МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

Воспользуемся суммой синусов для выражения 2:

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{17}$$

$$2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$$

↳ это по условию равно $-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos(2\beta) = \cancel{\ \ } = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

По основному триг. тождеству: $\cancel{\sin^2(2\beta)+\cos^2(2\beta)=1}$ $\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=1$ $\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} \Rightarrow$

$$\sin(2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

Раскроем выражение (1): $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (4)

Выразим $\sin2\alpha$ и $\cos2\alpha$ через $tg\,\alpha$, учитывая, что он существует:

$$\sin2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1} \qquad \cos2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

Подставим в (4):

$$\frac{2tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1}\cos2\beta + \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Подставим значения для $\cos2\beta$ и $\sin2\beta$:

$$\frac{2tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot\sqrt{17}$$

$$\frac{2tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1} \pm 4\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} = -1$$

Переносим всё влево и приводим к одному знаменателю.

$$\frac{2tg\,\alpha \pm 4(1-tg^2\alpha)+tg^2\alpha+1}{tg^2\alpha+1} = 0.$$

Получаем 2 возможных уравнения:

⟶

$$\frac{2tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1}{tg^2\alpha + 1} = 0 \qquad \frac{2tg\alpha - 4 + 4tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1}{tg^2\alpha + 1} = 0.$$

Так как $tg^2\alpha \geq 0$ ~~при $\forall\alpha$, то~~ $tg^2\alpha + 1 > 0$ (если $tg\,\alpha$ существует)

Тогда: $\left[\begin{array}{l} -3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0 \\ 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -(tg\alpha + 1)(3tg\alpha - 5) = 0 \\ (tg\alpha + 1)(5tg\alpha - 3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1,\ tg\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = -1,\ tg\alpha = \frac{3}{5}. \end{array}\right.$ — 3 возможных значения.

Ответ: $tg\alpha = -1$ либо $tg\alpha = \frac{5}{3}$ либо $tg\alpha = \frac{3}{5}$

№2

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) - 6(x-1) = \sqrt{x(y-6) - (y-6)} \\ (9x^2 - 18x + 9) - 9 + (y^2 - 12y + 36) - 36 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3(x-1))^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$ Обозначим: $a = y - 6$, $b = x - 1$, тогда

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a - 6b \geq 0 \\ ab \geq 0 \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a - 6b \geq 0 \\ ab \geq 0 \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-9b) = 0 \\ 9b^2 + a^2 = 90 \\ a - 6b \geq 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ либо $a = 4b$, либо $a = 9b$, тогда

1. $a = 9b$: $\begin{cases} 9b^2 + (9b)^2 = 90 \\ 9b - 6b \geq 0 \\ 9b^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 90b^2 = 90 \\ 3b \geq 0 \\ 9b^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b \geq 0 \\ 9b^2 \geq 0 \end{cases}$ Подходит $\Rightarrow$ только $b = 1$, $a = 9b = 9$

2. $a = 4b$: $\begin{cases} 9b^2 + (4b)^2 = 90 \\ 4b - 6b \geq 0 \\ 4b \cdot b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b^2 + 16b^2 = 90 \\ -2b \geq 0 \\ 4b^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{90}{25} \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Подходит только $b = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a = 4b = -\frac{12\sqrt{10}}{5}$

Выполним обратную замену: ⟶

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №2:

1\. $a=9$, $b=1$ $\begin{cases} y-6=9 \\ x-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=15 \\ x=2 \end{cases}$ $(2;15)$

2\. $a=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$ $b=\frac{-3\sqrt{10}}{5}$;

$\begin{cases} y-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ x-1=\frac{-3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

Ответ: $(2;15)$; $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$. Пусть $26x-x^2=t$, тогда

$|-t|^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0$. ~~$t \geq 0$, потому что стоит в~~

$t>0$ обязано быть, потому что стоит под аргументом логарифма.

