МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{2}{5}\Rightarrow$

$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\sin2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha=x\Rightarrow\cos2\alpha=\pm\sqrt{1-x^2}$

1° $\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$

$\sin^2 2\alpha+4\cos^2 2\alpha+4\sin2\alpha\cos2\alpha=1$

$3\cos^2 2\alpha+4\sin2\alpha\cos2\alpha=0$.

$3+4\,tg\,2\alpha=0$.

$tg\,2\alpha=-\frac{3}{4}$.

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$-3(1-tg^2\alpha)=8tg\alpha$

$3tg^2\alpha-8tg\alpha-3=0$.

2° $\sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1$.

$\sin^2 2\alpha+4\cos^2 2\alpha-4\sin2\alpha\cos2\alpha=1$

$3\cos^2 2\alpha-4\sin2\alpha\cos2\alpha=0$

$3-4tg2\alpha=0$

$tg\,2\alpha=\frac{3}{4}$

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$8tg\alpha=3-3tg^2\alpha$.

$3tg^2\alpha+8tg\alpha-3=0$.

$\underline{tg\alpha=y}$.

$3y^2-8y-3=0$

$y_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=$

$=3;\ -\frac{1}{3}$

$3y^2+8y-3=0$.

$y_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6}=$

$=-3;\ \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3};-3;\frac{1}{3};3$.

(2) „Продолжение"

$\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ b=-\frac{12}{5}\sqrt{10}. \end{cases}$

$\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y-1=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ x-6=-\frac{12}{5}\sqrt{10}. \end{cases}$

$\begin{cases} 2y=2 \\ x=15 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y=1-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ x=6-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}$

Ответ: $(15;1)$ и $\left(6-\frac{12}{5}\sqrt{10};\ \frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{10}\right)$.

(3)

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$x^2-10x=t$:

$|t|^{\log_3 4} \geq t+5^{\log_3 -t}$.

$\log_3(-t)$ опр., если $\underline{t<0}$, т.к. $-t>0$.

$-t^{\log_3 4} \geq t+5^{\log_3 -t}$.

$-t=u$: $\underline{u>0}$

$u+u^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 u}$

~~$3^{\log_3 u} + u^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 u}$.~~ (*) ~~$f'(u)=\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{\ln u \cdot \log_3 e} - u^c - 1\right)'$~~ (=)

~~$1+\frac{u^{\log_3 4}}{u} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 u}$~~

~~$1+u^{(\log_3 4-1)} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 u}$~~ ~~$f(u)=\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 u} - u^c - 1$, $c<1$~~

$\underline{c=\log_3 4-1}$

~~$\log_3 4-1<1 \Rightarrow$ ПЧ. растёт быстрее при увел. u.~~

~~Если $u=9$: ЛЧ $=$ ПЧ, иначе: $u>9 \Rightarrow$ ПЧ $>$ ЛЧ; иначе $u<9$: ЛЧ $>$ ЛЧ.~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4-16}{1-5} = -2+g-3$

$\log_3 4 = a \Rightarrow 3^a = 4$ $\qquad 3^a = e^b$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\log_e 4 = b \Rightarrow e^b = 4$

$\sin^2 2\alpha + 4\cos^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 1$

$3 + 4\,tg 2\alpha = 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\qquad \log_3 e = c \quad 3^c = e$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$x = \sin 2\alpha$
$\cos 2\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$x\frac{1}{\sqrt5} + \sqrt{1-x^2}\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R\cdot r}{2R}$

1° $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$. $\qquad$ 2° $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$.

$BD^2 = 2R\cdot(2R-2r)$

$x + \sqrt{1-x^2}\cdot 2 = -1$. $\qquad x - 2\sqrt{1-x^2} = -\cancel{1}$.

$2\sqrt{1-x^2} = -x-1$ $\qquad 2\sqrt{1-x^2} = x + \cancel{1}$.

