 2$

$9 + r^2 = 9r^2$

$9 = 8r^2$, $r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик

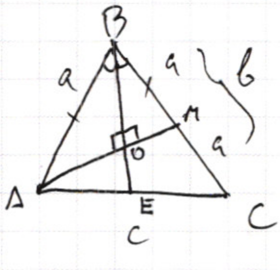
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2




$\Delta ABO = \Delta MOB$ ($BO$-общ; $\angle BOM = \angle BOA$, $\angle ABO = \angle OBC$)

$\Downarrow$

$AB = BM$ пусть $AB = BM = a$, $BC = b$, $AC = c$

$p = a+b+c = 1200$ тогда $b = 2a$

по неравенству треугольника:

$$\begin{cases} a+b > c \\ a+c > b \\ c+b > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > c \\ a+c > 2a \\ c+2a > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > c \\ c > a \\ c > -a \end{cases} \Leftrightarrow a < c < 3a$$

$a+b+c = 1200$

$$\begin{cases} 3a+c = 1200 \\ a < c < 3a \end{cases} \rightarrow 4a < c+3a < 6a \Leftrightarrow 4a < 1200 < 6a \rightarrow 200 < a < 300$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{Z}$, то $a \in [201; 299]$

для каждого значения $a$ найдется ~~в~~ такие целые $b$ и $c$, что $a+b+c = 1200$. количество таких значений равно $299 - 201 + 1 = 99$.

Ответ: 99

№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1| \quad , x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

для $x = -\frac{1}{4}$ :

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 \le -\frac{a}{4} + b \le -\frac{1}{4} + \left|-\frac{1}{2} - 1\right|$

$\frac{3}{8} \le -\frac{a}{4} + b \le \frac{5}{4}$

$\frac{3}{2} \le -a + 4b \le 5$

для $x = \frac{3}{2}$

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 \le \frac{3}{2}a + b \le \frac{3}{2} + \left|2 \cdot \frac{3}{2} - 1\right|$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 \le \frac{3}{2}a + b \le 2$

$2 \le \frac{3}{2}a + b \le 2$

$\frac{3}{2}a + b = 2$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b = 2 \\ \frac{3}{2} \le -a + 4b \\ -a + 4b \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - \frac{3}{2}a \\ \frac{3}{2} \le -a + 8 - 6a \\ -a + 8 - 6a \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - \frac{3}{2}a \\ 7a \le \frac{13}{2} \\ 7a \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = 2 - \frac{3}{2}a \\ \frac{3}{7} \le a \le \frac{13}{4} \end{cases}$

$\frac{-9}{14} \ge \frac{3}{2}a \ge -\frac{39}{8}$

$\frac{11}{14} \ge \frac{3}{2}a + 2 \ge \frac{-23}{8}$

Ответ: $\left\{a;\ 2 - \frac{3}{2}a,\ \text{где } a \in \left[\frac{3}{7}; \frac{13}{14}\right]\right\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c, -k$

$b = ka$

$c = k^2a$

$ax^2 + 2bx \cancel{+b} \, c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$

$x_{1,2} = \dfrac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

$\dfrac{-ka \pm \sqrt{k^2a^2 - k^2a^2}}{a} = -k$

$\begin{cases} b = ka \\ c = k^2a \\ -k = k^3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = ka \\ c = k^2a \\ -1 = k^2a \end{cases} \Leftrightarrow c = -1$

Ответ: $-1$

$\begin{cases} 3a + c = 1200 \\ a < c < 3a \end{cases}$ $\quad 300 < 3a < 900$

$200 < a < 300 < 800 < 3a < 900$

$4a < c + 3a < 6a$

$4a < 1200 < 6a$

$200 < a < 300$

$400 < b < 600$

$300 < c < 800$

$b + c < 1200$

$c \in (a; 3a)$ $\quad 700 < b + c < 1200$

$< a < 300$

299

$299 \cdot 2 = 598$

$299 \cdot 3 = 897$

$1200 - 750 = 450$

$1200 - 603 = 597$

603

$a = 200$ $\quad 200, 400, 600$

$600 + 600$

201, 402, 597

$c < a + b < 900$

$c < 900$

299, 598

№2


$a + b + c = 1200, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

$b = 2a$

$1200 - 897 = 303$

$3a + c = 1200$

$600 < a + b < 900$

$a + b > c$

1 10

$\begin{cases} 3a + c = 1200 \\ a < c < 3a \end{cases}$

$\begin{cases} a + b \geq c \\ a + c > b \\ c + b > a \end{cases}$ $\begin{cases} 3a > c \\ a + c > 2a \\ c + 2a > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > c \\ c > a \\ c > -a \end{cases} \Leftrightarrow a < c < 3a$