$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0$. Пусть $a=\log_5 t$, тогда

$t^{\log_5 12}=5^{a\log_5 12}$; $t=5^a$; $13^{\log_5 t}=13^a$:

$5^{a\log_5 12}+5^a-13^a \geq 0$.

$(5^{\log_5 12})^a+5^a-13^a \geq 0$.

$12^a+5^a-13^a \geq 0$. Поделим на $13^a>0 \Rightarrow$ знак не меняем.

~~Рассмотрим функцию $f(a)=12^a+5^a-13^a$~~

$\left(\frac{12}{13}\right)^a+\left(\frac{5}{13}\right)^a-1 \geq 0$. $\left(\frac{12}{13}\right)^a \downarrow$ при $a\uparrow$; $\left(\frac{5}{13}\right)^a-1\downarrow$ при $a\uparrow \Rightarrow$

Слева стоит ~~сум~~ убывающая функция как сумма двух убывающих $\left(\frac{12}{13}\right)^a$ и $\left(\frac{5}{13}\right)^a-1$ $\longrightarrow$

Задача 3 (продолжение): при $a=2$ достигается равенство:

$\left(\frac{12}{13}\right)^a+\left(\frac{5}{13}\right)^a-1=0$ $\quad \frac{144}{169}+\frac{25}{169}-1=\frac{169}{169}-1=0.$

$f(a)=\left(\frac{12}{13}\right)^a+\left(\frac{5}{13}\right)^a-1.$

Так как $f(a)$ - убывающая функция, и при $a=2$ имеет свой нуль, то

при $a>2$ $f(a)<0$

при $a<2$ $f(a)>0.$

Нам подходят $a \le 2.$

Обратная замена: $\log_5 t \le 2 \iff \begin{cases} t \le 5^2 \\ t>0 \end{cases} \iff t\in(0;25]$

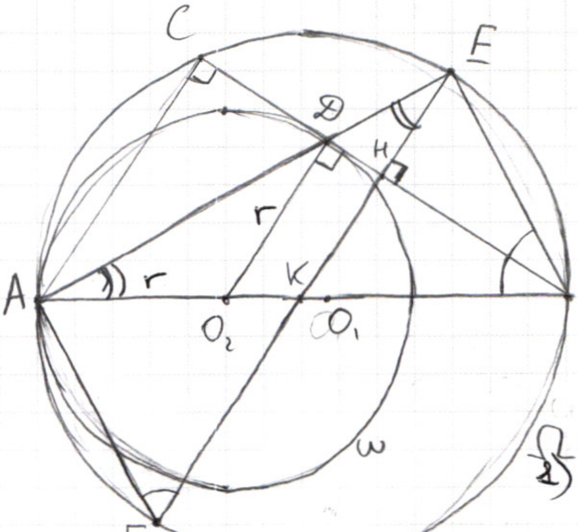
Обратная замена: $0<26x-x^2\le 25 \iff \begin{cases} 26x-x^2>0 \\ -x^2+26x-25\le 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} x^2-26x<0 \\ x^2-26x+25\ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-26)<0 \\ (x-1)(x-25)\ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(0;26) \\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

№4



Дано: Ω, ω - окружности.

A - точка касания внешним образом

BC - касательная к ω; AB - диаметр Ω

D - точка касания

$CD=12$; $BD=13$

$(AD)\cap\Omega=E$ (вторично); $EH\perp BC$

$(EH)\cap\Omega=F$ (вторично)

Решение.

1) Пусть O_1 - центр Ω; O_2 - центр ω

R - радиус Ω (больший); r - радиус ω

Проведём O_2D - радиус в точку касания $\Rightarrow O_2D\perp BC$

$\angle ACB=90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр AB $\longrightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение. Тогда $\triangle O_2DB \sim \triangle ACB$ ($\angle O_2DB = \angle ACB = 90°$; $\angle O_2BD$ - общий) по 2-м углам.

