МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

+ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

√3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

+ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

√6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

(1) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

(2) $\sin(2\alpha+2\beta) = \underline{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Подставим а) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

~~sin~~

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + 8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \cancel{-\sin^2\alpha} + \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha(\cos\alpha + 4\sin\alpha) = 0$

По усл. $tg\,\alpha$ определен, зн. $\cos\alpha \neq 0$. Сократим:

$\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\,tg\,\alpha = 0 \Leftrightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

б) $\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - (\cancel{\sin^2\alpha}\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha(\sin\alpha + 4\cos\alpha) = 0$

см. далее

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \sin\alpha + 4\cos\alpha = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ tg\,\alpha + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -4 \end{array}\right.$$

$\sin\alpha = 0$ означает, что $tg\,\alpha = 0$

Т.о. мы получили 3 значения тангенса:

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$; $tg\,\alpha = -4$; $tg\,\alpha = 0$

Ответ: $tg\,\alpha \in \{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$

N 3)

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} \quad (☆)$$

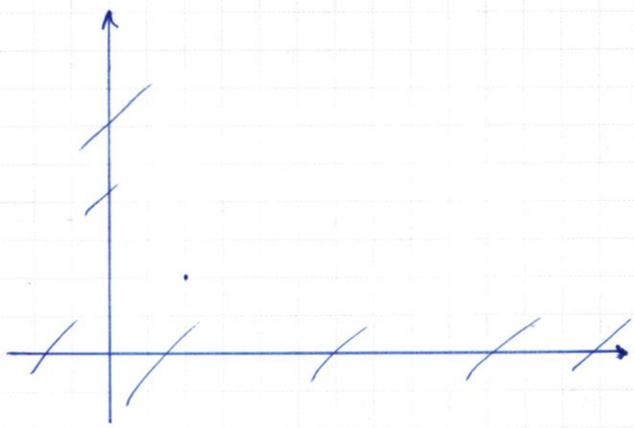
модуль можно убрать т.к. x^2+6x стоит под логарифмом в правой части, а зн. $x^2+6x>0$.

Пусть $x^2+6x = a$, $a>0$. Тогда (☆) примет вид:

$$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$$

Рассмотрим $f(a) = 3^{\log_4 a} + a$; $g(a) = a^{\log_4 5}$

Обе ф-ции монотонно возрастают на области определения. Рассмотрим их графики: (см. далее)



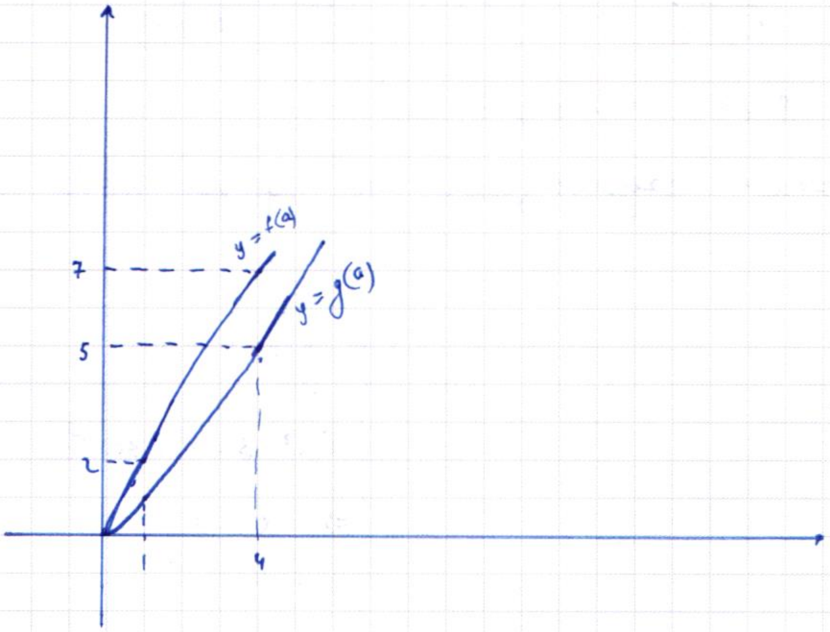
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(a)$ и $g(a)$ - монотонно возрастающие, а зн. ур-ие $f(a) = g(a)$ имеет не более одного корня.

$$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 3^{\log_4 a} + a = a^{\log_4 5}$$

Очевидный корень $a = \cancel{25}\ 16$ $\left(3^2 + 16 = (4 \cdot 4)^{\log_4 5}\right)$

$(25 = 25$ (ист.))