(?!), $2\cdot\sqrt{1-x^2} > 0$, а

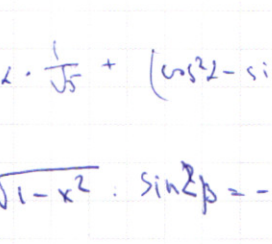
$-x-1 = -1-\sin 2\alpha < 0$, или

$\sin 2\alpha = -1$

$4(1-x^2) = x^2 + \frac{1}{5} + \frac{2}{\sqrt5}x$.

$5x^2 - 3\frac{4}{5} + \frac{2}{\sqrt5}x = 0$

$x_{1,2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt5} \pm \sqrt{\frac{4}{5} + 4\cdot5\cdot\frac{19}{5}}}{10} = \frac{-\frac{2}{\sqrt5} \pm \sqrt{76\frac{4}{5}}}{10}$



$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\left|\frac{-\frac{2}{\sqrt5} - \sqrt{76\frac{4}{5}}}{10}\right| > 1$ (?!) =

$x = \frac{-\frac{2}{\sqrt5} + \frac{\sqrt{384}}{\sqrt5}}{10} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{-2+\sqrt{384}}{10\sqrt5}$

$tg(2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(2)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$$\begin{cases} x-12y>0 \\ x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6 \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90. \end{cases}$$

$2y-1=a$

$x-6=b.$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab.} \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$$

$b^2+36a^2-12ab=ab.$ $\boxed{b>6a}$

$b^2+9a^2=90.$

$36a^2-13b\cdot a+b^2=0$ – кв. ур. отн. a.

$a_{1,2}=\frac{13b\pm\sqrt{169b^2-144b^2}}{72}=\frac{13b\pm5b}{72}=\frac{1}{9}b;\ \frac{1}{4}b.$

$b^2+9a^2=90$

1° $b^2+9\cdot(\frac{1}{9}b)^2=90$

$b^2+\frac{b^2}{9}=90$

$10b^2=810$

$b^2=81$

$b=\pm9\Rightarrow$

$a=\pm1.$

~~Подставим~~: $b\neq-9$, т.к. $b>6a$

ост. неподходит равносильно

2° $b^2+9\cdot(\frac{1}{4}b)^2=90$

$25b^2=1440$

$b^2=\frac{1440}{25}.$

$b=\pm\frac{12}{5}\cdot\sqrt{10}.\Rightarrow a=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$a=\frac{1}{4}b.$

$b>6a$, т.е. $b>\frac{3}{2}b.$

$0>\frac{1}{2}b$, $b<0$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$(a^{\ln u} - u^c - 1)' = (a^{\ln u})' - c\, u^{c-1} = a^{\ln u} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{u} - c \cdot u^{c-1} =$

$a = \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 c}$ — const.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

$= \frac{a^{\ln u}}{u} \cdot \ln a - c \cdot u^{c-1} \vee 0$?

$a^{\ln u} \cdot \ln a - c \cdot u > 0$.

$\ln a \cdot a^{\ln u} > c \cdot u$.

$1 + u^{(\log_3(4-1))} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 u}$

$u + 3^{\log_3 4 \cdot \log_3 4} \geq 5^{\log_3 u}$

$3^{\log_3 u} + 4^{\log_3 u} \geq 5^{\log_3 u}$.

$\log_3 u = n$.

$3^n + 4^n \geq 5^n$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 1$

убывает, $n\uparrow$ $n = 2$ — равенство $\Rightarrow$ хотим $n \leq 2 \Rightarrow u \leq 9 \Rightarrow -t \leq 9 \Rightarrow t \geq -9$