Тогда: $\frac{AC}{O_2D} = \frac{AB}{O_2B} = \frac{BC}{BD} = \frac{(13+12)}{13} = \frac{25}{13}$; $AB = 2R$ (диаметр Ω)

$O_2B = AB - AO_2 = 2R - r$ (внутр. касание)

Тогда: $\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{13}$

$26R = 50R - 25r$; $24R = 25r$; $\underline{R = \frac{25}{24}r}$.

2) Напишем т. Пифагора для $\triangle O_2DB$: $BD^2 + \cancel{O_2B^2}\ O_2D^2 = O_2B^2$

$13^2 + r^2 = (2R-r)^2$ $\quad 2R - r = 2\cdot\frac{25}{24}r - r = \frac{25}{12}r - r = \frac{13}{12}r$.

$13^2 + r^2 = \left(\frac{13}{12}r\right)^2$

$13^2 = \frac{169}{144}r^2 - r^2$; $\frac{25}{144}r^2 = 13^2$; $r^2 = \frac{13^2\cdot 144}{25}$; $\underline{r = \frac{13\cdot 12}{5} = \frac{156}{5}}$

$R = \frac{25}{24}r = \frac{25}{24}\cdot\frac{156}{5} = \underline{\frac{65}{2}}$

3) $\frac{AC}{O_2D} = \frac{25}{13}$ (из пункта 1): $\frac{AC}{r} = \frac{25}{13}$ $\quad AC = \frac{25}{13}\cdot\frac{156}{5} = 60$.

По т. Пифагора для $\triangle ACD$ ($\angle ACD = 90°$): $AC^2 + CD^2 = AD^2$

$AD^2 = 60^2 + 12^2 = 12^2(5^2+1) \Rightarrow \underline{AD = 12\sqrt{26}}$

4) Так как $O_2D \perp BC$ и $(EH) \perp BC$, то $O_2D \parallel (EH)$

Пусть $EH \cap AB = K$, тогда $\triangle AO_2D \sim \triangle AKE$ ($\angle A$ - общий, $\angle ADO_2 = \angle AEK$ как соответственные при $O_2D \parallel KE$, секущая AE) по 2-м углам

Т.к. $\triangle AO_2D$ - равнобедр. ($AO_2 = O_2D = r$) $\Rightarrow$

$\triangle AKE$ - тоже равнобедренный, $\angle EAK = \angle KEA$.

5) Рассмотрим $\triangle AEB$. $\angle AEB = 90°$ (опирается на диаметр)

$$\left.\begin{aligned}&\angle EAB + \angle EBA = 90°\\ &\angle AEK + \angle KEB = 90°\\ &\angle EAB = \angle AEK\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle KEB = KBE = 90 - \angle AEK$$

, $\triangle KEB$ - равнобедр., тогда $KE = KB$, но $AK = KE$ из равнобедр $\triangle AKE \Rightarrow$

$AK = KB = KE$. Но тогда $AK = KB = \frac{1}{2}AB = R$, $KE = R \Rightarrow K$ совпадает с O_1

№4 (продолжение)

6) В таком случае EF – диаметр Ω

Из ~~по~~ подобия $\triangle ADO_2$ и AEO_1 (доказано ранее; $K \equiv O_1$) $\Rightarrow$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R} = \frac{24}{25}$; ~~AD =~~ $AE = \frac{25}{24} \cdot AD = \frac{25}{24} \cdot 12\sqrt{26} = \frac{25\sqrt{26}}{2}$

7) FE – диаметр $\Rightarrow$ $\triangle AEF$ = прямоугольный ($\angle FAE = 90^\circ$, опир. на диаметр)

$\sin \angle AFE = \frac{AE}{FE} = \frac{AE}{2R} = \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{1}{2R} = \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{1}{65} = \frac{5\sqrt{26}}{26} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$

8) По т. Пифагора для $\triangle AFE$: $AF^2 = FE^2 - AE^2 = \cancel{\frac{25\cdot 26}{4} - (2R)^2} = \cancel{\frac{25\cdot 26}{4} - 65^2} =$

