МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cos^2 2\beta \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta(\cos 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

~~$\sin 2\alpha = -1-4\cos 2\alpha$~~

~~$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-1-4\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$~~

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 1 = 0$

$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

~~$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$~~

~~1) $\sin 2\alpha\left(\frac{1}{17}-\frac{16}{17}\right) + \cos 2\alpha\cdot 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$~~

~~$\frac{2}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17}\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$~~

~~$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$~~

Т.к. $tg\alpha$ определен, то $\cos\alpha \neq 0$, поэтому поделим уравнение на $\cos^2\alpha$:

$5 + 2tg\alpha - 3tg^2\alpha = 0$

Пусть $tg\alpha = t$, тогда $-3t^2 + 2t + 5 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 64$

$t_1 = \frac{-2+8}{-6} = -1$; $tg\alpha = -1$

$t_2 = \frac{-2-8}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$; $tg\alpha = \frac{5}{3}$

2) $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot \sqrt{17}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + 1 = 0$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

Аналогично, т.к. $tg\alpha$ определен, то поделим на $\cos^2\alpha$:

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

Пусть $tg\alpha = t$, тогда: $5t^2 + 2t - 3 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64$

$t_1 = \frac{-2+8}{10} = 0{,}6$; $tg\alpha = 0{,}6$

$t_2 = \frac{-2-8}{10} = -1$; $tg\alpha = -1$

Т.к. мы нашли ровно три значения $tg\alpha$, то условие (что их не менее трех) выполнено. Равенства при этих значениях выполняются.

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 0{,}6$; $tg\alpha = \frac{5}{3}$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}; \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases} \begin{matrix} \to y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ \to (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{matrix}$$

$y-6x= (y-6)-6x+6=(y-6)-6(x-1)$

Пусть $y-6=a$, $x-1=b$. Тогда перейдем к системе

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}; \\ 9b^2+a^2=90. \end{cases} \to \begin{cases} (a-6b)^2=ab & (1) \\ \cancel{ab\geq 0} \quad a-6b\geq 0 \to a\geq 6b & (2) \end{cases}$$

$(1): (a-6b)^2=ab$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=b^2(169-4\cdot 36)=(169-120-24)b^2=25b^2$

$a_1=\frac{13b+5b}{2}=\frac{18b}{2}=9b;$

$a_2=\frac{13b-5b}{2}=\frac{8b}{2}=4b;$

~~Заметим, что при a_1 и a_2 условие $ab\geq 0$ выполнено при всех значениях переменной b.~~

1) $a_1=9b$: $9b^2+(9b)^2=90$

$9b^2+81b^2=90$

$90b^2=90$

$b^2=1$

$b_1=1 \quad b_2=-1$

2) $a=4b$: $9b^2+(4b)^2=90$

$9b^2+16b^2=90$

$25b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}$

$b_3=\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad b_4=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a_{b_1}=9$

при этом $a_{b_1}>6b_1$

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases}$$

$x=2$
$y=15$

$a_{b_2}=-9$

$$\begin{cases} x-1=-1 \\ y-6=-9 \end{cases}$$

$x=0$
$y=-3$

$a_{b_2}<6b_2$

поэтому условие (2) не выполнено

$a_{b_3}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$$\begin{cases} x-1=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$x=1+\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$y=6\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$

$a_{b_3}<6b_3$

поэтому условие (2) не выполнено

$a_{b_4}=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$$\begin{cases} x-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$y=6\left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$

при этом $a_{b_4}>6b_4$

Ответ: $(2;15)$ и $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};\ 6\left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

~~Урав~~ Неравенство выполнено когда: $26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$x \in (0;26)$ (1)

Тогда $x^2-26x=-(26x-x^2)<0$ и $|x^2-26x|=26x-x^2$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$$

Пусть $26x-x^2=t$, $t>0$, тогда $t^{\log_5 12}+t^1-13^{\log_5 t} \geq 0$

Если $\log_5 t=y$, то $13^{\log_5 t}=13^y$ и $5^y=t$,

и $13^{\log_5 t}=t^{\log_5 13}$

Получаем, $t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0$

Согласно методу рационализации знак неравенства совпадет со знаком неравенства $(t-1)(\log_5 12+1-\log_5 13) \geq 0$

