МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$ $\quad tg\,\alpha - ?$

$$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = 2\cdot\sin\frac{2a+4\beta+2a}{2}\cdot\cos\frac{2a+4\beta-2a}{2} =$$

$$= 2\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta$$

$$2\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \quad \Big| :2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2} = \frac{1+\frac{4}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{\sqrt{17}+4}{2\sqrt{17}}$$

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta = 1 \Rightarrow \sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{\sqrt{17}+4}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}$$

$\cancel{\sin(2a+2\beta) = \sin 2a\cos 2\beta + \cos 2a \sin 2\beta}$

$$tg^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}$$

$$tg\,\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}}$$

$$\sin(2a+2\beta) = \frac{2tg(a+\beta)}{1+tg^2(a+\beta)}$$

$$\frac{2tg(a+\beta)}{1+tg^2(a+\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2tg(a+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+tg^2(a+\beta))$$

Введём обозначение $tg(a+\beta) = x$

$$2x = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+x^2)\Big|\cdot(-\sqrt{17}) \Rightarrow 1+x^2 = -2\sqrt{17}x \Rightarrow x^2+2\sqrt{17}x+1=0$$

$$D = (2\sqrt{17})^2-4 = 4\cdot17-4 = 4\cdot16 = 64 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{17}\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{-2\sqrt{17}\pm 8}{2} = \pm4-\sqrt{17}.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg(a+\beta) = -4-\sqrt{17} \\ tg(a+\beta) = 4-\sqrt{17} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{tg a+tg\beta}{1-tg a\, tg\beta} = -4-\sqrt{17} \\ \frac{tg a+tg\beta}{1-tg a\, tg\beta} = 4-\sqrt{17} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

а) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = -4 - \sqrt{17}$

Для упрощения введём обозначение $4+\sqrt{17} = p$ $(p>0)$

$\sqrt{17}-4 = q$ $(q>0)$

$tg\beta = \pm\sqrt{\dfrac{q}{p}}, \quad \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = -p$

$tg\alpha + tg\beta = -p(1 - tg\alpha\, tg\beta)$

$tg\alpha + tg\beta = p\, tg\alpha\, tg\beta - p$

$tg\alpha\,(1 - p\, tg\beta) = -tg\beta - p$

$tg\alpha = \dfrac{-tg\beta - p}{1 - p\, tg\beta}$ ~~или~~

$tg\alpha = \dfrac{-\sqrt{\frac{q}{p}} - p}{1 - p\sqrt{\frac{q}{p}}} = -\dfrac{p + \sqrt{\frac{q}{p}}}{1 - \sqrt{pq}}$ или $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{\frac{q}{p}} - p}{1 + p\sqrt{\frac{q}{p}}} = \dfrac{\sqrt{\frac{q}{p}} - p}{1 + \sqrt{pq}}$

$tg\alpha = -\dfrac{4+\sqrt{17} + \sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}}}{1 - \sqrt{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}} =$

$= -\dfrac{4+\sqrt{17} + \sqrt{\frac{(\sqrt{17}-4)^2}{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}}}{1 - \sqrt{17-16}} = -\dfrac{4+\sqrt{17} + \sqrt{\frac{(\sqrt{17}-4)^2}{17-16}}}{0}$

— не существует

$tg\alpha = \dfrac{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}} - (\sqrt{17}+4)}{1 + \sqrt{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}} =$

$= \dfrac{\sqrt{\frac{(\sqrt{17}-4)^2}{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}} - (\sqrt{17}+4)}{1 + \sqrt{17-16}} =$

$= \dfrac{\sqrt{\frac{17 - 8\sqrt{17} + 16}{17-16}} - (\sqrt{17}+4)}{2} =$

$= \cancel{\sqrt{33 - 8\sqrt{17}} - (\sqrt{17}+4)}$

$\dfrac{\sqrt{17} - 4 - (\sqrt{17}+4)}{2} =$

$= -4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

д) $\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = 4 - \sqrt{17}$

$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = -q$

$tg\alpha + tg\beta = -q(1 - tg\alpha\, tg\beta)$

$tg\alpha + tg\beta = q\, tg\alpha\, tg\beta - q$

$tg\alpha(1 - q\, tg\beta) = -tg\beta - q$

$tg\alpha = -\frac{tg\beta + q}{1 - q\, tg\beta}$

$tg\alpha = -\frac{\sqrt{\frac{q}{p}} + q}{1 - q\sqrt{\frac{q}{p}}}$ или $tg\,\alpha = -\frac{-\sqrt{\frac{q}{p}} + q}{1 - q\sqrt{\frac{q}{p}}} = \frac{\sqrt{\frac{q}{p}} - q}{1 - q\sqrt{\frac{q}{p}}}$

$tg\alpha = -\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}} + \sqrt{17} - 4}{1 - (\sqrt{17} - 4)\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}}} =$

$= -\frac{\sqrt{17} - 4 + \sqrt{17} - 4}{1 - (\sqrt{17} - 4)(\sqrt{17} - 4)} =$

$= -\frac{2(\sqrt{17} - 4)}{1 - (33 - 8\sqrt{17})} =$

$= -\frac{2(\sqrt{17} - 4)}{32 + 8\sqrt{17}} = -\frac{2}{8}\frac{\sqrt{17} - 4}{\sqrt{17} + 4} =$

$tg\alpha = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}} - (\sqrt{17} - 4)}{1 - (\sqrt{17} - 4)\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}}} =$

