МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (2) \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \overset{\sin 2\alpha}{\cancel{2\alpha}} = -\frac{2}{17}$

$$2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{2}{17}$$

$$2\cos 2\beta \underbrace{(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha)}_{(2)} = -\frac{2}{17}$$

$$2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \cdot \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\underbrace{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}},}$$

$$\underline{2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \quad (*)$$

подставим (*) в совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

Также $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 смежных угла $\rightarrow$ $\sin x = \sin(\pi - x)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$$

два смежных

Найдем $\sin 2\alpha$ $\rightarrow$ $\cancel{\sin 2\alpha =}$ 1

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin 2\alpha = \sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \ (1) \end{array}\right.$$

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{17}}}_{\sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}})} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{17}}}_{\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})} - \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \cdot \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$

$= \frac{1}{17} - \left(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{17}}\right) \cdot \left(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{17}}\right)$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{1}{17} - \left(-\frac{16}{17}\right) = \frac{17}{17} = 1$ $\qquad$ $\frac{1}{17} - \left(+\frac{16}{17}\right) = -\frac{15}{17}$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \left\{1; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 1 \\ \sin 2\alpha = -\frac{15}{17} \\ \sin 2\alpha = \cancel{-\frac{15}{17}}\ 1 \end{array}\right.$$

$\rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = 1 \rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha = -1}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{15}{17} \rightarrow -34\operatorname{tg}\alpha = 15 + 15\operatorname{tg}^2\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha + 34\operatorname{tg}\alpha + 15 = 0$ ($D = 16^2$) $\rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x\in(0;26)$

из-за ОДЗ модуль раскрывается однозначно

$$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

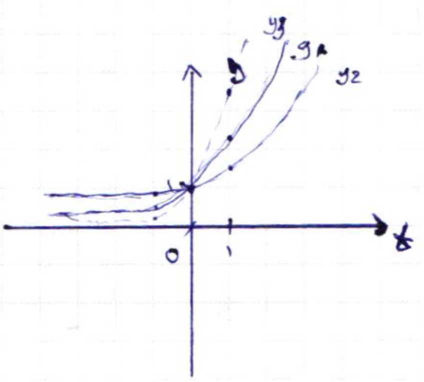
по св-ву логарифмов + учитывается ОДЗ и $(26-x^2)>0$

$$12^{\log_5(26-x^2)} + (26x-x^2)^{\overset{=1}{\log_5 5}} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$12^{\log_5(26-x^2)} + 5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Заменим $\log_5(26x-x^2)=t$

$$12^t+5^t \geq 13^t$$



$y_1=12^t$

$y_2=5^t$

$y_3=13^t$

Построим графику $y(t)$

Все 3 графика пересекаются в точке $(0;1)$

при $t=1$ $y_3>y_1>y_2$

$t=-1$ $y_2>y_1>y_3$

$y(t)\uparrow$ при $t\in R$

① при $t \geq 0$ $12^t+5^t\geq 13^t$

Заметим, что при $t=2$ выполняется равенство, а т.к. функции $\uparrow$ $\Rightarrow$

при $t>2$ $12^t+5^t<13^t$ $\Rightarrow$ $t\in[0;2]$

② $t<0$ $12^t+5^t\geq 13^t$

$5^t>13^t$

$12^t>13^t$ $\Rightarrow$ $5^t+12^t>13^t$ $\Rightarrow$ $t\in(-\infty;0)$

(т.к. $y(t)\uparrow$)

$\Downarrow$ $t\in(-\infty;2]$

③ $t=0$ $0+0\geq 0$ $\Rightarrow$ $t=0$

$\log_5(26x-x^2)\leq 2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

$\log_5(26x-x^2) \le 2$

$26x-x^2 \le 25$

$x^2-26x+25 \ge 0$

$(x-25)(x-1) \ge 0$

+ − +

1 25 x

$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in (0;1] \cup [25; 26)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое число