$(t-1)(\log_5 12+\log_5 5-\log_5 13) \geq 0$

$(t-1)\log_5 \frac{12\cdot 5}{13} \geq 0$

$(t-1)\log_5 \frac{12}{13}\cdot 5 \geq 0$

Т.к $\frac{12}{13}\cdot 5>1$, то

$\log_5 \frac{12}{13}\cdot 5>0$

$t-1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$

$26x - x^2 \geqslant 1$

$x^2 - 26x + 1 \leqslant 0$

$x^2 - 26x + 1 = 0$

$D = 26^2 - 4 = 4(13^2 - 1) = 4 \cdot 168$

$x_{1,2} = \dfrac{26 \pm 2\sqrt{168}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{42}$

$(x - 13 - 2\sqrt{42})(x - 13 + \sqrt{42} \cdot 2) \leqslant 0$

$x \in [13 - 2\sqrt{42}; 13 + 2\sqrt{42}]$

Учитывая условие (1): ~~...~~

- $\sqrt{42} < 6{,}5$

  $42 < 39 + 3{,}25 = 42{,}25$

  Откуда $2\sqrt{42} < 13$

  и $13 - 2\sqrt{42} > 0$

- $13 + 2\sqrt{42} < 26$

А, значит, условие (1) выполнено

Ответ: $x \in [13 - \sqrt{42} \cdot 2; 13 + 2\sqrt{42}]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

1) Числа от 4 до 28 могут раскладываться на следующие простые множители: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

2) Рассмотрим выражение $[p/4]$. Для 2 и $3: [p/4] = 0$
5 и $7: [p/4] = 1$
$11: [p/4] = 2$
$13: [p/4] = 3.$
19 и $17: [p/4] = 4$
$23: [p/4] = 5$

3) По условию $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$ (из условия $f(ab) = f(a) + f(b)$)

Откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Пусть $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - простые множители

а $y = p_1' \cdot p_2' \cdot \ldots p_k'$, где $p_1', p_2', \ldots, p_k'$ - простые множители

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) - f(p_1') - f(p_2') - \ldots - f(p_k') =$

$= [p_1/4] + [p_2/4] + \ldots + [p_n/4] - [p_1'/4] - [p_2'/4] - \ldots - [p_k'/4]$

Т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ по условию, то

$[p_1/4] + [p_2/4] + \ldots + [p_n/4] < [p_1'/4] + [p_2'/4] + \ldots + [p_k'/4]$

4) Заметим, что если x или y содержит один из следующих простых множителей: 5, 7, 11, 13, то более таких множителей не имеет (кроме числа 25)

Если число содержит простые множители 17, 23, 19, то более множителей оно не имеет вообще.

5) Таким образом, $f(n)=0$ у 9 чисел (4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27)

$f(n)=1$ у 8 чисел (5; 10; 15; 20; 7; 14; 21; 28);

$f(n)=2$ у 3 чисел (25; 11; 22);

$f(n)=3$ у 2 чисел (13; 26);

$f(n)=4$ у числа 19 и числа 17;

$f(n)=5$ у числа 23.

(где $n=x$ или $n=y$)

6) Если $f(x)=0$, то $f(y)>0$.

Для числа x - 9 вариантов, для y - 16 вариантов.

Кол-во пар $N_1 = 16\cdot 9$

Если $f(x)=1$, то $f(y)>1$. Для x - 8 вариантов, для y - 8 вариантов

$N_2 = 8\cdot 8$

Если $f(x)=2$, то $f(y)>2$. Для x - 3 варианта для y - 5 вариантов

$N_3 = 3\cdot 5$

Если $f(x)=3$, то $f(y)>3$. Для x - 2 варианта для y - 3 варианта

$N_4 = 2\cdot 3$

Если $f(x)=4$, то $f(y)=5$. Для x - 2 варианта для y - 1 вариант.