$= \frac{(\sqrt{17} - 4) - (\sqrt{17} - 4)}{1 - (\sqrt{17} - 4)(\sqrt{17} - 4)} = 0$

$= -\frac{33-8\sqrt{17}}{\cancel{4}\cdot 4} =$

$= \frac{8\sqrt{17}-33}{4}$

Ответ: $0;\ \frac{8\sqrt{17}-33}{4};\ 4$

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$+ \quad -6 \quad - \quad 0 \quad +$

$\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

На ОДЗ $|x^2+6x| = x^2+6x$

Введём подстановку $x^2+6x = t$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5} \quad |:t$

$\cancel{1 + t^{1-\log_4 3} \geq t^{\log_4 5 - 1}}$

$\cancel{1 + t^{\log_4 4 - \log_4 3} \geq t^{\log_4 5 - \log_4 4}}$

$\cancel{1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}}$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq t^{\log_4 5 - 1}$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\log_4 \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow t^{\log_4 \frac{3}{4}}$ убывает

$\log_4 \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ возрастает

Т.к. обе части непрерывны на $t \in (0;+\infty)$, равенство выполняется только при одном t

Подбором находим $t = 16$

Тогда неравенство выполняется при $t \in (0;16]$

$0 < x^2+6x \leq 16$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty) \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D = 36 - 4\cdot(-16) = 100 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5$ $\quad x_1 = -8$, $x_2 = 2$

$+ \quad - \quad +$; $-8 \quad 2$

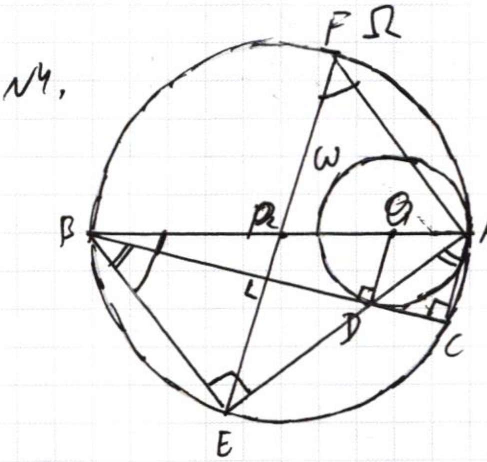
~~$x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$~~

$x \in [-8; 2]$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in \cancel{(-\infty; -8] \cup [2; +\infty)}\ [-8; 2] \end{cases} \rightarrow$ ~~$x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$~~ $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$

№4.



Дано:

Ω, ω — окружн., кас. внутр. образом

$\Omega \cap \omega = (\cdot)A$

AB — диаметр Ω, BC — хорда Ω

BC — кас. ω, $BC \cap \omega = (\cdot)D$

$AD \cap \Omega = (\cdot)E$, $EF \perp BC$.

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

R_ω — ? $\quad R_\Omega$ — ? $\quad \angle AFE$ — ? $\quad S_{AEF}$ — ?

Решение:

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр

Обозначим центры окружностей ω и Ω как O и P соотв.

По св. касательной $OD \perp BC \Rightarrow OD \parallel AC$.

$\angle B$ — общий для $\triangle BOD$ и $\triangle BAC \Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle BAC$ по I призн.

$$\frac{BO}{BA}=\frac{OD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{BD+CD}=\frac{13/2}{13/2+5/2}=\frac{13}{18}$$

$OD=R_\omega$, и пусть $AC=x$.

$$\frac{R_\omega}{x}=\frac{13}{18}\Rightarrow R_\omega=\frac{13}{18}x$$

По т. Пифагора в ΔBAC

$BA^2=BC^2+AC^2\Rightarrow$

$BC=BD+CD=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9 \Rightarrow BA^2=81+x^2$

$BA=\sqrt{81+x^2}$

$BO=BA-OA=\sqrt{81+x^2}-R_\omega$

$$\frac{\sqrt{81+x^2}-R_\omega}{\sqrt{81+x^2}}=\frac{13}{18}$$

$$\sqrt{81+x^2}-\frac{13}{18}x=\frac{13}{18}\sqrt{81+x^2}$$

$$\frac{5}{18}\sqrt{81+x^2}=\frac{13}{18}x \quad |\cdot 18 \uparrow 2$$

$$25(81+x^2)=169x^2$$

$$25\cdot 81=144x^2\Rightarrow x^2=\frac{25\cdot 81}{144}\Rightarrow x=\pm\frac{5\cdot 9}{12}=\pm\frac{15}{4}$$

$x=\frac{15}{4}$, т.к. $x>0$

$$R_\omega=\frac{13}{18}\cdot\frac{15}{4}=\frac{65}{24}$$

$$BA=2R_\Omega \Rightarrow R_\Omega=\frac{1}{2}\sqrt{81+x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{81+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{81+\frac{225}{16}}=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{9+\frac{25}{16}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{144+25}{16}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{3\cdot 13}{2\cdot 4}=\frac{39}{8}$$

В прямоугольном ΔABC $\sin ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{x}{2R_\Omega}$

$$\sin ABC=\frac{15/4}{2\cdot 39/8}=\frac{5}{13}$$

$$\cos ABC=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{2R_\Omega}$$

$$\cos ABC=\frac{9}{2\cdot 39/8}=\frac{12}{13}.$$

$\angle CBE=\angle CAE$ как впис. углы, опир. на одну дугу

В прямоугольном ΔACD $\operatorname{tg} CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{x}$

$$\operatorname{tg} CAD=\frac{5/2}{15/4}=\frac{2}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1+tg^2 CAD = \frac{1}{\cos^2 CAD} \Rightarrow \cos CAD = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2 CAD}}$