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ - при каких x, y

$f(a) = f(ab) - f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) - f(y) = f(x) - f(y) < 0 \rightarrow f(x) < f(y)$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0 + 0 = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(4) + f(3) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(7) + f(2) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(8) + f(2) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(3) + f(6) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = f(10) + f(2) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(6) + f(4) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(26) = f(13) + f(2) = 3$

$f(27) = f(9) + f(3) = 0$

$f(28) = f(7) + f(4) = 1$

Значения 0 имеет 9 значений от 4 до 28

1 имеет 8 значений от 4 до 28

2 имеет 3 значения от 4 до 28

3 имеет 2 значения от 4 до 28

4 имеет 2 значения от 4 до 28

5 имеет 1 значения от 4 до 28

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) < f(y) \to$ варианты

$f(x)$	$f(y)$	
0	1	$\to 9\times 8$ $= \cancel{72}$
0	2	9×3
0	3	9×2
0	4	9×2
0	5	9×1
1	2	8×3
1	3	8×2
1	4	8×2
1	5	8×1
2	3	3×2
2	4	3×2
2	5	3×1
3	4	2×2
3	5	2×1
4	5	2×1

$\downarrow$

суммируем

$$\Sigma = 9(\overset{16}{8+3+2+2+1}) + 8(\overset{8}{3+2+2+1}) + 3(\overset{5}{2+2+1}) +$$

$$+ 2(\overset{4}{2+1+1}) = \overset{208}{144+64} + \overset{23}{15+8} = 231 \text{ вар}$$

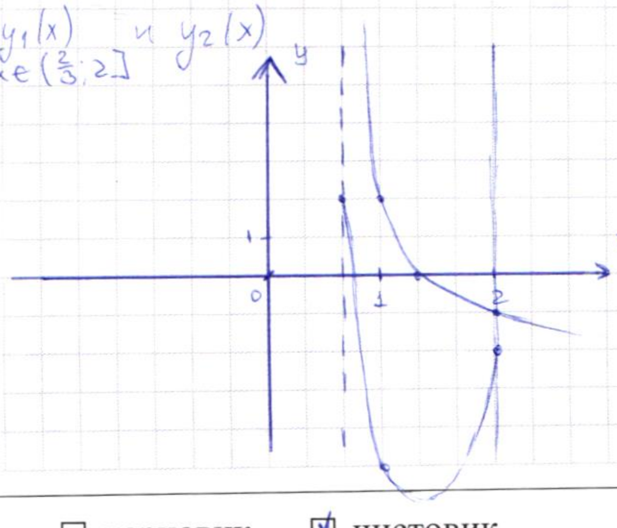
Ответ: 231 вариант.

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad \text{при } x\in\left(\frac{2}{3};2\right]$$

$$y^1 = \frac{8-6x}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2} \qquad y_2 = 18x^2-51x+28$$

Построим графики $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на $x\in(\frac{2}{3};2]$



$y_1 = \frac{8-6x}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$

при $x\to\frac{2}{3}-$; $y_1 \to +\infty$

$y_1(1) = 2$

$y_1(2) = -1$

$y_1(\frac{4}{3}) = 0$

$y_2 = 18x^2-51x+28$

$\downarrow$ парабола $x_0 = 1\frac{5}{12}$

$y_2(\frac{2}{3}) = 2$ $\quad y(2) = 2$

$y_2(1) = -5$

Чтобы $y=ax+b$ → прямая линия, либо прямая $\parallel ox$

были в промежутке между функциями $y \le y^* - y^*$ - касат. к. $y_1 = \frac{8-6x}{3x-2}$

$y^* = -3x+4$

y^* и y_1 имеют 1 точку

$(4-3x)(3x-2) = 8-6x$

$-9x^2+18x-8 = 8-6x$

$-9x^2+24x-16=0$

$9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=0$

$x = \frac{4}{3}$

также $y \ge y_1^*$, где $y_1^* > y_2$ при $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\left(\frac{2}{3}; 2\right) \in y_1^*$