$N_5 = 2\cdot 1$

7) $N = N_1+N_2+N_3+N_4+N_5 = 16\cdot 9+8\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1 = 231$ - общее кол-во пар x и y.

$\boxed{\text{Ответ: } 231}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$ $\qquad x\in\left(\frac{2}{3};2\right]$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\frac{6x-4-4}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$; $y_1 = -2+\frac{4}{3x-2}$ – гипербола

$y_2 = 18x^2-51x+28$ – парабола ветви вверх

$\cancel{x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{51}{18\cdot 2} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}}$ $\quad x_B = \frac{+51}{18\cdot 2} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

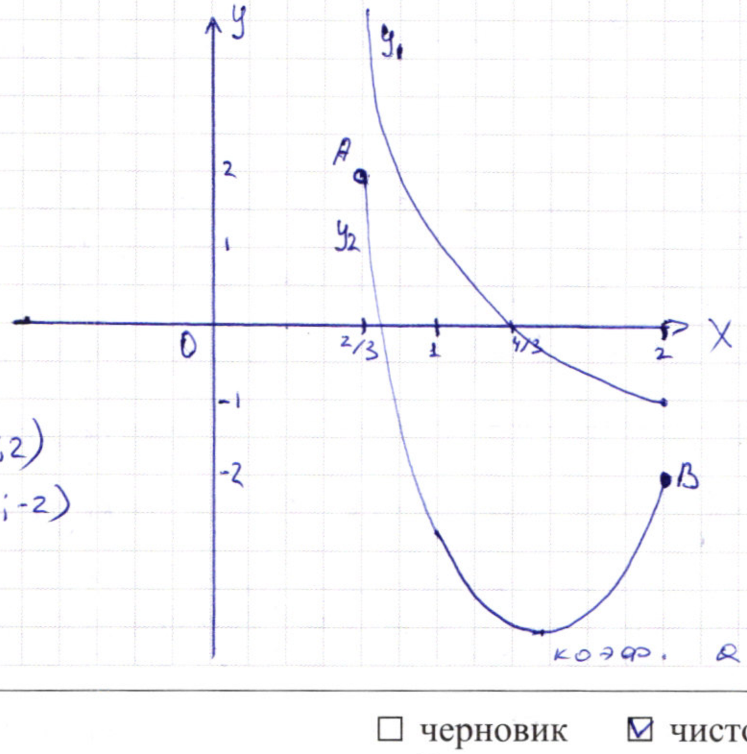
1. В точке $x=\frac{2}{3}$: y_1 – не определена, $y_2 = 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{51\cdot 2}{3}+28 = 8-34+28 = 2$

В точке $x=2$: $y_1 = -2+\frac{4}{3\cdot 2-2} = -2+1 = -1$

$y_2 = 18\cdot(2)^2-51\cdot 2+28 = -2$

2. Построим схематически графики функций y_1 и y_2 на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

Заметим, что на этом промежутке y_1 обращается в ноль в точке $x=\frac{4}{3}$.



$A\left(\frac{2}{3};2\right)$

$B(2;-2)$

3. Рассмотрим неравенство

$ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$

Назовем „крайней" прямую, проходящую через точки A и B. Остальные прямые, удовлетворяющие неравенству, будут получены путем увеличения коэф. a или b „крайней" прямой.

$$\begin{cases} y_A = a x_A + b \\ y_B = a x_B + b \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = a \cdot \frac{2}{3} + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$2-(-2) = \frac{2}{3}a - 2a + b - b$$

$$4 = -\frac{4}{3}a$$

$$\underline{a = -3}$$

$$-2 = 2\cdot(-3) + b$$

$$\underline{b = 4}$$

4. Проверим выполняется ли при этом условие на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$ $ax+b \le \frac{8-6x}{3x-2}$. Для этого прямая $ax+b$

на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$ должна либо касаться гиперболы y_1, либо не иметь с ней общих точек.

$$ax+b = \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$-3x+4 = \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$-9x^2+24x-16=0$$

$$-(3x-4)^2=0$$

$x = \frac{4}{3}$. Значит, прямая $ax+b$ касается y_1.