Т.о. получаем, что $f(a) \geq g(a) \Leftrightarrow 0 < a \leq 16$

Зн. (*) $\Leftrightarrow 0 < x^2 + 6x \leq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x - 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array}\right. \\ -8 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8 \leq x < -6 \\ 0 < x \leq 2 \end{array}\right.$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

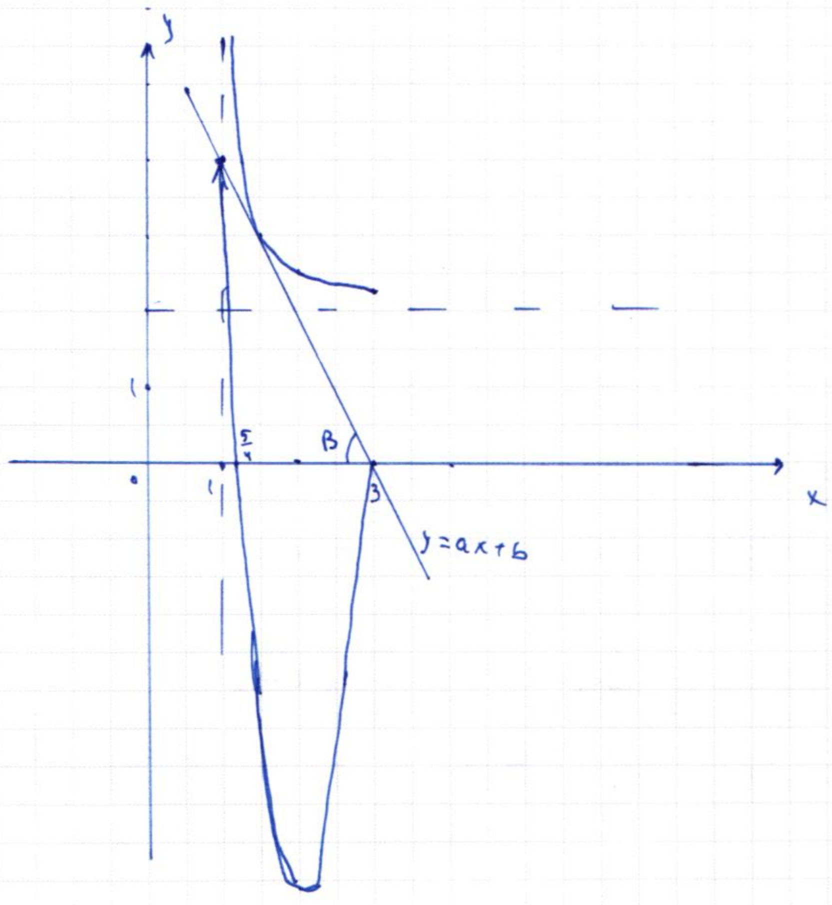
$\boxed{№ 6}$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$; $f(x) = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$$

Начертим графики этих функций: на пр-ке $x \in (0; 3]$



$g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$8x^2 - 34x + 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x = 3$

$x =$

Т.о. нам необходимо найти такие a и b, что $y = ax+b$ проходит не ниже $g(x)$ и не выше $f(x)$ ~~в каждой~~ при любом $x \in (1; 3]$. Пусть угол наклона прямой $y=ax+b$ – это β (см. рисунок). β будет наибольшим (коэф. a будет наименьшим) в том случае, когда $y = ax+b$ пройдет через точку $(3; 0)$ и будет касаться графика $y = f(x)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

Напишем ур-ие касательной к кривой графика $f(x)$:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$$

Как мы заметили ранее, в предельном случае данная прямая проходит через $(3;0)$! Подставим:

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x_0-1)^2}(3 - x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$$

Найдем x_0: умножим обе части на $2(x_0-1)^2$ т.к. задача рассматривается для $x \in (1;3]$:

~~$0 = -(3-x_0)(3-x_0) + 2(x_0-1)^2 + 2(x_0-1)$~~

$$0 = -(3-x_0) + 4(x_0-1)^2 + (x_0-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x_0^2 - 2x_0 + 1) + x_0 - 3 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2 - 8x_0 + 4 + 2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \text{ (не уд. усл. } x \in (1;3] \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Т.о. точка касания: $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