$0 > x^2 - 10x \geq -9$

$0 \geq x^2 - 10x \geq -9.$

1) $x^2 - 10x + 9 \geq 0.$

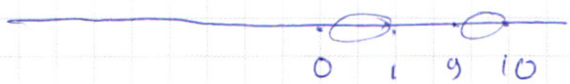
$(x-1)(x-9) \geq 0$

$x \geq 9$ или $x < 1.$

2) $0 \geq x^2 - 10x$

$0 \geq x \cdot (x-10)$

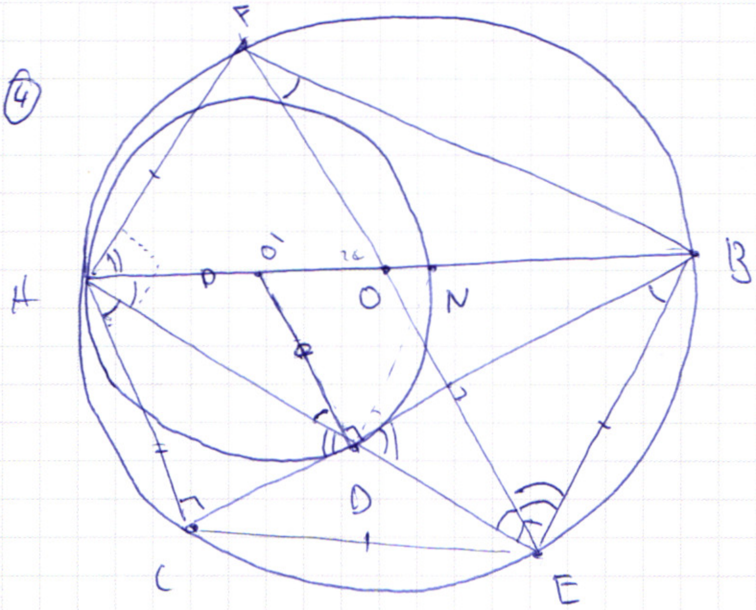
$0 \leq x \leq 10$



Ответ: $x \in [0;1] \cup [9;10).$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$BN = 2R - 2r$, где R – радиус Ω

$BA = 2R$, а r – радиус ω

$BD^2 = BN \cdot AB$.

AB – диаметр $\Omega \Rightarrow$

на AN и центр ω, т.к. ω и Ω – касаются

$\angle CAE = \angle EAB$ – лемма Архимеда. (). Док. инверсией в A.:  ☺.

$\angle CAE = \angle CBE$, и $\angle EAB = \angle EFB$.

$\angle BEF = 90^\circ - \angle DBE = 90^\circ - \angle CAD = \angle ADC = \angle BDE \Rightarrow \angle DEF = 90^\circ - \angle BDE = \measuredangle$.

$\angle FAE = \angle FAB + \angle BAE = \angle FEB + \angle DBE = 90^\circ \Rightarrow FE$ – диаметр Ω, но и AB – диаметр $\Omega \Rightarrow O$ – (точка их пересеч.) её центр.

$DO' \perp BC \Rightarrow \angle O'DA = 90^\circ - \measuredangle = \measuredangle \Rightarrow O'$ – пересеч. диаметра AN и сер. перп к хорде $AD \Rightarrow O'$ – центр ω.

$BD^2 = (2R - 2r)(2R)$

$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BO'}{AB} = \dfrac{2R - r}{2R}$ (т.к. $OO' \parallel AC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\dfrac{17^2}{4} = 4R^2 - 4Rr$.

$\dfrac{17}{32} = \dfrac{2R - r}{2R} \Rightarrow$ ($34R = 64R - 32r$) $32r = 30R \Rightarrow r = \dfrac{15}{16}R$

$17^2 = 16(R^2 - Rr) = 16R \cdot \left(R - \dfrac{15}{16}R\right) = R \cdot \dfrac{16}{16}R = R^2 \Rightarrow R = 17$, а $r = \dfrac{17 \cdot 15}{16}$.

$\angle AFE = \angle AFB - \angle EFB = 90^\circ - \angle CAD = \alpha$

$\angle AFE = 90 - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\cdot \arcsin\left(\frac{BC}{BA}\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\cdot \arcsin\left(\frac{16}{2R}\right) =$

$= 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{16}{34}\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$

$AF = EB =$ ~~E~~ (т.к. тет равными дугами

раз $CF = AF \Rightarrow AECF$ р/б трап. $\Rightarrow AE = CF$.

Из $AO = OF = OE = R$, т.к. O – центр

$S_{AFE} = \frac{1}{2}\sin\angle AOF \cdot AO\cdot OF + \frac{1}{2}\sin\angle AOE\cdot AO\cdot OE = \frac{1}{2}R^2\cdot(2\cdot\sin\angle AOF) =$

$= R^2\cdot\sin\angle AOF = R^2\cdot\sin 2\alpha = R^2\cdot\frac{CB}{AB} = \frac{R^2\cdot CB}{2R} = \frac{CB}{2}\cdot R = 8\cdot 17 = 136$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{15\cdot 17}{16}$; $\angle AFE = 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$; $S_{AFE} = 8\cdot 17 = 136$.