5. Заметим, что при увеличении a или b прямая пересечет прямую y_1 на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$ и условие $ax+b < \frac{8-6x}{3x-2}$ не будет выполнено на ~~какой-то его части~~ всем промежутке (т.к. будет промежуток, где $ax+b$ выше чем y_1)

А значит полученная прямая – единственная, (при уменьшении a или b не выполнится $ax+b \ge 18x^2-51x+28$). $\boxed{\text{Ответ: } (-3;4)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

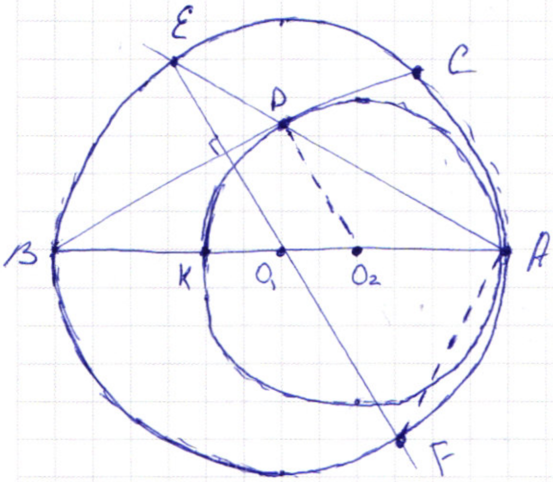
4.

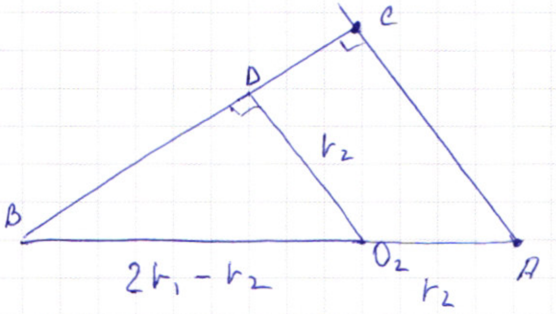
$CD = 12$

$BA = 13$

$r_1 - ?$ $\angle HFE - ?$

$r_2 - ?$ $S_{AEF} - ?$





~~1) по свойству касательной и секущей к окружности, проведенных из одной точки~~

~~$BD^2 = BK \cdot BA$~~

~~Пусть O_1 и r_1 - центр и радиус окружности Ω, а O_2 и r_2 - окружности ω соотв.~~

~~$BK = BA - KA$,~~

~~$BA = 2r_1$, $KA = 2r_2$.~~

~~Тогда $BD^2 = (2r_1 - 2r_2) \cdot 2r_1$~~

~~$BD^2 = 2 \cdot 2 \cdot (r_1 - r_2) r_1$ (1)~~

Пусть O_1 и r_1 - центр и радиус окружности Ω, а O_2 и r_2 - центр и радиус окр. ω.

1) Из треугольника BDO_2:

- $\angle BDO_2 = 90°$, т.к. O_2D - радиус, проведенный к касательной
- $DO_2 = r_2$, $BO_2 = BA - AO_2 = 2r_1 - r_2$
- По т. Пифагора $BD^2 + r_2^2 = (2r_1 - r_2)^2$

~~3) Получаем систему:~~ $\begin{cases} BD^2 = 4(r_1 - r_2) r_2; \\ (2r_1 - r_2)^2 = BD^2 + r_2^2. \end{cases}$

$BD^2 = 4r_1(r_1 - r_2)$ (1)

2) $\angle BCA = 90°$, т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр (дугу в $180°$)

Рассмотрим $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$:

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 11

(Нумеровать только чистовики)

• $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90^\circ$
• $\angle DBO_2 = \angle CBA$ – общий

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по двум углам)

Откуда $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$

$$\frac{BD}{BD+DC} = \frac{2r_1 - r_2}{2r_1} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r_2}{r_1}$$

