МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Задача №1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-2}{17} & (2) \end{cases}$$

Найти $tg\,\alpha$.

1) $(2) \Rightarrow 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = \frac{-2}{17}$

$\Leftrightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-1}{17}$

Подставим в это выражение $\sin(2\alpha+2\beta)$ из (1)

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{-1}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{+1}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{1} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$ (3) Из этого следует, что

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \boxed{\sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}}$ (4)

2) Раскроем $\sin(2\alpha+2\beta)$ как синус суммы в ур. (1)

$\Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$ ← Подставим сюда (3) и (4)

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha\cdot 4 = -1}$ ← Выразим $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$ через $tg\,\alpha$ и подставим ~~в~~ сюда.

$\sin 2\alpha = \frac{2 tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{2 tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm 4\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1}$

Обозначим $tg\,\alpha = x$ и распишем совокупность:

$$\left[\begin{aligned} &\frac{2x}{1+x^2}+4\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \\ &\frac{2x}{1+x^2}-4\,\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \end{aligned}\right. \rightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{-4x^2+2x+4}{1+x^2} = -1 \\ &\frac{4x^2+2x-4}{1+x^2} = -1 \end{aligned}\right. \longrightarrow$$

След. стр. →

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2}} = 2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos^2\alpha} = 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{\sqrt{17}}$ (2)

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0$

6 ро(β)

$12^{\log_5 t}$ $\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = \frac{-2}{17}$

$5^{\log_5 t}$

$12^a + 5^a - 13^a \geq 0$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$(1) \Rightarrow (2)$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$2\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta)\right) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Отсюда

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ — $\cos 2\alpha$ $\sin\alpha$ $= \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2-2x-4 = 1+x^2 \\ 4x^2+2x-4 = -1-x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2-2x-5=0 & \Rightarrow x=\left\{\frac{5}{3}; -1\right\} \\ 5x^2+2x-3=0 & \Rightarrow x=\left\{\frac{3}{5}; -1\right\} \end{array}\right.$$

Таким образом $\operatorname{tg}\alpha \in \left\{\frac{5}{3}; -1; \frac{3}{5}\right\}$

т.к. по условию значений $\operatorname{tg}\alpha \geq 3$, то существование каждого из корней проверять не нужно.

Ответ: $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$; -1.

Задача №2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

из

1) $(1) \Rightarrow y-6x = \sqrt{x(y-6)-1(y-6)} \Rightarrow y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

Пусть $\boxed{a=x-1}$, $\boxed{b=y-6}$, тогда $b-6\cdot a = (y-6)-6(x-1) = y-6-6x+6 = y-6x$

То есть уравнение (1) можно представить как:

$b-6a = \sqrt{a\cdot b}$, то есть $(b-6a)^2 = ab,\ b-6a \geq 0$ (3)

2) Выделим полные квадраты в уравнении (2):

$(9x^2-18x+9)-9+(y^2-12y+36)-36=45$, то есть:

$3^2(x-1)^2+(y-6)^2 = 90 \Rightarrow 9a^2+b^2=90$ (4)

Таким образом, получили систему:

$$\begin{cases} (b-6a)^2 = ab & (3) \\ 9a^2+b^2=90 & (4) \end{cases}, \text{ где } \begin{array}{l} a=x-1 \quad b-6a\geq 0 \\ b=y-6 \end{array}$$

след. стр. →

Рассмотрим уравнение (3) из системы:

$\boxed{b-6a \geq 0}$

$(b-6a)^2 = ab \iff b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$\iff b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$ Решим это уравнение как квадратное относительно b:

$D = (13a)^2 - 4 \cdot 36a^2 = 169a^2 - 144a^2 = 25a^2$

$\to b = \frac{13 \pm 5a}{2} \Rightarrow b = \left[\begin{array}{l} 9a \\ 4a \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} a \geq 0 \; (9a - 6a \geq 0) \\ a \leq 0 \; (4a - 6a \geq 0) \end{array}$

Подставим данные выражения в (4) и распишем совокупность:

$\begin{cases} b = 9a, \; a \geq 0 \\ 9a^2 + (9a)^2 = 90 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 4a, \; a \leq 0 \\ 9a^2 + (4a)^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 9a, \; a \geq 0 \\ 90a^2 = 90 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 4a, \; a \leq 0 \\ 25a^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 9a, \; a \geq 0 \\ a^2 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 4a, \; a \leq 0 \\ a^2 = \frac{18}{5} \end{cases}$

Итого получаем такие системы:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -\sqrt{\frac{18}{5}} \\ b = -4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases}$

Обратная замена:

$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 6 = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - 1 = -\sqrt{\frac{18}{5}} = -3\sqrt{0{,}4} \\ y - 6 = -12\sqrt{0{,}4} \end{cases}$

То есть:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1 - 3\sqrt{0{,}4} \\ y = 6 - 12\sqrt{0{,}4} \end{cases}$

Ответ: $(2; 15)$; $(1 - 3\sqrt{0{,}4}; 6 - 12\sqrt{0{,}4})$.