$(2; -2) \in y_1^* \rightarrow y_1^* = -3x+4$

$-3x+4 \le y \le -3x+4$

↓

$y = -3x+4$ - един. решение

$\begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$ Ответ: $(-3;4)$

№ 2

$\begin{cases} \overset{>0}{y-6x} = \sqrt{\overset{>0}{xy-6x-y+6}} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 \end{cases}$

ОДЗ

$(x-1)(y-6) > 0$

(1) $(y-6x)^2 = xy-6x-y+6$

~~$y-6x \ge 0$~~

$\begin{cases} y > 6x \\ y^2-(13x-1)y+36x^2+6x-6=0 \end{cases}$

$D = (13x-1)^2 - 24(6x^2+x-1) = (5x-5)^2$

$y = \frac{1-13x \pm (5x-5)}{2}$ $\left[\begin{array}{ll} y=-4x-2 & (1.1) \\ y=-9x+3 & (1.2) \end{array}\right.$

I

$\begin{cases} y=-4x-2 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$9x^2+(4x+2)^2-18x-12(-4x-2)=45$

$9x^2+16x^2+16x+4-18x+48x+24=45$

$25x^2+46x-17=0$ $D=416$

$x = \frac{-46 \pm \sqrt{416}}{50}$

$\begin{cases} x = \frac{-46+\sqrt{416}}{50} \\ y = -4\left(\frac{-46+\sqrt{416}}{50}\right) - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-46+\sqrt{416}}{50} \\ y = \frac{46 \times 4 - 4\sqrt{416}}{50} - 2 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = \dfrac{-46+\overset{>20}{\sqrt{416}}}{50} \approx 0,53 \\ y = \dfrac{46\times4-4\sqrt{416}-2\times50}{50} = \dfrac{\overset{\approx 80}{84-4\sqrt{416}}}{50} \approx 0,08 \end{cases} \in ОДЗ$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-46-\overset{>20}{\sqrt{416}}}{50} \approx 1,23 \\ y = \dfrac{46\times4+4\sqrt{416}+100}{50} = \dfrac{\overset{>80}{84+4\sqrt{416}}}{50} \approx 3,2 \end{cases} \notin ОДЗ$$

II

$$\begin{cases} y = -9x+3 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -9x+3 \\ 9x^2+(9x-3)^2-18x-12(3-9x)=45 \end{cases}$$

$$9x^2+81x^2-54x+9-18x-36+108x=45$$

$$90x^2+36x-72=0$$

$$5x^2+2x-4=0 \qquad x = \frac{-2\pm2\sqrt{21}}{5}$$

$$D = 4+80=84$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2-\overset{\approx 9}{\sqrt{84}}}{5} > -2 \\ y = \dfrac{18+9\sqrt{84}+15}{5} > 6 \end{cases} \notin ОДЗ$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2+\overset{\approx 9}{\sqrt{84}}}{5} > +1 \\ x = \dfrac{18-9\sqrt{84}+15}{2} < -6 \end{cases} \notin ОДЗ$$

$\rightarrow$ Ответ: $\left(\dfrac{-46+\sqrt{416}}{50}; \dfrac{84-4\sqrt{416}}{50}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=0$

$y^2+(13x-1)y+36x^2+6x-6=0$

$36 \times 4 = 144$

$$\begin{cases} y=\sqrt{(x-1)(y-6)}+6x \\ \\ y-6x>0 \end{cases}$$

$D=(13x-1)^2-6\times4(6x^2+x-1)=$

$=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$(3x-3+y-6)^2$

$y>6x$

$=-23x^2-46x+25$

$-23(x^2+2x+1)$

$-23(x+1)^2$

$9(x+1)^2+6(x-1)(y-6)+(y-6)^2=$

$=90+6(y-6x)^2$

12

$(3x+y-9)^2=90+6y^2-72xy+216x^2$

$=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=25(x^2-2x+1)=$

$=25(x-1)^2=(5(x-1))^2$

$$\left[\begin{array}{l} y=-4x-2 \quad (1) \\ y=-9x+3 \end{array}\right.$$

$\dfrac{-(13x-1)\pm\sqrt{D}}{2}$

$$y=\left[\begin{array}{l} \dfrac{-13x+1+5x-5}{2} \\ \dfrac{-13x+1-5x+5}{2} \end{array}\right.$$