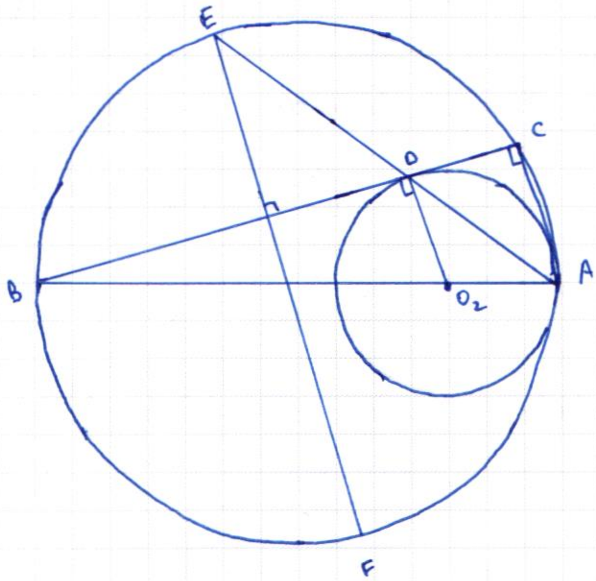
Заметим, что крайняя левая точка $g(x)$: $(1;8)$; точка касания: $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ и точка $(3;0)$

лежат на одной прямой $y = -2x + b$,
а зн. исходное нер-во выполнется

в единственном случае, когда $a = ~~+~~ 2$; $b = 6$.
(иначе $y = ax + b$ неизбежно пройдет при некотором $x' \in (1; 3]$ выше $f(x)$ или ниже $g(x)$).

Ответ: ~~2; 6~~ $a = -2$; $b = 6$

N4



$BD = \frac{13}{2}$

$CD = \frac{5}{2}$

Решение: 1) $\angle BCA = 90°$ (опир. на диаметр AB.)

Тогда $\Delta BDO_2 \sim \Delta BCA$.

$$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

$BO_2 = 2R - r$

$AB = 2R$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{2 \cdot 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{18} \Leftrightarrow \frac{r}{2R} = \frac{5}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{9} \Rightarrow R = \frac{9}{5} r$$

2) $\angle \Delta BDO_2$: пр/у. По т. Пифагора:

$$(2R - r)^2 = r^2 + BD^2 \Leftrightarrow \left(\frac{18}{5}r - r\right)^2 = r^2 + \frac{169}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{13}{5}r\right)^2 = r^2 + \frac{169}{4} \Leftrightarrow \frac{144}{25}r^2 = \frac{169}{4} \Leftrightarrow r = \frac{13 \cdot 5}{12 \cdot 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$r = \frac{65}{24}$, тогда $R = \frac{9}{5} \cdot r = \frac{9^3 \cdot 13 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{12}_4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 13}{8} = \frac{39}{8}$

Отв: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$

N 2)

$$\begin{cases} (3y-2x) = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \quad (*) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2 - 2(x-1) = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 - 3 + 3y^2 - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 - 3 + 9y^2 - 6y^2 - 6y + 2y + 1 - 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + (3y-2)^2 - 3 - 1 - 6y^2 + 2y = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + (3y-2)^2 - 2y(3y+2) - 2y$$

Пусть $a = 3y - 2$; $b = (x-1)$ тогда $(*)$ пр. вид:

$$a - 2b = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ a - 2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a > 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a-4b) = 0 \\ a > 2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 4b. \end{array}\right.$$

Тогда $3y - 2 = 4(x-1) \Leftrightarrow 3y - 2 = 4x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y + 2 = 4x$

7.0. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3y-2=4(x-1) \\ 3y-2=x-1 \end{array}\right. \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3} \end{array}\right. \\ 3(x-1)^2=7+6x+4y \end{cases}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0 \Leftrightarrow 3(x+y)^2-6x(y+1)-4(y+1)=0$

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2-2(y-1)(3x-2)=0$

(1) $y=\frac{4x-2}{3}$

$3\cdot\left(x+\frac{4x-2}{3}\right)^2-2\left(\frac{4x-2}{3}-1\right)(3x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(7x-2)^2}{3}-2\left(\frac{x-2}{3}\right)\cdot(3x-2)=0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3x^2+3y^2+$

$3y$

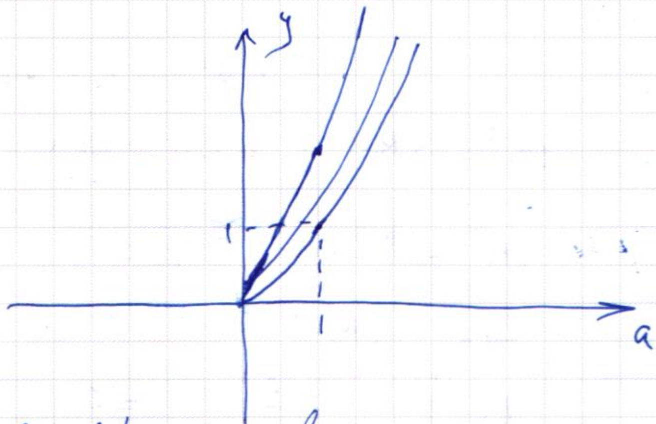
N3)