след. стр. →

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

- Заметим, что на ОДЗ $|x^2-26x| = 26x-x^2$

$\Rightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Замена: $26x-x^2=t$, $t>0$ (по ОДЗ)

$\Rightarrow t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$. Заметим, что по с-вам логарифма т.к. $t>0$

$a^{\log_5 t} = t^{\log_5 a}$, если $a>0$

$\Rightarrow 13^{\log_5 t} = t^{\log_5 13}$

$\Rightarrow t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0$

$\Rightarrow t(t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}+1) \geq 0$

т.к. $t>0$ - можем сократить на t

$\Rightarrow t^{\log_5 \frac{12}{5}}-t^{\log_5 \frac{13}{5}}+1 \geq 0$ По такому же свойству логарифма $t^{\log_5 a} = a^{\log_5 t}$, $a>0$

$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}-\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}+1 \geq 0}$ (1)

Заметим, что при $t\in(0;1)$ $\log_5 t<0 \Rightarrow \frac{13}{5}^{\log_5 t}<1$

$\Rightarrow$ Неравенство (1) всегда верно (т.к. присутствует слагаемое 1)

значит промежуток $t\in(0;1)$ - входит в ответ.

Проверим $t=1$: $\frac{12}{5}^0-\frac{13}{5}^0+1=1-1+1=1\geq 0$ - верно $\Rightarrow t=1$ - корень

след. стр

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Таким образом $t\in(0;1]$ - подходит. Рассмотрим функцию $f(t)=\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}+1-\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}$.

Заметим, что при $t>1$ - данная функция строго убывает. Тогда по свойствам монотонности функций $f(t)$ - пересекает ось Ox - только в единственной точке, при этом до этой точки функция >0, а после <0.

Заметим, что при $t=25$ $f(t)=$

$$=f(25)=\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 25}+1-\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 25}=\left(\frac{12}{5}\right)^2+1-\left(\frac{13}{5}\right)^2=$$

$=-1+1=0$. То есть $f(25)=0$, а значит, из доказанного выше свойства $f(t)\geq 0$ при $t\in(1;25]$

то есть $\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}+1-\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}\geq 0$, при $t\in(1;25]$

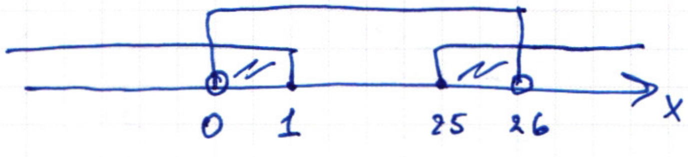
при этом при $t>25$ - решений нет.

Таким образом, мы нашли все решения неравенства (1) это: $t\in(0;1]\cup(1;25] \Rightarrow t\in(0;25]$.

Обратная замена:

$$26x-x^2\in(0;25] \Leftrightarrow \begin{cases}26x-x^2>0\\26x-x^2\leq 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-26x<0\\x^2-26x+25\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in(0;26)\\x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)\end{cases}$$



$\Rightarrow$ Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$.

след. стр. →

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 5

Заметим, что по условию $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, а также $f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4y}\right]$ и $f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$, $f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{1}{4y}\right]$

то есть, имеем систему:

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4y}\right] \overset{\text{по усл}}{<} 0 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] \overset{\text{по усл.}}{<} 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] < 0 & (1) \\ \left[\frac{x}{4y}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] & (2) \end{cases}$$

Заметим, что по условию $x, y \in [4;28]$ при этом $x, y \in \mathbb{N}$, но тогда $\left[\frac{1}{4y}\right] = 0$ при $\forall y$ из ОДЗ, а значит, ~~что~~ неравенство (1) превращается в

$\left[\frac{x}{4}\right] < 0$ — данное неравенства корней на области определения не имеет, т.к.