$\cos CAD = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\sin CAD = tg\, CAD \cdot \cos CAD = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos CBE = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \sin CBE = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\angle ABE = \angle ADC + \angle CBE \to \cos ABE = \cos(ABC + CBE) =$

$= \cos ABC \cdot \cos CBE - \sin ABC \cdot \sin CBE =$

$= \frac{12}{13}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{13} - \frac{5}{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13} =$

$\cancel{= \frac{39\sqrt{13}}{13\cdot 13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}} \quad \frac{26\sqrt{13}}{13\cdot 13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\sin ABE = \sqrt{1-\cos^2 ABE} = \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\angle AFE = \angle ABE$ как впис. углы, опир. на одну дугу

$\angle AFE = \cancel{\arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13}}\ \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\angle BEA = 90^\circ$, т.к. опир. на диаметр

В прямоугольном ΔABE $\sin ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{2R_{\text{л}}}$

$AE = 2R_{\text{л}} \sin ABE = \cancel{2}\cdot\frac{\cancel{39}^{3}}{\cancel{8}_{4}}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{\cancel{13}_{1}} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

В ΔACD и ΔDEG, где $(\cdot)G = BC \cap EF$

$\angle ACD = \angle DGE = 90^\circ$, $\angle ADC = \angle GDE$ как верт.

$\Delta ACD \sim \Delta DEG$ по I призн. $\Rightarrow \angle GED = \angle CAD = \angle CBE$

$\sin AEF = \sin CBE = \frac{2\sqrt{13}}{13}$. $\quad \cos AEF = \cos CBE = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

По т. синусов в ΔAFE

$$\frac{AF}{\sin AEF} = \frac{AE}{\sin AFE} \Rightarrow AF = AE \cdot \frac{\sin AEF}{\sin AFE} = \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{13}/13}{3\sqrt{13}/13} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

~~По т. косинусов в ΔAFE~~

$$\cancel{AF^2 = EF^2 + AE^2 - 2 \cdot EF \cdot AE \cdot \cos AEF}$$

$$\cancel{\left(\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2 = EF^2 + \left(\frac{9\sqrt{13}}{4}\right)^2 - 2 \cdot EF \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13}}$$

$$\cancel{\frac{9 \cdot 13}{4} = EF^2 + \frac{81 \cdot 13}{16} - \frac{27 \cdot 13}{13 \cdot 2} EF}$$

$$\cancel{EF^2 - \frac{27}{2} EF + \frac{45 \cdot 13}{16} = 0 \quad | \cdot 16}$$

$$\cancel{EF^2 - 216\, EF +}$$

$$\angle EAF + \angle AFE + \angle AEF = 180° \Rightarrow \angle EAF = 180° - \angle AFE - \angle AEF$$

$$\sin EAF = \sin(180° - (\angle AFE + \angle AEF)) = \sin(\angle AFE + \angle AEF) =$$

$$= \sin AFE \cdot \cos AEF + \cos AFE \cdot \sin AEF = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} =$$

$$= 1 \Rightarrow \angle EAF = 90°$$

ΔAEF – прямоугольн.

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$$

Ответ: $R_\omega = \frac{65}{24}$; $R_\Omega = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$S_{AFE} = \frac{351}{16}$.

№5. $f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = [p/4]$, p простое, $D(f) = \mathbb{Q}^+$

При $b = 1$ получим $f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(a/a) = f(a) + f(1/a)$ для $a \in N$

$f(a) + f(1/a) = 0 \Rightarrow f(1/a) = -f(a)$

$f(x/y) = f(x) + f(1/y) = f(x) - f(y)$

$f(x/y) < 0 \rightarrow f(x) < f(y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что все натуральные числа n от 3 до 27 можно представить как произведение простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Подсчитаем значения функции для этих чисел

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Пусть $x = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} 11^{\alpha_{11}} 13^{\alpha_{13}} 17^{\alpha_{17}} 19^{\alpha_{19}} 23^{\alpha_{23}}$

$y = 2^{\beta_2} 3^{\beta_3} 5^{\beta_5} 7^{\beta_7} 11^{\beta_{11}} 13^{\beta_{13}} 17^{\beta_{17}} 19^{\beta_{19}} 23^{\beta_{23}}$

$f(x) = \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(3) + \alpha_5 f(5) + \alpha_7 f(7) + \alpha_{11} f(11) + \alpha_{13} f(13) + \alpha_{15} f(15) +$
$+ \alpha_{17} f(17) + \alpha_{19} f(19) + \alpha_{23} f(23) =$
$= \alpha_5 + \alpha_7 + 2\alpha_{11} + 3\alpha_{13} + 4\alpha_{17} + 4\alpha_{19} + 5\alpha_{23}$

$f(y) = \beta_5 + \beta_7 + 2\beta_{11} + 3\beta_{13} + 4\beta_{17} + 4\beta_{19} + 5\beta_{23}$

При этом $0 \le \beta_5, \beta_7 \le 2$, а остальные равны 0 или 1, причём от нуля отличается только одно из чисел α_i $(i = 5, 7, 11, \dots, 23)$ и одно из чисел β_i $(i = 5, 7, 11, \dots, 23)$, т.к. $x \le 27$, $y \le 27$, а $5 \cdot 7 = 35 > 27$.