(5)

$f(y) = f(x) + f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) - f(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(y) < f(x)$
$f \geq 0$

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0 \Rightarrow f(2a) = f(2) + f(a) = f(a) \Rightarrow$

$f(2) = f(4) = f(8) = f(16) = f(32) \ldots = 0.$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0 \Rightarrow f(3a) = f(3) + f(a) = f(a)$

$f(3) = f(9) = f(18) = 0.$

Пусть $p: p_1 p_2 \ldots p_k$, что $f(p_i) = 0$.

$f(p) = f(p_1) + f(p_2\ldots p_k q) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3\ldots p_k q) = \ldots = \sum f(p_i) + f(q)$.

$f(2) = 0$ и $f(3) = 0 \Rightarrow$ например $f(6) = 0$, и вообще:

$f(2) = f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) = f(18) = f(24) = 0.$

$1 = f(5) = f(10) = f(15) = f(20) = \frac{1}{2}f(25)$

$1 = f(7) = f(14) = f(21)$

$f(11) = f(22) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ищем пары, что: $f(y) < f(x)$;

зн. 0: 10 чисел.

зн. 1: 7 чисел.

зн. 2: 3 числа

знач. 3: 1 число

знач. 4: 2 числа

знач. 5: 1 число

Подходит пар:

Посмотрим на пару $(x;y)$ и $(y;x)$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) - f(x)$

⇐ или $f(y)=f(x)$, или подходит одна

Всего пар:

$C_{24}^2 = 12 \cdot 23 = 276.$

Таких, что: $f(x) = f(y)$:

$C_{10}^2 + C_7^2 + C_3^2 + C_2^2 = 45 + 21 + 3 + 1 = 70.$

Осталось: $\frac{1}{2}(276 - 70) = 103$ пары.

Ответ: 103

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

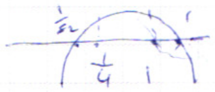
(Нумеровать только чистовики)

⑥ $\frac{16x-16}{4x-5}$ при $x<1$ >0; $x=1 \Rightarrow =0$; $1<x<\frac{5}{4}$ $<0\ldots$

$-32x^2+36x-3$

$x_{1,2}=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-12\cdot32}}{-2\cdot32}=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-12\cdot32}}{-64}=\frac{36\pm\sqrt{36^2 12\cdot32}}{64}=$

$=\frac{9\pm\sqrt{81-24}}{16}=\frac{9\pm\sqrt{57}}{16}=$ $\sqrt{57}>\sqrt{49}=7 \Rightarrow \frac{9+\sqrt{57}}{16}>1.$



$-32x^2+36x-3 \geq \frac{16x-16}{4x-5}$ $4x-5<0$, $4x<5$, $x<\frac{5}{4}$

$-128x^3+144x^2-12x+160x^2-180x+15 \leq 16x-16.$

$-128x^3+304x^2-208x+31\leq 0$

$\underset{f(x)}{\parallel}$

$f'(x)=-\underset{2^7}{3\cdot128}x^2+2\cdot\underset{2^4\cdot19}{304}x-\underset{2^4\cdot13}{208}$

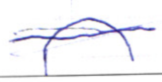
$f'(x)=2^4\cdot(-24x^2+19x-13)$

$f'(x)<0.$

$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{19^2-4\cdot24\cdot13}}{-24}$, но $19^2-(4\cdot4)\cdot24<0 \Rightarrow f'(x)$ всегда $<0. \Rightarrow$