Подставив получим $\frac{13}{25} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r_2}{r_1}$

$$\frac{1}{2}\frac{r_2}{r_1} = \frac{12}{25}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{24}{25}\ ;\ r_2 = r_1 \cdot \frac{24}{25}$$

Подставив r_2 в уравнение (1) получим:

$$169 = 4r_1\left(r_1 - \frac{24}{25}r_1\right) = 4r_1^2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{25}r_1^2$$

$$\frac{2}{5}r_1 = 13$$

$$r_1 = \frac{65}{2} = 32{,}5$$

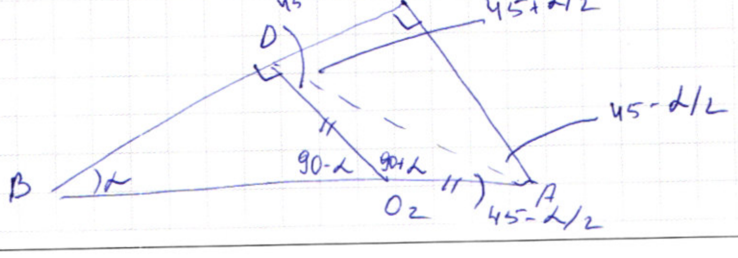
$$r_2 = \frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2} = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2$$

$\angle AFE$ вписанный (в окр. Ω) и равен половине дуги AE.

$\angle CAE$ – половина дуги EC

$\angle CBA$ – половина дуги AC

Т.к. дуга $AE = EC + AC$, то $\angle AFE = \angle CAE + \angle CBA$



Пусть угол $CBA = \alpha$, тогда $\angle CAD = 45 - \frac{\alpha}{2}$

И угол $AFE = 45 - \frac{\alpha}{2} + \alpha =$
$= 45 + \alpha/2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha = \frac{BD}{BO_2} = \frac{5}{13}$; $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

$\cancel{\cos\angle AFE = \cos(45 + \frac{\alpha}{2}) = \cos 45^\circ \cos\frac{\alpha}{2}}$

$tg\angle AFE = 5$

Ответ: $r_1 = 32{,}5$

$r_2 = 31{,}2$

$tg\angle AFE = 5.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\boxed{p = 2; 3; 5; 7; 11; 13;}$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$[p/4] = 0; 1; 2; 3.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$x = p_1 p_2 \ldots p_n$
$y = p_1' p_2' \ldots p_k'$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) - f(p_1') - f(p_2') - \ldots - f(p_k') =$

$= [p_1/4] + [p_2/4] + \ldots + [p_n/4] - [p_1'/4] - [p_2'/4] - \ldots - [p_k'/4] < 0$

$x = 2^i \cdot 3^i = \cancel{2}\ 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27.$