$9(x+1)^2+(y-6)^2=90$

$45-24=21$

(1) $9x^2+(4x+2)^2-18x-12(-4x-2)=45$

$9x^2+16x^2+16x+4-18x+48x+24-45=0$

$25x^2+46x-17=0$

$$y=\left[\begin{array}{l} \dfrac{-8x-4}{2} \\ \dfrac{-18x+6}{2} \end{array}\right. \qquad y=\left[\begin{array}{l} -4x-2 \\ -9x+3 \end{array}\right.$$

$46 \times 46 = 2116$

$D=23^2\times4^2-17\times25\times4=\sqrt{416}$

1700

17×25

$45-28=17$

$y>6x$

$y=-4x-2$

$108-72=36$

-81

$4\cdot104$

$2116-1700=416$

16×26

(2) $9x^2+(9x-3)^2-18x-12(3-9x)-45=0$

$9x^2+81x^2-54x+9-18x-36+108x-45=0$

$90x^2+36x-72=0$

$10x^2+4x-8=0$

$5x^2+2x-4=0$

$D=4+4\times20=84$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{84}}{10}$

$4(21)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

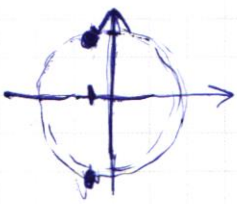
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№1

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$



$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ $\cos(\arcsin$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \sqrt{1-\frac{1}{17}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{17}}$

$-\frac{1}{17} - \frac{16}{17} = -1 \Rightarrow$ $\frac{2x}{1+x^2} = -1 \Rightarrow 1+x^2 = -2x$

$1+2x+x^2=0$

$x=-1$, $tg\,\alpha = -1$

$-\frac{1}{17} + \frac{16}{17} = \frac{15}{17}$

$15+15x^2 = 34x$

$15x^2 - 34x - 15 = 0$

34^2

$\times\begin{array}{r}34\\34\end{array}$

136

102

1156

$\sqrt{256} = 16$

$1156 - 15\times15\times4$

$\times\begin{array}{r}225\\4\end{array}$

900

$x = \frac{34\pm16}{30}$

$x = \frac{5}{3}$

$x = \frac{3}{5}$

5) $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ где p-простое

$x \in [4; 28]$

$y \in [4; 28]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \overbrace{f(x)}^{\to 0, \text{ если } x\text{-простое}} + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(4) + f$

$\overset{\to [1]}{f(5)} = 1 + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x = 4$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{4}{28}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right)$

$f\left(\frac{16}{4}\right) = f(16) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(1) = 0$

$+ f\left(\frac{1}{7}\right)$

$f(23) = 5$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(4)$ $f(b) = f(ab) - f(x)$

$f(a) = f(ab) - f(b)$

x:	5	11	13	17	19
y:	11	13	17	23	23
	13	17	19		
	17	19	23		
	19	23			
	23				

$x < 4y$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$f(5$

$f(5x^0$

$f(2x2) = f(2) + f(2)$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$\left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$\left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$\left[\frac{x}{4}\right] < \left[\frac{y}{4}\right]$ $\in [1; 7]$

$\left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$\in [1; 7]$ $[0] < \left[\frac{4}{4}\right]$ $y > 8$

$\left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$y - 4 > x$

$y - x > 4$

28

28 25

7 6

26

$3x - 2 = 2$

$x = \frac{4}{3}$

6) $\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$-2 + \frac{4}{3 \cdot 2 - 2} = -2 + 1$

$y = 18x^2 - 51x + 28$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y = -3x + 4$