$= (2R)^2 - AE^2 = 65^2 - \frac{25^2 \cdot 26}{4} = \frac{65^2 \cdot 2 - 25^2 \cdot 13}{2} = \frac{5^2(13^2 \cdot 2 - 5^2 \cdot 13)}{2} = \frac{5^2 \cdot 13(26-25)}{2} =$

$= \frac{5^2 \cdot 13}{2} \Rightarrow AF = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{25 \cdot 5 \cdot 13\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4} = 406\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 13 \\ \hline 375 \\ +\ 125 \\ \hline 1625 \end{array}$$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$

$S_{AEF} = \frac{1625}{4} = 406{,}25$

№6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$ Проанализируем функции

$y(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$ и $f(x) = 18x^2 - 51x + 28$.

1. $y(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+4+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$ Асимптоты: $x = \frac{2}{3}$ и $y = -2$

В точке $x=2$ имеет значение: $y(2) = \frac{8-12}{6-2} = -1$ ~~$y(\frac{2}{3})$~~

2. $f(x) = 18x^2 - 51x + 28$. Вершина: $x_B = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$f(x) = 2(3x - \frac{17}{4})^2 ~~+~~ - \frac{289}{16} \cdot 2 + 28$. $y_B = 28 - \frac{289}{8} = 28 - 36\frac{1}{8} = -8\frac{1}{8}$

~~В точке~~ $f(2) = \underbrace{18 \cdot 4}_{72} - 102 + 28 = 100 - 102 = -2$. $f(\frac{2}{3}) = \frac{18 \cdot 4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28 =$

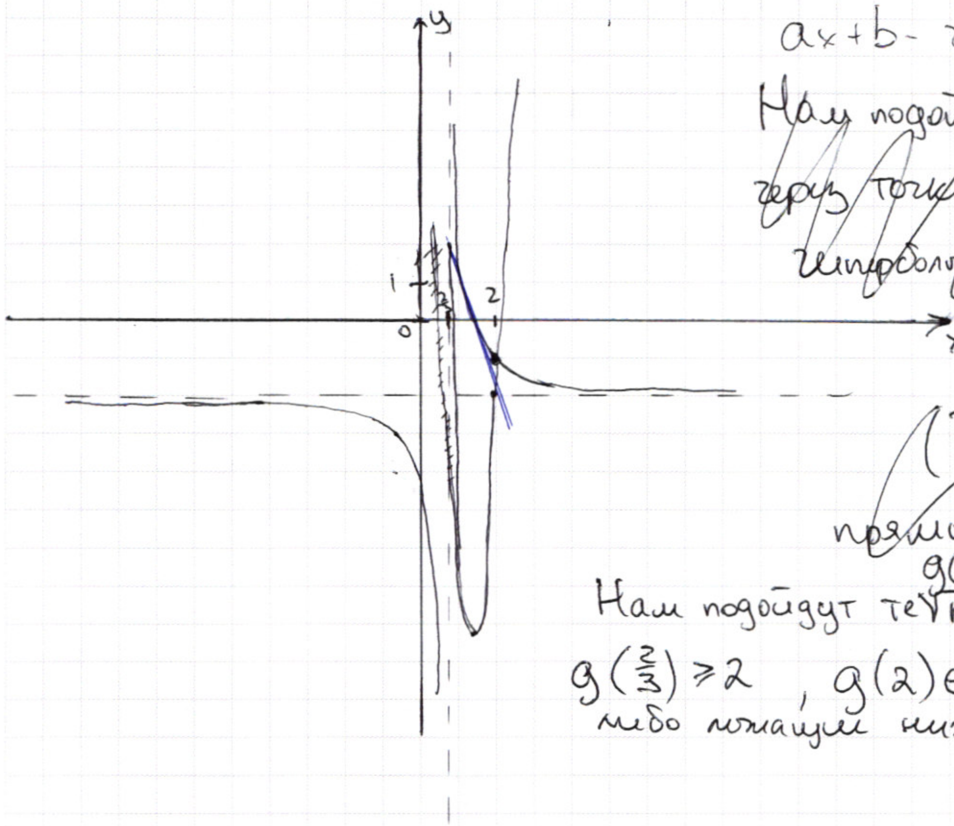
$= 8 - 34 + 28 = 2$

$f'(x) = 36x - 51$. $f'(2) = 36 \cdot 2 - 51 = 72 - 51 = 21$

$\longrightarrow$

№6 (продолжение).