$y = 5; 10; 15; 20; 25; 7; 14; 21; 28; 11; 22; 13; 26; 17; 19; 23$

4
5
6
7
8
9
10
11
12

9 чисел – 0
8 чисел – 1
3 числа – 2
2 числа – 3
2 – 4
1 – 5

5, 10, 15, 20, 7, 14, 21, 28
25, 11, ~~[illegible]~~, 22, ~~[illegible]~~
13; 26

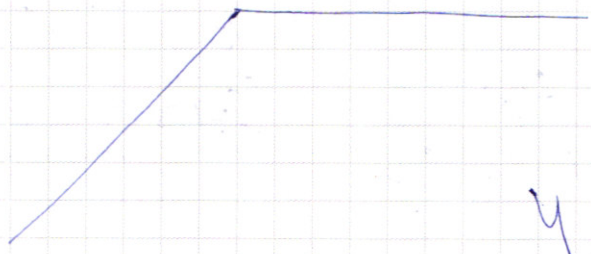
~~9 · 17~~

16 · 9
8 · 8
3 · 5
2 · 3
2 · 1

~~90 + 54~~ 144 + 64 + 15 + 6 + 2 =
= 208 + 15 + 6 + 2 = 216 + 15 = 231

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

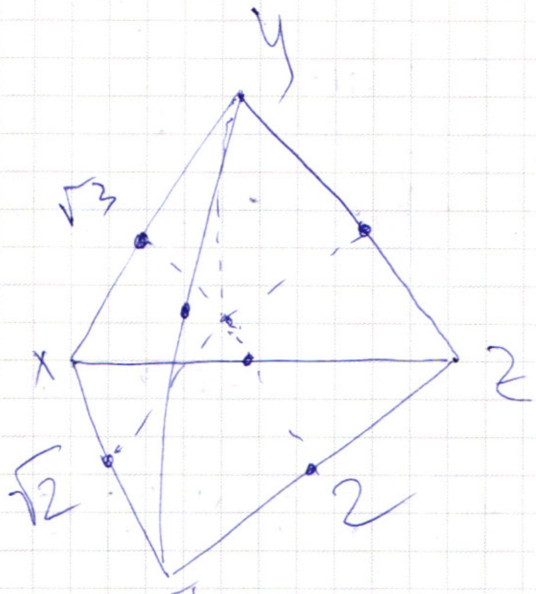
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$tg\ \alpha+\beta \quad \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{}$

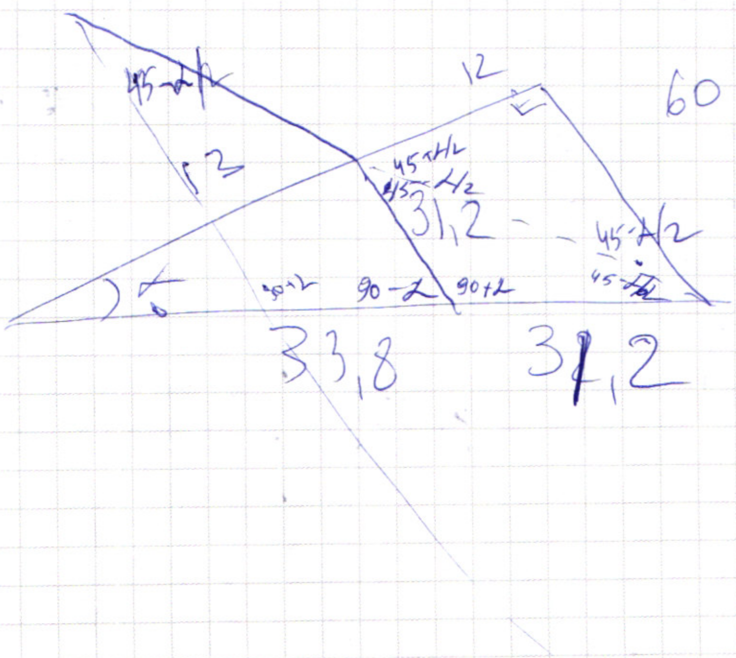
$\dfrac{1 + tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg\frac{\alpha}{2}}$

$tg\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}$



$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha$



$\cos\alpha = \dfrac{25}{65} = \dfrac{5}{13}$

$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$

$\beta = 45 - \alpha/2 + \alpha =$

$= 45 + \dfrac{\alpha}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 4r_1^2 - 4r_1r_2 + r_2^2 = BD^2 + r_2^2 \\ BD^2 = 4r_1r_2 - 4r_2^2 \end{cases} \Rightarrow 4r_1^2 - 4r_1r_2 + r_2^2 = 4r_1r_2 - 3r_2^2$

$4r_1^2 - 8r_1r_2 + 4r_2^2 = 0$

$(2r_1 - 2r_2)^2 = 0$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA}$

$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{(2r_1 - r_2)}{2r_1}$

$\sin EC = CD$ $\quad tg\, EC = \frac{CD}{CA}$

$tg\, AC = \frac{O_2D}{BD}$

$tg\, AE = tg(EC + AC) = \frac{tg EC + tg AC}{1 - tg EC \cdot tg AC} =$

$CA = \sqrt{(2r_1)^2 - (BC)^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{40 \cdot 90} = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 60$

$= \frac{\frac{CD}{CA} + \frac{O_2D}{BD}}{1 - \frac{CD \cdot O_2D}{CA \cdot BD}} = \frac{\frac{12}{60} + \frac{31,2}{13}}{1 - \frac{12 \cdot 31,2}{60 \cdot 13}} =$