$x \geq 4 \Rightarrow \left[\frac{x}{4}\right] \geq \left[\frac{4}{4}\right] \geq 1$, а значит не существует ни одной пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющей условию.

Ответ: 0.

След. стр. →

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

Заметим, что выражение $ax+b$ - задаёт прямую, таким образом, необходимо найти все прямые, все точки которых на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$ принадлежат $\left[18x^2-51x+28; \frac{8-6x}{3x-2}\right]$.

Построим область, которой должны принадлежать искомые прямые:

$D=51^2-4\cdot 28\cdot 18$

Левая граница: парабола с вершиной $x=\frac{51}{2\cdot 18}=\frac{17}{12}$,

проходящая через точки ~~$(x_1;0)$, $(x_2;0)$, где x_1, x_2~~

~~$x_1=\frac{51}{}$~~ $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2;-2)$ с ветвями вверх

Правая граница: гипербола $-\left(\frac{6x-8}{3x-2}\right)=-\left(\frac{6x-4-4}{3x-2}\right)=-\left(2+\frac{-4}{3x-2}\right)=$

$=-2+\frac{4}{3x-2}$, которая имеет асимптоты $x=\frac{2}{3}$, $y=-2$

и проходит через точку $(2;-1)$.

В данной заштрихованной области необходимо найти все прямые, все точки которых на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$ - принадлежат ей.

Это выполняется, если концы $ax+b$ на данном отрезке лежат выше или на параболе и ниже или на гиперболе.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \geq ax+b \geq -32x^2+36x-3$$

$x = \frac{5-4}{4} = \frac{3}{4}$

Выч $x \in$; 1]

$f(x) = -32x^2+36x-3$ — парабола

— ветками вниз с верш при $x_0 = \frac{9}{16}$

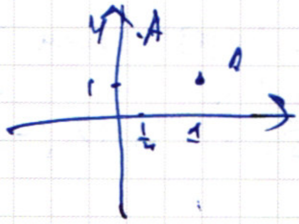
$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ $f(1) = 1$

Выч верх $ax+b \leq$

$g(x) = ax+b$ — на концах отрезка $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

была не выше параболы то есть $g(x) = \frac{a}{4}+b <$

$g(1) = a+b \leq 1 = f(1)$



2) $\varphi(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

$= \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ — гипербола

на $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ — выпукл

Сверх приём

$h\left(\frac{1}{4}\right) = 3$ $h(1) = 0$

Заметим, что прямая $ax+b$ — проходящая через

концы $y = f(x)$ на $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ то есть через $A = \left(\frac{1}{4}; 4\right)$

; $B = (1; 1)$

имеет a, b,

$$\begin{cases} \frac{a}{4}+b=4 \\ a+b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$$

$a = -4x$

Но $g = -4x+5$ является

касательной к $h(x) = 4 + 4$

$4x+5$ — действ если решить систем

Получим ед. общ

$$\begin{cases} y = -4x+5 \\ y = 4 + \frac{4}{4x-5}; \end{cases} \quad y = \frac{4}{y} \quad y^2-4y+4=0$$

точ $y =$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & (2) \end{cases}$$

1) (1) $x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$x - 6 = a \qquad b = 2y - 1$

$a - 6b = x - 6 - 12y + 6 = x - 12y$

$a - 6b = \sqrt{ab}$ (1)

2) $(x^2 - 12x + 36) - 36 + 36\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 45$

$(x-6)^2 - 36\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 45$

$a^2 + 9(b)^2 = 45 + 36 = 9$

$9 \cdot 9 \cdot 0{,}4 + 144 \cdot 0{,}4 = 90 \quad 0{,}4(144 + 81)$

$\frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

$\frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

$\frac{9}{x} = 2{,}1$

$51 + 9 = 90$

$\sqrt{36 \cdot 0{,}4} = 6 - 12\sqrt{0{,}4}$

$= 6\sqrt{0{,}4} \quad 6 + 18\sqrt{0{,}4}$

$\frac{144 + 81}{225 \cdot 4}{10} = 90$

$\frac{45 \cdot 4}{2}$

$-\frac{45}{9}{36}$

$9x^2 - 18x + 9$

$(x-1)\cdot 9(x^2 - 2x + 1)$

$36 + 24 - 40$

$\frac{16}{25} + 9$

$\frac{18 \cdot 17^2}{12^2} - 51 \cdot \frac{17}{12}$

$- 51 \cdot 1{,}5 + 28$

$y = \frac{12b \pm 28}{2}$

$y = 96$

$y = 45$

$36 \times 4 = 144$

$169 - 144 = 025$

$13 \cdot 10$

$51 \cdot 51 = 2601$

$2601 - 2016 = 585$

1098

$4 \cdot 4^2 \cdot 18 =$

2016

$18 \cdot 4 = 72$

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \cdot t^{\log_5 13} \geq 0$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = [\frac{x}{4}] + [\frac{1}{4y}] < 0$