Построим примерные графики:



$ax+b$ – график прямой.

~~Нам подойдут прямые, проходящие через точки $(2;-1)$ и от касания гиперболы до касания параболы пересечения с параболой в точке $\left(\frac{2}{3};2\right)$ либо прямые, проходящие~~ $g(x)$

Нам подойдут те прямые, у которых $g\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$, $g(2) \in [-2;-1]$ и касающиеся, либо лежащие ниже гиперболы.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} + \cancel{\sin\frac{2\alpha\cdot 4\beta}{2}}\cos(2\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) - \sin 2\beta\cancel{\cos(2\alpha+2\beta)}$

$\cos(2\beta) = -\frac{1}{17} : \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\sqrt{17}}{17} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$ $\quad \cancel{\cos 2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\,tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1}$ $\qquad \cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} \Big| : \cos^2\alpha$

$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

1) $\frac{2\,tg\,\alpha}{tg^2\alpha+1} \pm 4\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$\frac{2tg\alpha+4-4tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} + 1 = 0.$ $\quad \frac{2tg\alpha+4-4tg^2\alpha+tg^2\alpha+1}{1+tg^2\alpha} = 0$ $\quad 1+tg^2\alpha \to \neq 0.$

$-3tg^2\alpha+2tg\alpha+5=0.$ $\qquad 2tg\alpha-4+4tg^2+tg^2+1=0.$

$3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$ $\qquad 5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0.$

$(tg\alpha+1)(3tg\alpha-5)=0.$ $\qquad (tg\alpha+1)(5tg\alpha-3)=0.$

$tg\alpha=-1$ $\quad tg\alpha=\frac{5}{3}$ $\qquad tg\alpha=-1$ $\quad tg\alpha=\frac{3}{5}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

② $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$(3x-3)^2+(y-6)^2-9-36=45$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} \underbrace{(y-6)}_{=a}-6\underbrace{(x-1)}_{=b}=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ (3(x-1))^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{ab}+6b$ $\begin{cases} a^2-12ba+36b^2=ab \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$ ~~$D=169-4\cdot 36=169-144=25$~~

$(a-9b)(a-4b)=0$

$a=9b$ $a=4b$

$9b^2+81b^2=90$

$b^2=1$ $b=\pm 1$, но

при $b=-1$: $-3b=\sqrt{9b^2}$; $a=9$ <0 >0

не подходит

$9b^2+16b^2=90$

$25b^2=90$ $b^2=\frac{90}{25}$

$b=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$, но $+\frac{3\sqrt{10}}{5}$ не подойдут:

$-2b=\sqrt{4b^2}$ <0 >0

$b=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

Итог: $b=1$ $b=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

$3=\sqrt{30-12-15+6}$ $3=\sqrt{36-27}=\sqrt{9}=3$ $9+9^2=90$

$9\cdot\frac{90}{25}+\frac{144\cdot 10}{25}=\frac{810+144\cdot 10}{25}=\frac{810+1440}{25}=\frac{2250}{25}=90$

3 $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $26x-x^2=t\geq 0$.

$|-t|^{\log_5 12}+t-13^{\log_5(t)}\geq 0$.

$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5(t)}\geq 0$.

$t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}-13^{\log_5 t}\geq 0$.