$250 \cdot 3 = 750$

$a c > a$

$\cancel{3a > 1200}$

$\cancel{a > 300}$

$\cancel{6a < 1200}$

$\cancel{a < 200}$

$c > a$

$4a < 1200$

$a < 300$

$c < 3a$

$6a > 1200$

$a > 200$

$\begin{cases} 200 < a < 300 \\ 400 < b < 600 \\ 300 < c < 800 \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ xy-2x-y+2\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y\geq 2x \\ x(y-2)-(y-2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ (x-1)(y-2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ x\geq 1 \\ y\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x\geq 2 \\ 2x\geq 2 \\ y\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3=0$

$2(x^2-2x+1)+(y-2)^2-3=0$

$y\geq 2\geq 2x\geq 2$

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

~~$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$~~

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$$\begin{cases} y\geq 2x \\ x\geq 1 \\ y\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cancel{y=2x} \quad \cancel{2x\geq 2} \quad \cancel{y\geq 2}$$

~~$y\geq 2x\geq 2$~~

$$\begin{cases} y\geq 2x \\ y\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0\geq 2x-2$$

$2\geq 2x\geq 2$

$x=1$

$2+y^2-4-4y+3=0$

$y^2-4y+1=0$

$D=16-4\cdot 1=12$

$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$$\begin{cases} y=2\pm\sqrt{3} \\ y\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow y=2+\sqrt{3}$$

Ответ: 1; $2+\sqrt{3}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

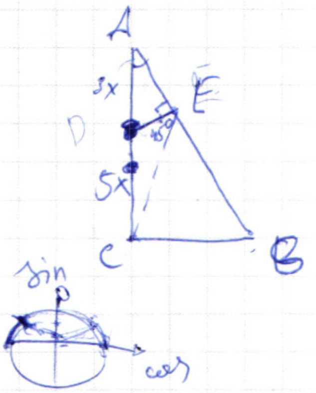
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

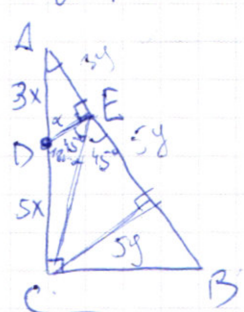
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4




$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$$\boxed{8x=\sqrt{29} \qquad x=\frac{\sqrt{29}}{8}}$$

$\operatorname{tg}\angle BAC - ?$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}\angle ADE = \frac{DE}{AE}$

$\frac{5x}{\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{CE}{\sin(180^\circ-\alpha)}$

$5\sqrt2 x = \frac{CE}{\sin\alpha}$

$\frac{3x}{1} = \frac{AE}{\sin\alpha}$

$\frac{5\sqrt2}{3} = \frac{CE}{AE}$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{8x}$

$AB\cdot AE = 24x^2$

$AB\cdot y = 8x^2$

$\frac{AE^2}{DE^2} = AD^2$

$9y^2 + DE^2 = 9x^2$

$9\cdot\frac{64x^2}{89} + DE^2 = 9x^2$

$DE^2 = 9x^2 - 9\cdot\frac{64x^2}{89}$

$DE^2 = 9x^2\left(1-\frac{64}{89}\right)$

$DE^2 = 9x^2\cdot\frac{25}{89}$

$DE = 3x\cdot\frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{15x}{\sqrt{89}}$

$(3y)^2 + (5y)^2 = (8x)^2$

$64y^2 + 25y^2 = 64x^2$

$89y^2 = 64x^2$

$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{89}}{8}$ $\qquad y = \frac{8x}{\sqrt{89}}$