$f(y) - f(x) = \beta_5 - \alpha_5 + \beta_7 - \alpha_7 + 2(\beta_{11} - \alpha_{11}) + \dots + 5(\beta_{23} - \alpha_{23})$

Т.к. не более одного числа $\alpha_i \neq 0$ и не более одного $\beta_i \neq 0$, $f(y) - f(x) > 0$ только если $\beta_5 = 2$, $\alpha_5 = 1$, или какое-то $\beta_i = 1$ и все $\alpha_i = 0$.

Теперь можем подсчитать $f(x)$ для всех $x \in [3;27]$, $x \in \mathbb{N}$

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(x)$	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	1	5	0	2	1	0

– При $y = 23$, $f(y) = 5$ для всех $x \neq 23$ $f(x) < f(y)$ (т.к. для них $f(x) < 5$)

Это даёт 23 пары.

– При $y = 17$ или 19, $f(y) = 4$ для всех $x \neq 17, 19, 23$ $f(x) < f(y)$

Это даёт $2 \cdot 21 = 42$ пары.

– При $y = 13$, $f(y) = 3$ для всех $x \neq 13, 17, 19, 23$ $f(x) < f(y)$

Это даёт 20 пар

– При $y = 11$ или 25, $f(y) = 2$ для всех $x \neq 11, 13, 17, 19, 23, 25$ $f(x) < f(y)$

Это даёт $2 \cdot 18 = 36$ пар

– При $y = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 22$, $f(y) = 1$ для всех x таких, что $f(x) = 0$ $f(x) < f(y)$

Это даёт $8 \cdot 9 = 72$ пары

Всего получаем $23 + 42 + 20 + 36 + 72 = 193$ пары

Ответ: 193 пары

№6. $\dfrac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$ $\qquad x \in (1;3]$

а) $8x^2 - 34x + 30 \leq ax + b$

$8x^2 - (34 + a)x + 30 - b \leq 0.$

Отметим, что т.к. старший коэф. больше 0, значение левой части не больше 0 на не более чем одном непрерывном промежутке

Тогда достаточно проверить выполнение условия для $x = 1$ и $x = 3$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=1$: $8-(34+a)+30-b\le 0 \Rightarrow -(a+b)\le -4$

$a+b\geqslant 4$

$x=3$: $8\cdot 3^2-(34+a)\cdot 3+30-b\le 0\Rightarrow$

$72-102-3a+30-b\le 0\Rightarrow 3a+b\geqslant 0$

$\begin{cases} a+b\geqslant 4 \\ 3a+b\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow 2a\geqslant -4 \Rightarrow a\geqslant -2$

б) $ax+b\le \dfrac{4x-3}{2x-2}$

При $x\in[1;3]$ $2x-2>0 \Rightarrow$ можно умножить обе части без перемены знака

$(ax+b)(2x-2)\le 4x-3$

$2ax^2-2ax+2bx-2b\le 4x-3$

$2ax^2+(2b-2a-4)x+3-2b\le 0$

Если $a>0$, достаточно проверить $x=1$ и $x=3$ аналогично п.а.

$x=1$: $2a+(2b-2a-4)+3-2b\le 0$

$-1\le 0$ — верно.

$x=3$: $2a\cdot 3^2+(2b-2a-4)\cdot 3+3-2b\le 0$

$18a+6b-6a-12+3-2b\le 0$

$9a+4b\le 9$

~~С учётом $a>0$ получим $4b\le 9$~~ $\Rightarrow b\le\frac{9}{4}$.

С учётом $3a+b\geqslant 0$ из п.а получим:

$\begin{cases} 9a+4b\le 9 \\ -9a-3b\le 0\end{cases}$; $b\le 9$

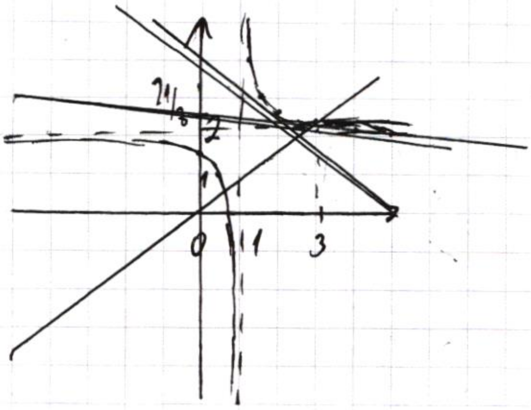
$\begin{cases} 9a+4b\le 9 \\ -9a-9b\le 0\end{cases}$; $-5b\le 9 \Rightarrow b\geqslant \frac{9}{5}$.

$\begin{cases} 9a+4b\le 9 \\ -4a-4b\le 0\end{cases}$; $5a\le 9 \Rightarrow a\le\frac{9}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

График левой части — некоторая прямая.

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$$ — график — гипербола.



~~При~~ / ~~некоторых~~ $в_0$

Как видно, для любого в существует предельное а такое, что при меньших значениях условие выполняется, а при бо́льших — нет.

При в меньше некоторого $в_0$ оказывается достаточным, чтобы прямая пересекала верхнюю ветвь гиперболы в точке $x \geq 3$, при ~~меньших~~ бо́льших в нужно, чтобы прямая не пересекала ~~гиперболы~~ верхнюю ветвь или только касалась её.