$= \frac{\frac{1}{5} + 2,4}{1 - \frac{1}{5} \cdot 2,4} = \frac{2,6}{1 - 0,48} = \frac{2,6}{0,52} = \frac{260}{52} = \frac{10}{2} = 5$

$tg AE = 5$

2 и 3 → 0

5, 7, → 1

13 → 3

11 → 2

если есть 40-50

из 5, 7, 11, 13,

то остальное - 2, 3 или чего

$x = 5 \cdot 2^k \cdot 3^k$; $7 \cdot 2^k \cdot 3^k$

$y = 11 \cdot 2^k \cdot 3^k$

$x = 11 \cdot 2^k \cdot 3^k$

$y = 13 \cdot 2^k \cdot 3^k$

$-3x + 4 \le -2 + \frac{4}{3x-2}$

$-3x + 6 \le \frac{4}{3x-2} \Rightarrow \frac{(-3x+6)(3x-2) - 4}{3x-2} \le 0$

$\frac{-9x^2 + 24x - 16}{3x-2} \le 0$

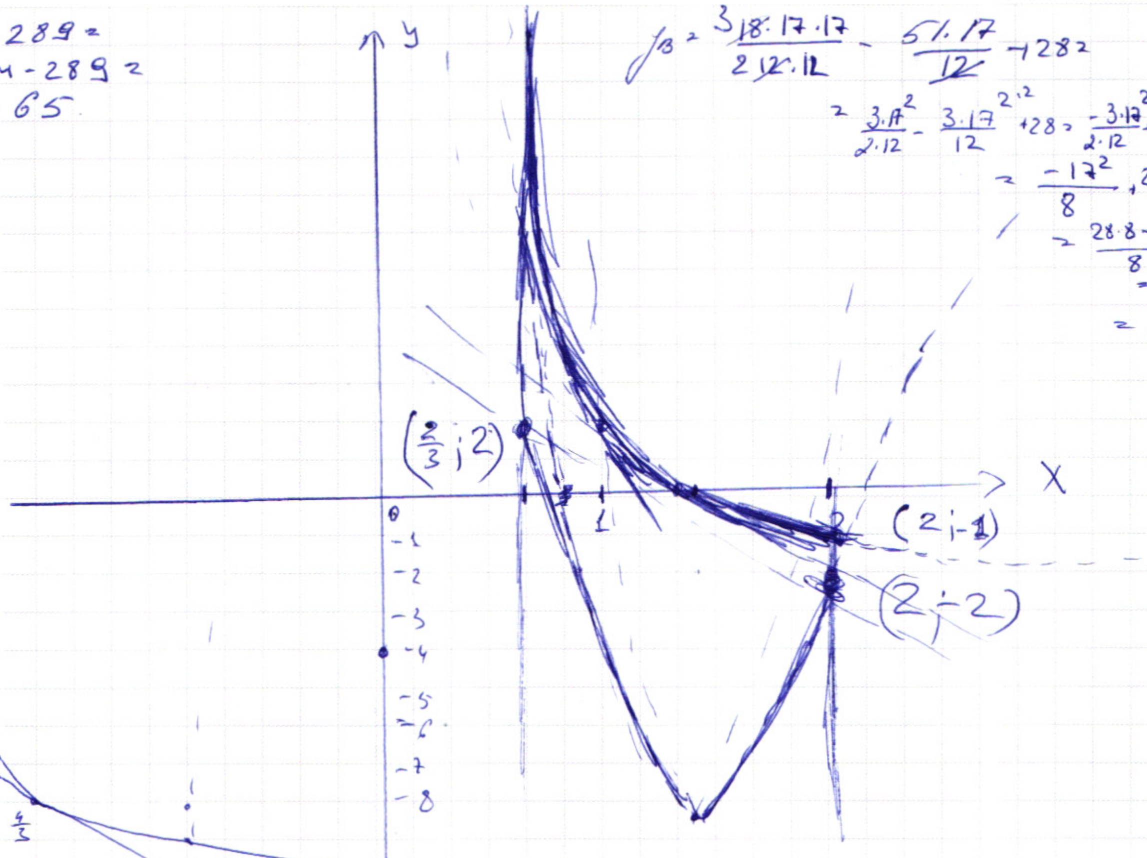
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