$89 - 64 = 25$

$AE = 3y = \frac{24x}{\sqrt{89}}$

$DE = \frac{15x}{\sqrt{89}}$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{15x}{\sqrt{89}}\cdot\frac{\sqrt{89}}{24x} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$75 \times 29$: $675$, $150$, $2175$

$16\cdot4 = 64$

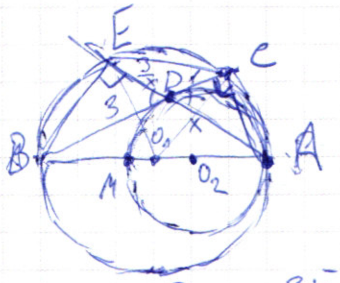
$15\times5 = 75$

$89\times16$: $534$, $89$, $1424$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5




$BD^2 = BM \cdot AB$

$ED \cdot DA = 3$

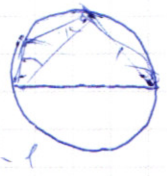
$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{ED}{3} \\ ED \cdot 1\cancel{x} = 3 \end{cases}$

$ED = \frac{3}{x}$ $\quad DE = \frac{4}{x}$

$\frac{3}{x} = \frac{4}{x}$

$3x = 4x$

$\frac{BE}{CA} = \frac{3}{x}$ $\quad BE = \frac{3AC}{x}$



$BE^2 + EA^2 = BC^2 + CA^2$

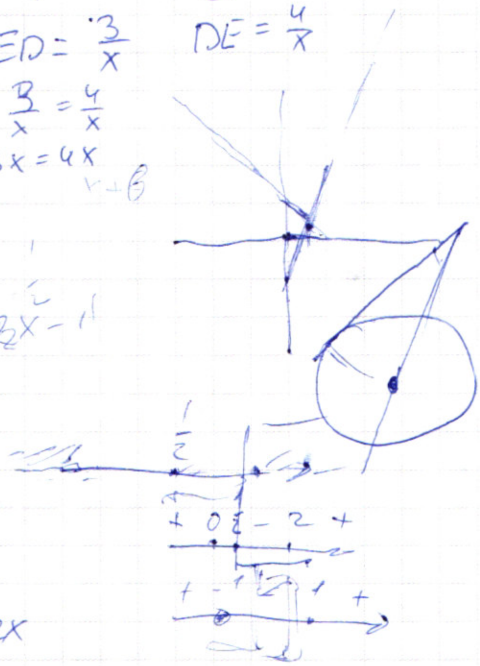
$BE^2 + (\frac{3}{x} + x)^2 = 16 + CA^2$

$\frac{9AC^2}{x^2}$

$3x - 1$

$-x + 1$

$f(x) = x + |2x - 1|$



№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$2x^2 - x - 1 \le x + |2x - 1|$

$2x^2 - 2x - 1 \le |2x - 1|$ $\quad x^2 - 2x$

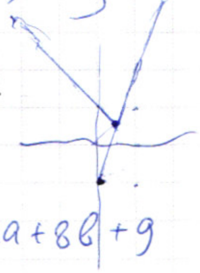
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 1 \ge 2x^2 - 2x - 1 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 \ge -2x^2 + 2x + 1 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - 4x \le 0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -2x^2 + 2 \le 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad x^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\frac{a}{2} + b \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x-2) \le 0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x+1) \le 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [0; 2] \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-1; 1] \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [\frac{1}{2}; 2] \\ x \in [-1; \frac{1}{2}] \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$x \in [-1; 2]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b$ $\quad -\frac{9}{14} + \frac{88}{14} \quad -\frac{39}{8} + -\frac{16}{8}$



$2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0$

$D = (a^2 + 2a + 1 + 4 \cdot 2 \cdot (b+1) = a^2 + 2a + 1 + 8b + 8 = a^2 + 2a + 8b + 9$

~~$2x^2 - (a+1)x - b$~~

$x_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 8b + 9}}{4}$ $\quad 2 | a$

$\begin{array}{r} 39 \\ 76 \\ \hline 23 \end{array}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)