~~П~~Граничное в — такое, что прямая касается гиперболы в точке $x=3$.

$$\left(2+\frac{1}{2x-2}\right)' = \frac{1}{2}\left((x-1)^{-1}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(-(x-1)^{-2}\right) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$a = -\frac{1}{2(3-1)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$-\frac{1}{8}\cdot 3 + в = в - \frac{3}{8}$$

$$2 + \frac{1}{2\cdot 3-2} = \frac{9}{4} \Rightarrow в - \frac{3}{8} = \frac{9}{4} \Rightarrow в = \frac{9}{4} + \frac{3}{8} = \frac{21}{8}$$

При $в < \frac{21}{8}$ ~~ограничение~~ / ~~принимает~~ вид

~~а~~ наибольшее а — такое, что прямая пересекает верхнюю ветвь в точке $x=3$.

$$3a + в = \frac{9}{4} \Rightarrow a \leq \left(\frac{9}{4} - в\right) : 3 = \frac{3}{4} - \frac{в}{3}.$$

При $в > \frac{21}{8}$ наибольшее а — такое, что прямая касается гиперболы.

$2+\frac{1}{2x-2}$ $\frac{4x-3}{2x-2} \leq ax+в \Rightarrow 4x-3 = (ax+в)(2x-2)$

$2ax^2 + (2в - 2a - 4)x + 3 - 2в \leq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 12
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\frac{1}{2(x-1)^2}=a \Rightarrow (x-1)^2=-\frac{1}{2a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1$$

(берём больший x)

$$a\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1\right)+b\le 2+\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}+1\right)-2}$$

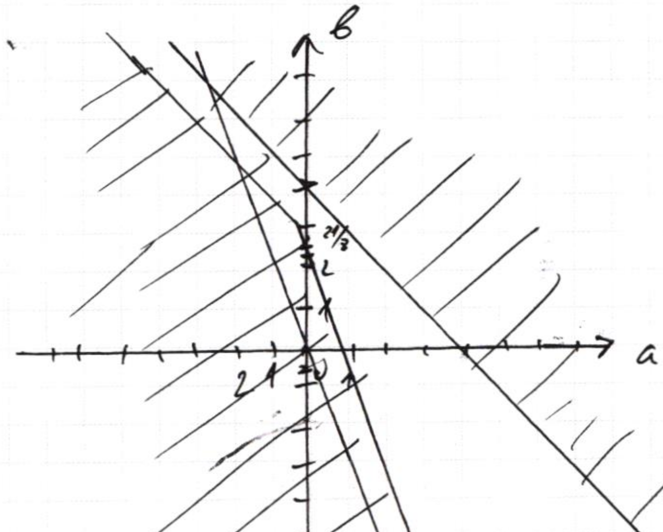
$$\sqrt{-\frac{a}{2}}+a+b\le 2+\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{a}}} \Rightarrow \sqrt{-\frac{a}{2}}+a+b\le 2+\sqrt{-\frac{a}{2}}$$

$$a+b\le 2$$

$$a\le 2-b$$

В итоге получаем систему:

$$\begin{cases} a+b\ge 4 \\ 3a+b\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b<\frac{21}{8} \\ a\le\frac{3}{4}-\frac{b}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} b>\frac{21}{8} \\ a\le 2-b \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\ge 4-a \\ b\ge -3a \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\le\frac{21}{8} \\ b\le\frac{9}{4}-3a \end{cases} \\ \begin{cases} b>\frac{21}{8} \\ b\le 2-a \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



Пересечение отсутствует

Ответ: пар нет.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\, 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

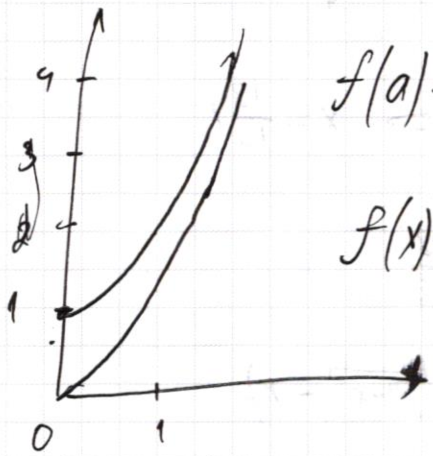
$f(2a) = f(a) + f(2)$

$y = 23$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2 a - 1 = \dfrac{2}{1+tg^2 a} - 1 = \dfrac{2-1-tg^2 a}{1+tg^2 a} = \dfrac{1-tg^2 a}{1+tg^2 a}$

$f(x/y) = f(x) + f(1/y)$

$f(x) < f(y)$



$f(a) = f(a) + f(1)$

23

$\left(\frac{5}{4}\right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k = 1$

$f(x) - f(y) < 0$

$\log_4 \frac{3}{4}$

$-\frac{1}{2} \cdot 2$

$4^{k \log_4 \frac{3}{4}}$

$f(a/a) = f(a) + f(1/a) = 0$

$1 + t^{\log_4 \frac{3}{5}} = t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^k$

$f(1) = 0$

$t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{4}{3}}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{9}{16} + 1 =$

~~$f(0) = f(0) + f(a)$~~

$t^{\log_4 \frac{4}{3} \cdot \frac{5\cdot 3}{16}} = t^{\log_4 \frac{4}{3}} \cdot t^{\log_4 \frac{15}{16}}$