$t(t^{\log_5\frac{12}{5}}+1)$

$5^{a\log_5 12}$

$\log_5 t=a$

$5^{(t^{\log_5 12}+t)}$

$12^a+5^a-13^a\geq 0$ $|:13^a$

$\log_5(t^{\log_5 12}+t)\geq\log_5 13^{\log_5 t}$ $\left(\frac{5}{13}\right)^a$

~~$\log_5(t^{\log_5 12}+t)\geq\log_5 t\cdot\log_5 13=\log_5 13\, t$~~

$t^{\log_5\frac{12}{5}}+1-13^{\log_5 t}\ln(\log_5 t)\cdot\frac{1}{t\ln 5}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

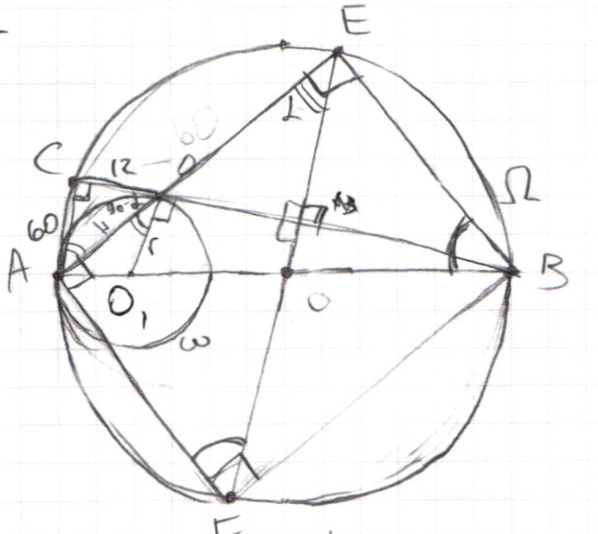
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{a\log_5 12}+5^a-13^a\geq 0. \quad 12^a+5^a-13^a\geq 0. \;\Big|:13$

$\left(\frac{12}{13}\right)^a+\left(\frac{5}{13}\right)^a-1\geq 0$ При $a=2$

№4



$CD=12 \quad BD=13$

$R,\ r - ?$ $\angle AFE - ?$

$S_{\triangle AEF}$

$\frac{r}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{13}{25}=\cancel{AB}\ \frac{O_1B}{AB}=\frac{2R-r}{2R}$

$\cancel{13\cdot 2R=25R-2r}$ $\quad 26R=50R-25r$

$\cancel{R}$ $\quad 24R=25r$

$R=\frac{25}{24}r$

$13^2+r^2=(2R-r)^2=\left(\frac{25}{12}r-r\right)^2=\left(\frac{13}{12}r\right)^2$

$13^2+r^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2r^2$

$144+12=156$

$13^2=\frac{169}{144}r^2-r^2=\frac{25}{144}r^2$

$r^2=\frac{169\cdot 144}{25} \Rightarrow r=\frac{13\cdot 12}{5}=\boxed{\frac{156}{5}}$

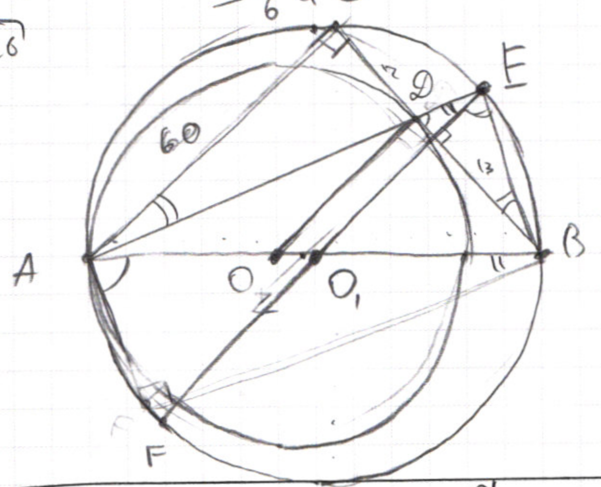
$R=\frac{25}{24}r=\frac{25}{24}\cdot\frac{13\cdot 12}{5}=\boxed{\frac{65}{2}}$