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4 a}+a \geqslant a^{\log_4 5}$

$\cancel{1}+1$

$3+1$



$a^{\log}$ $\quad \left(3^{\log_4 a}\right)' = 3^{\log_4 a}\cdot\frac{1}{4\cdot \ln a}$

$\left(a^{\log_4 5}\right)' = \log_4 5 \cdot a^{\log_4 5 -1}$

$x^2+6x \geqslant 0 \iff x(x+6)>0 \iff$ $\begin{cases} x<-6 \\ x>0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

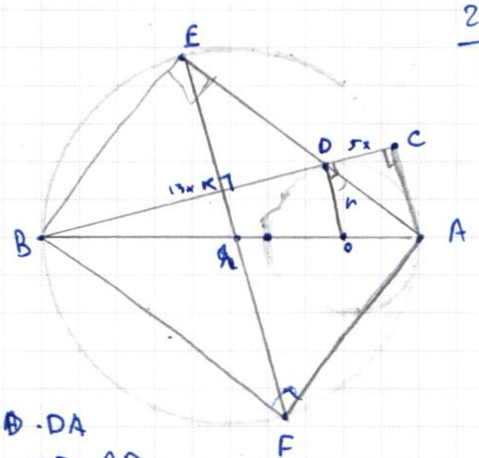
$3+4+5+5+5+5+6$

$7+20+6=33$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times\ 13 \\ \hline 207 \\ +\ 65\ \ \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\frac{69\cdot 3+65}{24}$$

$$\frac{272}{24}\approx 11$$



$CD=\frac{5}{2}$

$BD=\frac{13}{2}$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2=(2R-r)\cdot 2r$$

$BD\cdot DC=ED\cdot DA$

$\frac{13\cdot 5}{4}=ED\cdot AD$

$\frac{AD}{DE}=$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{18}$

$$\frac{169}{4}=4R\cdot r-2r^2$$

~~$BC=9$~~

$$(2R-r)^2=\frac{13^2}{4}+r^2$$

$$4R^2-4R\cdot r+\cancel{r^2}=\frac{13^2}{4}+\cancel{r^2}$$

$1-\frac{r}{2R}=\frac{13}{18}$

$$4R^2-4R\cdot r=4R\cdot r-2r^2$$

$\frac{5}{18}=\frac{r}{2R}$

$$4R^2-8R\cdot r+2r^2=0$$

$$2R^2-4R\cdot r+r^2=0$$

$\frac{5}{9}=\frac{r}{R}$

$$2\left(\frac{R}{r}\right)^2-4\left(\frac{R}{r}\right)+1=0$$

$2R-r=2\frac{9}{5}r-r=$

$R=\frac{9}{5}r \qquad =\frac{18}{5}r-r=\frac{13}{5}r$

$$\frac{R}{r}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 2}}{4}=$$

$\frac{169-25}{25}=\frac{144}{25}$

$$=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cancel{r^2}+\ \frac{169}{25}r^2=r^2+\frac{169}{4}$

$\frac{144}{25}r^2=\frac{169}{4}\Rightarrow r^2=\frac{169\cdot 25}{144\cdot 4}=$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

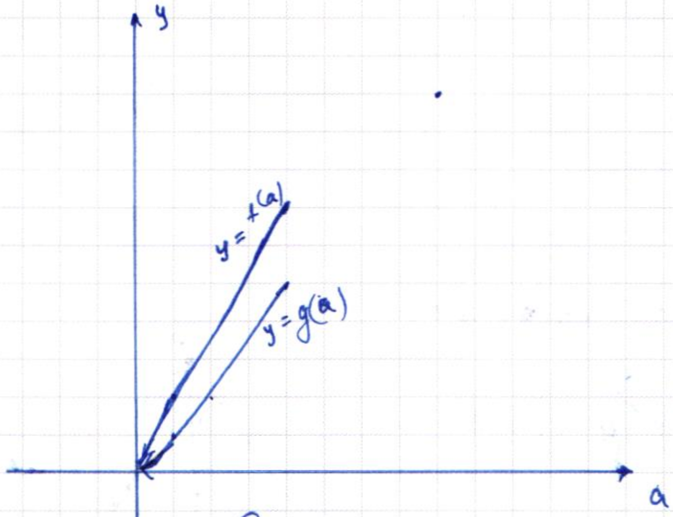
$R=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{65}^{13}}{\cancel{24}_{8}}=\frac{69}{8}$

$r=\frac{13\cdot 5}{12\cdot 2}=\frac{65}{24}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

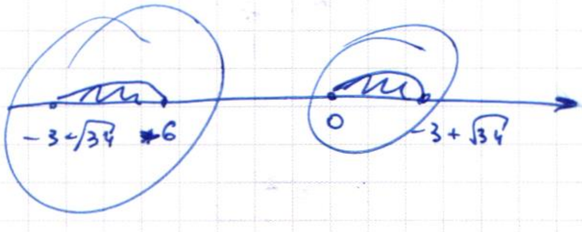
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Очевидно, что $f(a)$ возрастает быстрее $g(a)$.