$f(1) \le 0$

$f(3) < 0$

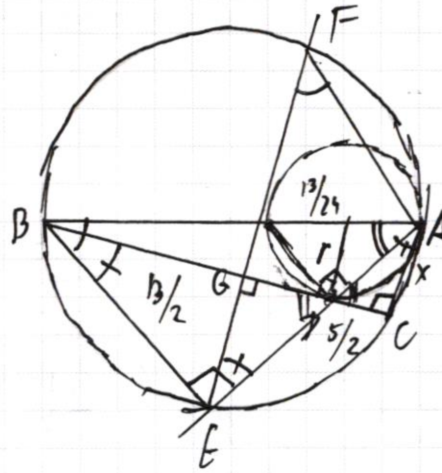
$1 = t^{\log_4 \frac{4}{3}} \cdot \left(t^{\log_4 \frac{15}{16}} - 1\right)$

$f(1/a) = -f(a)$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} = t^{\log_4 \frac{15}{16}} - 1$

$2x^2 - (34+a)x + 30 - 8 \le 0$

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	[illegible]	0	3	1	1	1	5	0	2	1	0



$\frac{13}{18}\cdot\frac{15}{4}=$

$\frac{15}{4}\approx 3{,}75$

$\frac{r}{x}=\frac{13}{18}$

9 4

$\sqrt{81+x^2}\cdot\left(\sqrt{81+x^2}-2r\right)=\frac{169}{4}$ $9^2+4^2=$

$81+16=97$

≈ 10

≈ 5

$\sqrt{81+x^2}\left(\sqrt{81+x^2}-\frac{13}{9}x\right)=\frac{169}{4}$

$\sqrt{81+x^2}\approx 9$

$\frac{r}{x}=\frac{13}{18} \Rightarrow x=\frac{18}{13}r$

$R=\frac{9\sqrt{194}}{26}$ $\frac{\sqrt{81+x^2}}{\sqrt{81+x^2}-r}=\frac{18}{13}$

$\sqrt{81+x^2}=\frac{18}{13}\left(\sqrt{81+x^2}-r\right)$

$\begin{array}{r|l}194 & 2\\ 97 & \end{array}$ $\frac{5}{13}\sqrt{81+x^2}=\frac{18}{13}r=x$ $\uparrow 2$

$45\cancel{13}$
$\times 13$

$\frac{25}{169}\cdot(81+x^2)=x^2$

$27\cdot 13$, $\cdot 81$, $+27$, $=351$

$169-25=144$

$x=\frac{45}{12}$

$2R=\sqrt{81+\frac{25\cdot 81}{169}}=$

$=9\sqrt{\frac{169+25}{169}}$

$=\frac{9\sqrt{194}}{13}$

$\frac{144}{169}x^2=\frac{25\cdot 81}{169}$

$\frac{12}{13}x=\pm\frac{5\cdot 9}{13}$

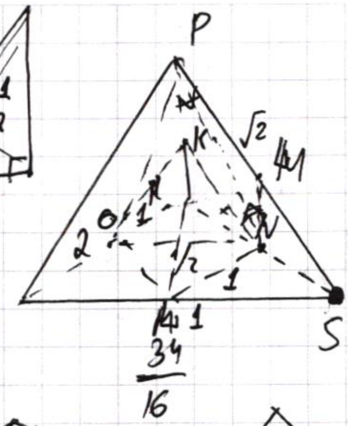
$x=\pm\frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{12}_4}$

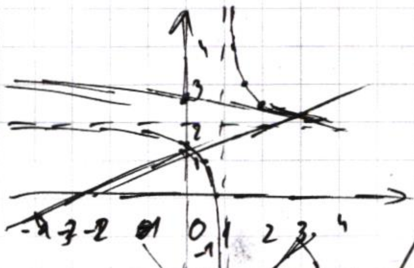
$r=\frac{\cancel{45}^5}{12}\cdot\frac{13}{\cancel{18}_2}=$

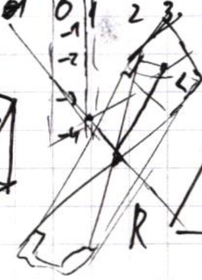
$=\frac{13}{24}$

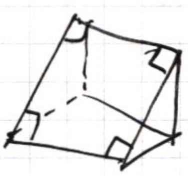
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

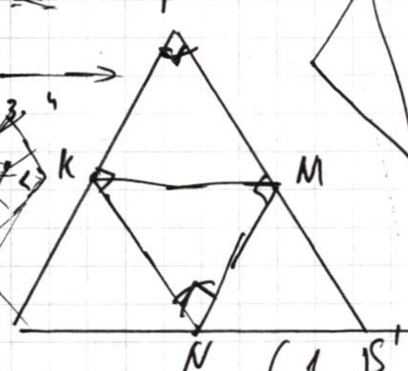
$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

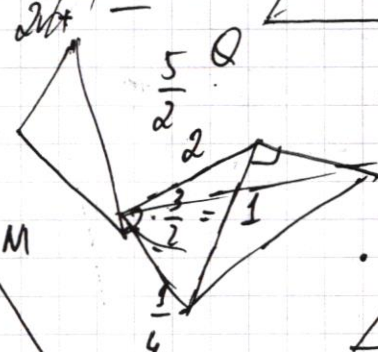


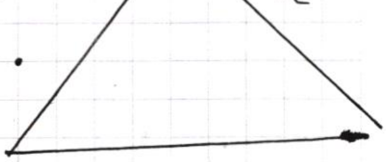












$x^2 - 2\cdot 17x +$

$$\left(\frac{1}{2(x-1)}\right)' = \left(\frac{1}{2}(x-1)^{-1}\right)' = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} =$$

$$\frac{5}{4} - \cos\beta = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2(x-2)^2}$$