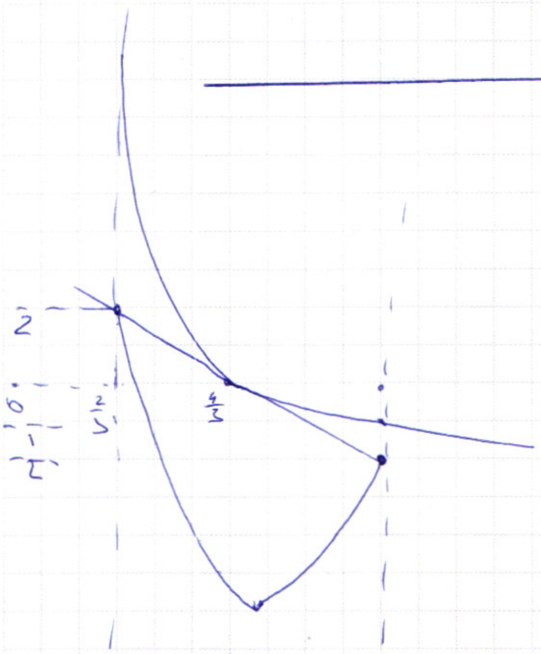
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$160+64-289=$
$=224-289=$
-65



$y_B=\frac{3\cdot18\cdot17\cdot17}{2\cdot12\cdot12}-\frac{51\cdot17}{12}+28=$
$=\frac{3\cdot17^2}{2\cdot12}-\frac{3\cdot17^2\cdot2}{12}+28=\frac{-3\cdot17^2}{2\cdot12}+28=$
$=\frac{-17^2}{8}+\frac{28\cdot8}{8}=$
$=\frac{28\cdot8-17^2}{8}=$
$=-\frac{65}{8}=$
$=-8\frac{1}{8}$



$$-2+\frac{4}{3x-2}=18x^2-51x+28$$
$$18x^2-51x+30=\frac{4}{3x-2}$$
$$(18x^2-51x+30)(3x-2)-4=0$$
$$3(6x^2-17x+10)(3x-2)-4=0$$
$$3(18x^3-51x^2+30x-12x^2+34x-20)-4=0$$
$$-63$$
$$54x^3-63\cdot3x^2+64\cdot3x-64=0$$
$$54x^3-63\cdot3x^2+64\cdot3x-64=0$$
$$54\cdot8+3\cdot2(64-\underset{126}{63\cdot2})-64=$$
$$=54\cdot8+6\cdot(-62)-64=$$
$$=432-372-64$$

$4\cdot2-17\cdot2+28=$
$=28+18-34=$
$=36-34=2$

$(54x-63\cdot3)x^2+64(3x-1)=0$
$(54\cdot4-63\cdot3)16+64\cdot(2-1)=0$
$(108-189)4+$
$+64\cdot5=$
$=-81\cdot4+64\cdot5=$
$=-324+320$

$-3x+4 \quad 4 \quad -2+\frac{4}{3x-2}$
$-3x+6=\frac{4}{3x-2} \Rightarrow (-3x+6)(3x-2)-4=0$
$-9x^2+6x+18x-12-4=0$
$-9x^2+24x-16=0$
$D=24^2-4\cdot16\cdot9=4(12^2-16\cdot9)=$
$=16(6^2-4\cdot9)$
$64(6^2-9)=0$
$-(3x-4)^2=0$

$y=ax+b$
$$\begin{cases}2=a\cdot\frac{2}{3}+b\\-2=2a+b\end{cases}\Rightarrow 2-(-2)=\frac{2}{3}a-2a+b-b$$
$$4=-\frac{4}{3}a \Rightarrow \boxed{a=-3 \quad b=4}$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)