$a = -3$

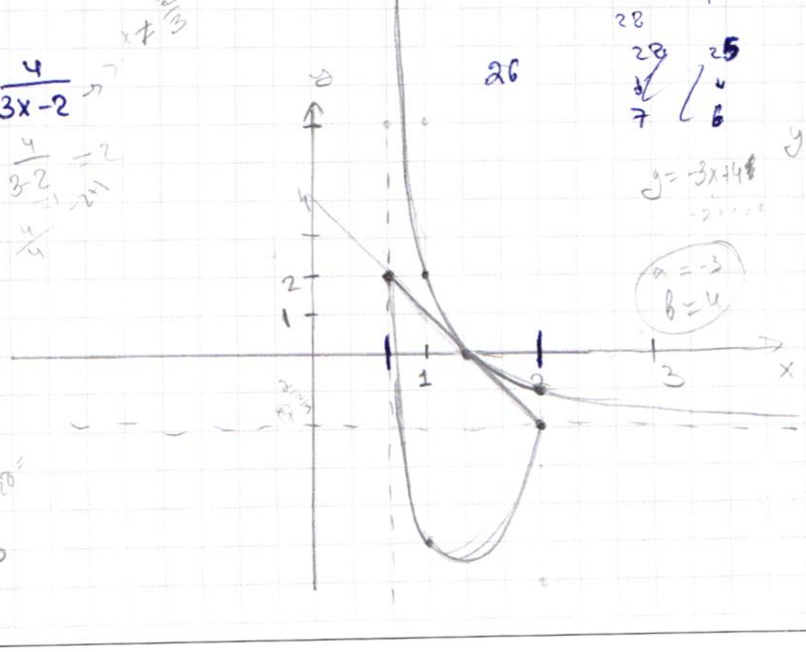
$b = 4$

$y_0 = \frac{18 \cdot 17^2}{12 \cdot 12} - \frac{17 \cdot 3}{a} + 28$

$18x^2 - 51x + 28 = 72 + 28 - 102 = -2$

$y_0 = \frac{18 \cdot 17^2}{12} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28$

$\frac{23 \cdot 24 - 11 \cdot 17 \cdot 3}{2 \cdot 12}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13^t \le 12^t + 5^t$

$t = \log_5(26-x^2)$ $\in (0;169)$

$t \in (-\infty; 3{,}5)$ $\approx \log_5 169$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$a^{\log_5 13} - a^{\log_5 12} - \log^{55} < 0$

$a^{\log_5 13} \le a^{\log_5 12} + a^{\log_5 5}$

$\log_5(6+7) = \log_5 6 + \log_5 7$

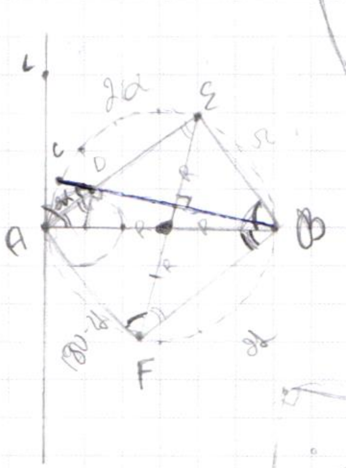
$12^x + 5^x$

$12^x + 5^x$

$12^x + 5^{\log}$

$t^{\log_5 12} + b^{\log_5 13}$

4)



r_1 -?

R_2 -?

$S_{\triangle EF}$ -?

$\angle AFE$ -? $\sim 45^\circ$

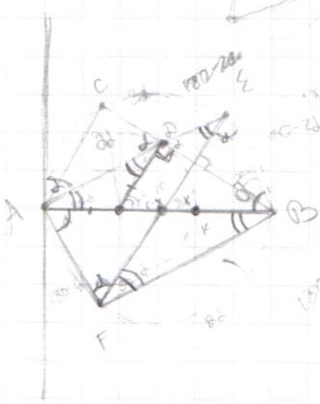
$CD = 12$

$BD = 13$

$S_{AFE} = AE \cdot AF$

$\angle AFE = \angle ABE$

$\angle AFE = \alpha$



$\angle AEB = 90^\circ$

$\angle AFB = 90^\circ$

12×13

$BD^2 = BK \cdot AB$ 13^2 $2R$

$(R-x)$

$(R-x) = \frac{169}{2R}$

$BD^2 = 4R^2 + AC^2$

$(r-x+R)^2 + r^2 = BD$

$R + x + r$

$r^2 + x^2 + R^2$

$\left(r + \frac{169}{2R}\right)^2 + r^2 = 13^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $(x-1)(y-6)\geq 0$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36-45=45 \end{cases}$$