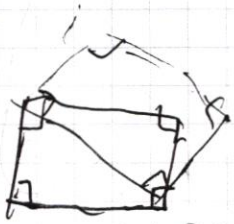
$$3a+b = \frac{9}{4}$$

$$1 + \frac{1}{4} - \cos\beta = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$\frac{5}{2} - 2\cos\beta = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$a = \frac{\frac{9}{4} - b}{3} = \frac{3}{4} - \frac{b}{3}$$

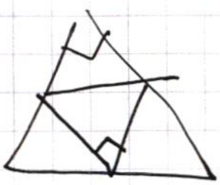
$$b \le \frac{15}{4}$$



$$-\frac{1}{2}$$

$2(4x^2 - 17x$

PQ⊥RS

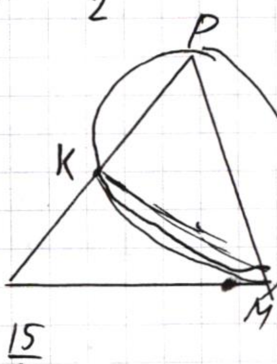


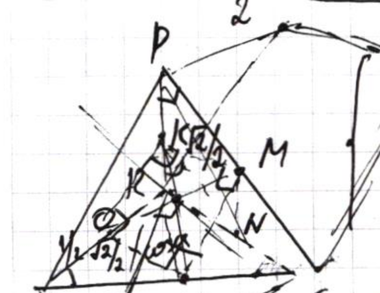
$$-\frac{1}{2}x + b =$$

PQ⊥RS

∠RPS=90°

$$-\frac{3}{2} + b = \frac{9}{4}$$

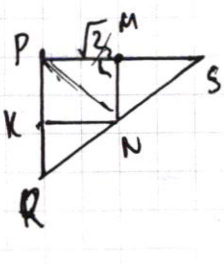




$$a \le \frac{3}{4} - \frac{b}{3}$$

$$b \le \frac{15}{4}$$

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

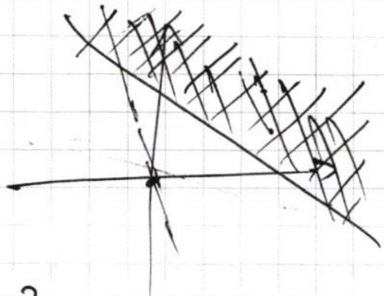


$$b \le \frac{9}{4} - \frac{9}{4}a$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y =$$

$$b \ge 4 - a$$

$$9a + 4b \le 9$$



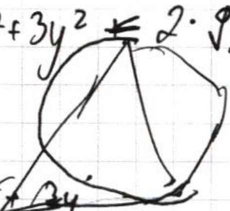
$$= 3x^2 + 3y^2 -$$

$$b \ge -3a$$

$$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$$

$$3y - 2x \ge 0$$

$$3x^2 + 3y^2 = 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3}y \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4$$



$$3x^2 + 3y^2 = 4 + 6x + 4y$$

$$9y^2 - 15xy + 4x^2 = -2x - 3y + 2 \quad | \cdot 2$$

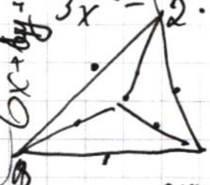
$$18y^2 - 30xy + 8x^2 = -4x - 6y + 4$$

$$3x^2 + 3y$$

$$3x^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}x + 3 + 3y^2 - 2 \cdot y\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{25}{4}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y + 4 \ge 0$$

$$3xy - 2x - 3y + 2 \ge 0$$



$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \le 0$$

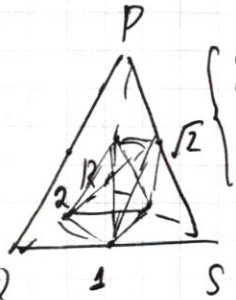
$$-2x - 3y + 2$$

$$-3x - 2y - 2$$

$$3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$2 \cdot 2$$

$$2 \cdot 3$$



$$\begin{cases} 9y^2 - 12xy + 4x^2 \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{12} \end{cases}$$

$$\frac{13}{3} + 4 = \frac{25}{4}$$

$$\left(x\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(y\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$2 \cdot \sqrt{17} \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 30xy + 18y^2 - 4 = -4x - 6y \quad (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{12} \\ 4 - 3x^2 - 3y^2 = -6x - 4y \end{cases}$$

$$11x^2 - 30xy + 21y^2 + 8 = 2x - 2y$$

$$9y^2 - 30xy + 25x^2 =$$

$$(3y - 5x)^2 = -(3y+1)^2 + \left(x\sqrt{17} - \frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + \frac{81}{17}$$

$$= -9y^2 - 6y - 1 + 17x^2 -$$

$$\cancel{\left(1; \frac{2}{3}\right) \quad R = \frac{5\sqrt{3}}{6}}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) = 11x^2 - 30xy + 21y^2 + 8 \\ 2(x+y) = -x^2 + 6xy - 3y^2 \end{cases}$$

$$17\left(x - \frac{2}{17}\right)^2 - (3y+1)^2 + \frac{81}{17} = -4x + \frac{4}{17} + \frac{81}{17}$$

$$= (3y - 5x)^2$$

$$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 30xy + 18y^2 - \cancel{4} = -4x - 6y \\ \cancel{4} - 3x^2 - 3y^2 = -6x - 4y \end{cases}$$

$$4x^2 - 15xy + 9y^2 = -2x - 3y + 2$$

$$\frac{4}{17} - 1 = -\frac{13}{17}$$

$$\frac{4 - 3x^2 - 3y^2}{2} = -3x - 2y.$$

$$\frac{13}{17} + 4 = \frac{81}{17}$$

$$5x^2 - 30xy + 15y^2 = -10(x+y)$$

$$x^2 - 6xy + 3y^2 = -2(x+y)$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 4 \\ \hline 68 \\ + 13 \\ \hline 81 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