$60^2+12^2=\sqrt{3744}$

$=12^2(5^2+1)=$

$=12\sqrt{26}$

62^2 $\quad 62 \quad 124 \quad 124 \quad 64$



$\cancel{2x^2+x^2=}$ $\quad \frac{x}{r}=\frac{25}{13} \quad \frac{5x}{156}=\frac{25}{13}$

$x=\frac{5\cdot 156}{13}=\underline{60}$

$144+12=156$

$\frac{-6x+4+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$

$\frac{2}{3};+\infty \downarrow$

Ассимптота $x=\frac{2}{3}$

$\frac{51}{36}\ \frac{17}{12}<\frac{3}{2}$

$18x^2-51x+28$

$2500+101$

$2601-4\cdot 18\cdot 28=$

$=2601-1800-4\cdot 3\cdot 18=$

$=801-3\cdot 72=801-216=585$

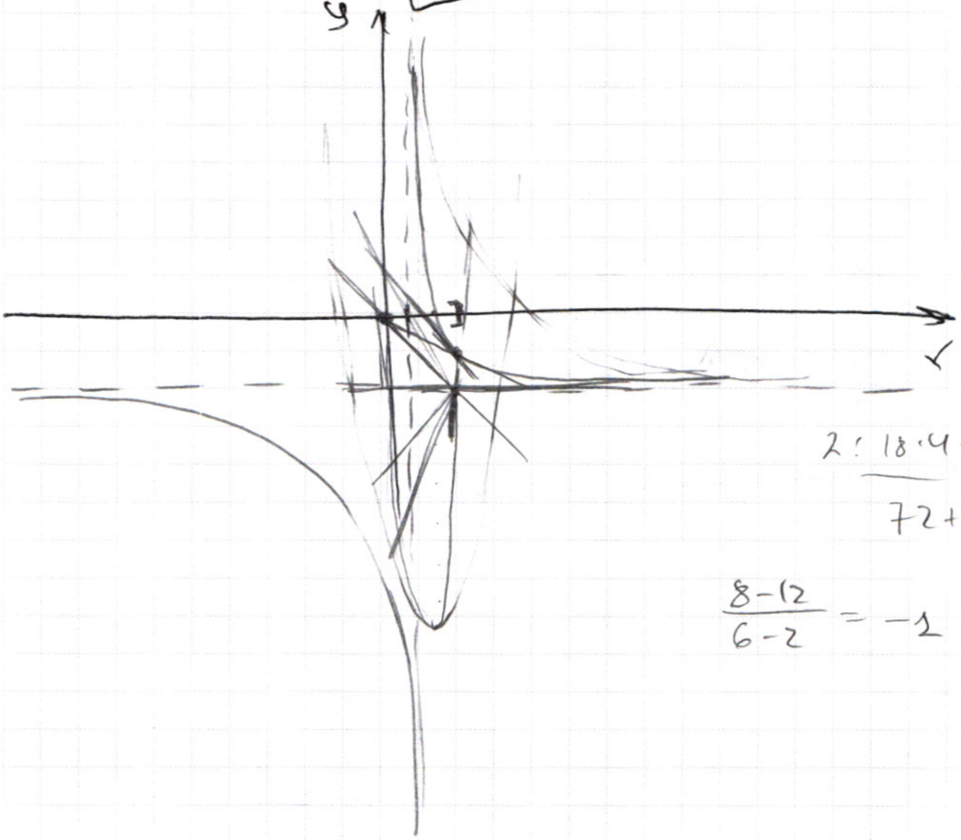
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2\left(3x-\frac{17}{4}\right)^2-\underbrace{\frac{289}{8}+28}$ + min $=28-\frac{289}{8}=28-36\frac{1}{8}=-8\frac{1}{8}$



$2: 18\cdot4-102+28$

$72+28-102=-2$

$\frac{8-12}{6-2}=-1$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)