$= [\frac{x}{4y}]$ $\quad x \in [4;18]$ $\quad = 0$

$y \in [1, 6]$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 \cdot 5^{\log_3(x^2 - 10x)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$t = 10x - x^2$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}) \geq 0$

$1 + \frac{4}{3}^{\log_3 t} - \frac{5}{3}^{\log_3 t} \geq 0$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$t \in (0; 1)$

$t \cdot 0 \; \frac{5}{3}^{\log_3 t} < 1$

$t = 1$

и неравенство верно

$f(t) = 1 + \frac{4}{3} \ldots$ - строго убывает по t

$= 0$ - не более 1 рш

$t = 9$ - подходит к 4 поэтому

$\frac{18 \cdot 4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28$

$8 + 28 - 34 = 2$

$28 + 8 = 36$

-102

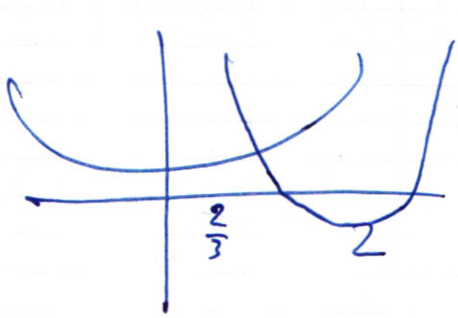
$4 \cdot 18 - 51 \cdot 2 + 28$

$72 + 28 = 100$

72

18×4 $\quad$ 36×2

1,5



$\frac{144}{25}+1-\frac{169}{25}=-1+1=0$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$ $\quad x^2-26x<0 \quad x(x-26)<0$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad 26$

$\boxed{x \in (0;26)}$

$|26x-x^2|^{\log_5 12}+\underbrace{26x-x^2}_{t} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\quad t>0$

$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}-t^{\log_5 13} \geq 0$

$a^{\log_? x}=x^{\log_? a}$

$t^{\log_5 13}\left(t^{\log_5 12-\log_5 13}+t^{1-\log_5 13}-1\right) \geq 0$

$8^{\log_2 4}=4^{\log_2 8}$

$64=4^3=64$

$\log_5 12-\log_5 13=\boxed{\log_5 \frac{12}{13}}$

$\log_5 5-\log_5 13=\log_5 \frac{5}{13}$

$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$\frac{17-1}{17}=\frac{16}{17}$

$\frac{1-\frac{\sin\alpha^2}{\cos^2}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2}}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot \cos$

$D=4+4\cdot3\cdot5=4(1+15)=4\cdot16$ $\quad \frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$\frac{2\pm8}{6}=\left[\begin{array}{l}\frac{5}{3}\\ -1\end{array}\right.$ $\quad \frac{-6}{6} \quad 8-2=6$

$D=4+3\cdot4\cdot5=4\cdot16$ $\quad \frac{-2\pm8}{10}=\left[\begin{array}{l}-1\\ \frac{6}{10}=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$(y-6)^2=y^2-12y+36$

$45\cdot 10$, $45-9=36$

$(3x-3)^2 = 9x^2-18x+9$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 9x^2-18x+9+y^2-12y+36 = 45$
$-45 \qquad -45$

$\boxed{9(x-1)^2+(y-6)^2=90}$

$\boxed{y-6x\geq 0}$

$xy-6x-y+6 = x(y-6)-1(y-6) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$78 : 3 = 26$

$\boxed{6(x-1)(y-6)=6(y-6x)^2}$

$$\left(3(x-1)+(y-6)\right)^2 = 90+6(y-6x)^2$$

$3x-3+y-6$

$3x+y-9$

$90+6(y^2-12xy+36x^2)$

$216 \cdot 9$? 1125

$(3x-y+3)^2 = 90-6y^2+72xy-36\cdot 6x^2$

$9x^2+y^2+9-6xy-6y+18x$

$-78xy+1125x^2+7y^2+81+18x-6y=0$

$3\cdot 2\cdot 13$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)