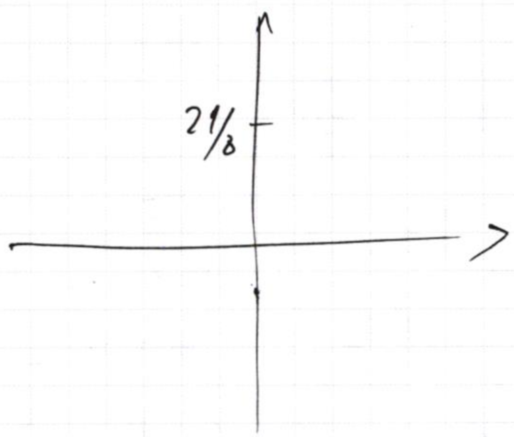
$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$(3-2b)=0$

$D=(2b-2a-4)^2-4\cdot 2a\cdot(3-2b)=0$

$ax+b$



$\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$

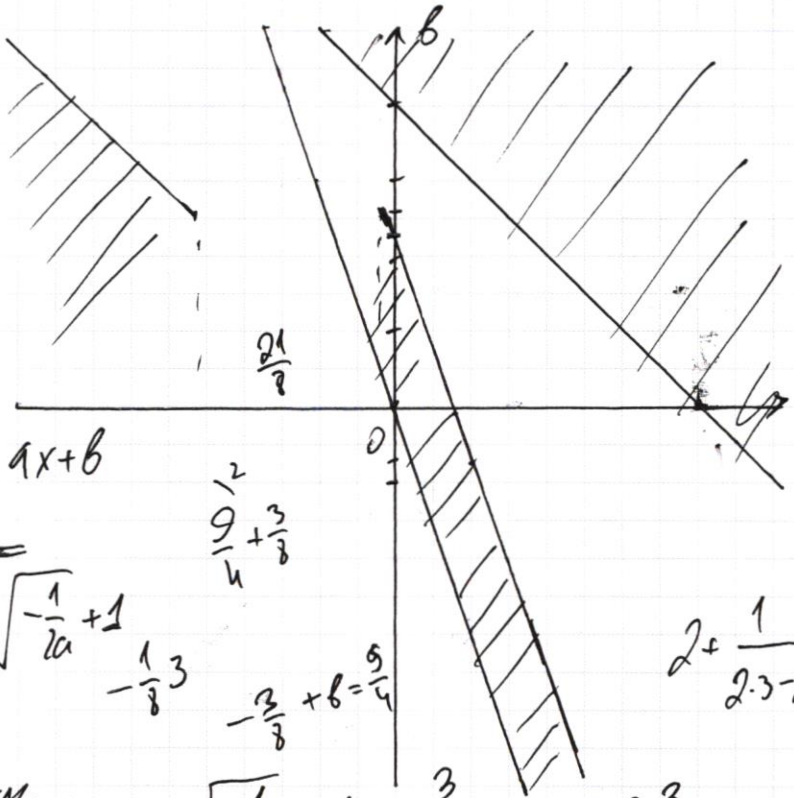
Дл..

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$b \geq 4-a$

$b \geq -3a - (x-1)^{-2}$

$\frac{1}{2(x-1)^{-1}}$

$-\frac{1}{2(x-1)^2}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = ax+b$

$\frac{9}{4}^2+\frac{3}{8}$

$x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1$

$-\frac{1}{8}3$

$-\frac{3}{8}+b=\frac{9}{4}$

$2+\frac{1}{2\cdot 3-2} = 2^4+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$-\frac{1}{8}$

$a \leq \frac{3}{4}-\frac{b}{3}$

b

$\sqrt{+\frac{1}{2}}+1 = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$

$2\frac{3}{2}-2=1$

$\frac{b}{3} \leq \frac{3}{4}-a$

$a+b \geq$

$\frac{21}{8}$

3

$-\frac{1}{8}$

$2+\frac{21}{8} = -\frac{5}{8}$

$b \leq \frac{9}{7}-3a$

$a=-b$

$-\frac{1}{8} \leq x-\frac{21}{8}$

$\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$

$ax+b \leq$

$\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8}$

3

$-2\cdot\frac{3}{2}$

$\sqrt{-\frac{a}{2}}+a\cdot b = -\sqrt{-\frac{a}{2}}$

$2^2-\frac{21}{8}$

$-\frac{1}{8}$

2

$-3+1=3$

$a+b \leq 2$

$a=-b$

$-\frac{5}{8}$

$a \leq -b$

$-\frac{1}{2a} = (x-1)^2$

$\frac{3}{4}^2-\frac{7}{8}$

$\frac{3}{4}-\frac{b}{3}$

$b \leq -a - \frac{1}{2(x-1)^2} = a\sqrt{-\frac{a}{2}}$

$b=6$

$x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1$

$-\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{2(x-1)^2}=a$

$a\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1\right)+b = -\frac{1}{2\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)-2}$

$2^8-\frac{21}{8}$

$-\frac{5}{8}$

$x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1$

$-\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{a}}} = -\sqrt{-\frac{a}{2}}$

$a\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1\right)+b \leq 2+\frac{1}{2\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}+1-2\right)}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)