всегда убывает $f(x)$ $f(1)=-336+335=\underline{\underline{-1}}$

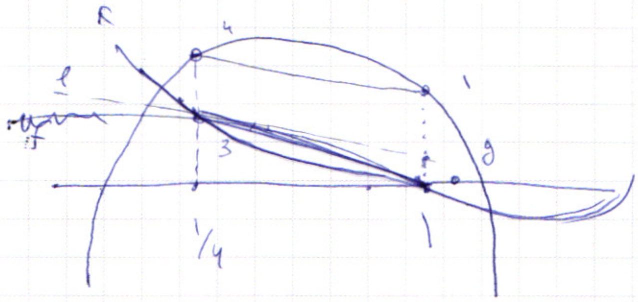
$f(\frac{1}{4})=-2+19-52+31=-54+50=\underline{\underline{-4}} \rightarrow$ всегда верн.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметки:

$f''\left(4-\frac{4}{4x-5}\right)^{*} > 0$. $x \in [1; \frac{1}{4}] \Rightarrow$:



l — касается f в $1/4$:

$l = f'(x_0)(x-x_0) + f(x) =$

$= -1\,(x-\frac{1}{4}) + 3$

При $x=1$:

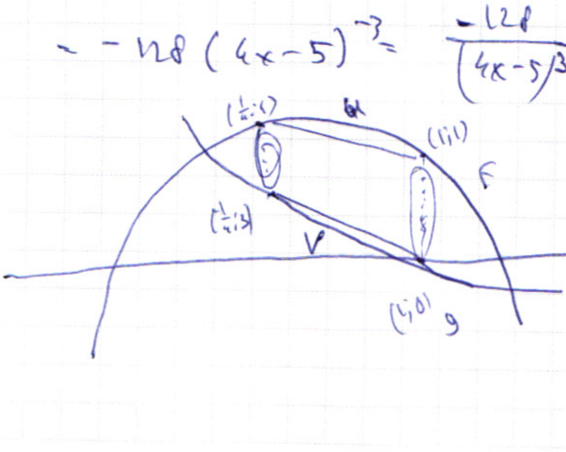
~~$l = \frac{35}{64} + 3 > g(1)$~~. $l = 3 - \frac{5}{4} = 2\frac{3}{4} > 1 = g(1)$.

$*$

$$f''\left(4-\frac{4}{4x-5}\right) = \left(-4\cdot\left(\frac{1}{4x-5}\right)'\right)' =$$

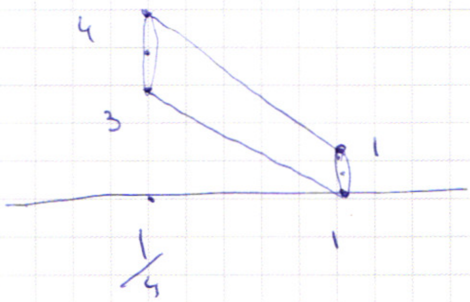
$$= \left(-4\cdot -(4x-5)^{-2}\cdot 4\right)' = \left(16\cdot(4x-5)^{-2}\right)' = 16\cdot -2\cdot(4x-5)^{-3}\cdot 4 =$$

$$= -128\,(4x-5)^{-3} = \frac{-128}{(4x-5)^3} \quad x \in [\tfrac{1}{4};1] \Rightarrow (4x-5)^3 \underline{\leq 0} \Rightarrow f''(x) \geq 0.$$



u — внизу чуть f.
v — ниже чуть g.

Прямая проходит через две точки.



Например: $(1/4; y_1)$; $(1; y_2)$:

$$\boxed{\begin{cases} 3 \le y_1 \le 4 \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{cases}}$$

$ax+b$:

$$\begin{cases} a\frac{1}{4}+b=y_1 \\ a\cdot 1+b=y_2 \end{cases}$$

$$a\cdot\frac{3}{4}=y_2-y_1$$

$$\boxed{a=\frac{4}{3}(y_2-y_1)} \Rightarrow a \text{ от } -\frac{8}{3} \text{ до } -\frac{16}{3}$$

$$\begin{cases} a+4b=4y_1 \\ a+b=y_2 \end{cases}$$

$$3b=4y_1-y_2$$

$$\boxed{b=\frac{4y_1-y_2}{3}} \Rightarrow b \text{ от } \frac{11}{3} \text{ до } \frac{16}{3}$$

Ответ: $a\in\left[-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}\right]$, $b\in\left[\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right]$.

чистовик

Страница №11