$\Rightarrow x(y-6)-(y-6)\Rightarrow\sqrt{(x-1)(y-6)}=y-6x$

$(x-1)(y-6)=y^2-12xy+36x^2$

$2\cdot 3x\cdot 3$ $\quad 2\cdot 6$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9x^2-18x+y^2-12y-45=0$

$(3x-3)^2$

$\cancel{9x(x-2)+y(y-12)}$

$D=\overset{324}{81\times 4}-36(y^2-12y-45)=$

$18\times 2\times 9$

$9(x-1)^2$

$\cancel{9(x-1)^2+(y-6)^2=90}$

$=324-36y^2+36\times 12y+36\times 45=$

$=-36y^2+36\times 12y+36(45+9)$ $\quad 54$

$y^2-12y+9x^2-18x-45=0$

$D=12^2-4(9x^2-18x-45)=$ $\quad 36\times 4$ $\quad 36\times 5$

$36(-y^2+12y+54)$

$-36(y^2-12y-54)$

54: 6 9; 18 3; 2 36

$=36\times 9-4\times 9x^2+8\times 9x$

$36(9-x^2+2x)$

$t>2\Rightarrow$ невозможно

$13^2=12^2+5^2$

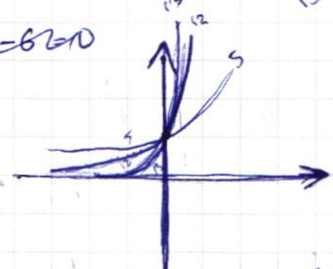
13^3

$y^2-12xy+36x^2=xy-y-6x+6$ $\quad (y-6x)$ $\quad \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$\cancel{y^2-13xy+36x^2+y+6x-6=0}$

$13^t\leq 12^t\cdot 5^t$



$-x^2+26x$ $\quad y_0=169$ $\quad \Rightarrow y\in[0;169]$

$26x-x^2$ $\quad x_0=\frac{-26}{-2}=13$

ОДЗ

$26x-x^2>0$

$(26-x)x>0$

$x\in(0;26)$

3) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

однозначно

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$-12^{\log_5(26x-x^2)}+13^{\log_5(26-x^2)}\leq -x^2+26x$

$(26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)^{\log_5 12}-(26x-x^2)^{\log_5 5}\leq 0$

$12^t-13^t+5^t\geq 0$

$12^t+5^t\geq 13^t$

12^3 $\quad 144\times 12+125\geq 13\times 13\times 13$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha \end{cases}$ $tg\,\alpha - ?$

$tg\,\alpha =$

$\sin 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$4\alpha+6\beta$

$2\sin\frac{2\alpha+2\beta+2\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{2\alpha+2\beta-2\alpha-4\beta}{2} + \sin 2\alpha$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cdot\cos\beta + \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta \cancel{+\sin 2\alpha} = -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha$

$2\cos^2 2\beta - 1$ $2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \cancel{-\sin 2\alpha}$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta) = -\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta = -\frac{2}{17}\cdot(-\sqrt{17})$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \pm\arccos\frac{\sqrt{17}}{17} + 2\pi k$

(1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$
$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha =$

$\sin(\arcsin x - \arccos y)$

$\sin x\cos y - \cos x\cdot\sin y$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n. \\ 2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n \end{array}\right.$

$\pi - arc(+)$ $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi n \\ 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi n \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi n \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \quad \pi - \pi + ar. \\ \\ ar(-) = \pi - arc(+) \end{array}\right.$