Ответ.



$f(16) = 3^2 + 16 = 25$

$f(16) = (4 \cdot 4)^{\log_4 5} = $

$= 5 \cdot 5 = 25$

$x^2 + 6x > 0$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < -6 \end{cases}$

$8 \cdot 17 =$

$= 80 + 56$

$0 < a < 25$

$0 < x^2 + 6x < 25$

$x^2 + 6x - 25 < 0$

$\frac{-6 \pm \sqrt{36 + 100}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{34}}{2} =$

$= -3 \pm \sqrt{34}$

136	2
68	2
34	2
17	

$3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$9y^2+4x^2-x^2-6y^2-6x-4y-4=0$

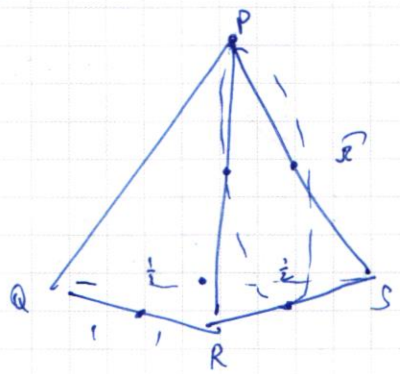
$3y(x-1)-2(x-1)$

$(x-1)(3y-2)$

$\overbrace{3x^2+3y^2-6xy}+6xy-6x-4y-4=0$

$3(x-y)^2+6x(y-1)-4(y-1)=0$

$3(x-y)^2+(y-1)(6x-4)=0$



$\begin{cases} 3(x-y)^2+2(y-1)(3x-2)=0 \\ 3\cdot y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \end{cases}$

$(x-1)^2+9y^2-6y^2-6y+2y=4$

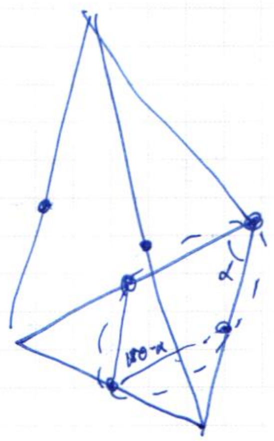
$3(x-1)^2+3+(3y-2)^2-4$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<1 \\ x>\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y>1 \\ x<\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y\geq\frac{3}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq\frac{3}{2} \\ x\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y\leq 1 \\ x<\frac{2}{3} \end{cases}$

$3y-2$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1\leq y\leq\frac{3}{2} \\ x\leq\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}<x\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$



☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$$

$$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$$9y^2-15xy+4x^2+3y+2x-2=0$$

$$\cancel{9y^2-15xy+5x^2-x^2}$$

$$\cancel{3y(3y-5x)+5x(x-3}$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y=4$$

$$3x^2+3y^2=6x+4y+4$$

$$6y^2-15xy+x^2+6x+4y+4+3y+2x-2=0$$

$$6y^2-15xy+x^2+8x+7y+2=0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

касательная:

$$0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x_0-1)^2}(3-x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$$

$$0 = 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x_0-1)^2}(x_0-3)$$

$$0 = 4(x_0-1)^2 + (x_0-1) + (x_0-3)$$

$$4(x_0^2-2x_0+1) + 2x_0 - 4 =$$

$$= 4x_0^2 - 8x_0 + 2x_0 \cancel{-4} \cancel{+4} = 0$$

$$= 4x_0^2 - 8x_0 = 0 \qquad x_0$$

$$2x_0^2 - 3x_0$$

$$x\cdot(2x_0-3)$$

$$x_0 = \frac{3}{2}$$

$$x$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{3}{2} + 2 + 1 = 3 - 3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2$$

$$a \leq -2$$

$$f(x) = -2x + b$$

$$-2\cdot 3 + b = 0 \qquad b = 6$$

$$\frac{\frac{3}{2}\cdot 4 - 3}{2\cdot\frac{3}{2} - 2} = \frac{3}{1}$$

Ответ: $(-2; 6)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

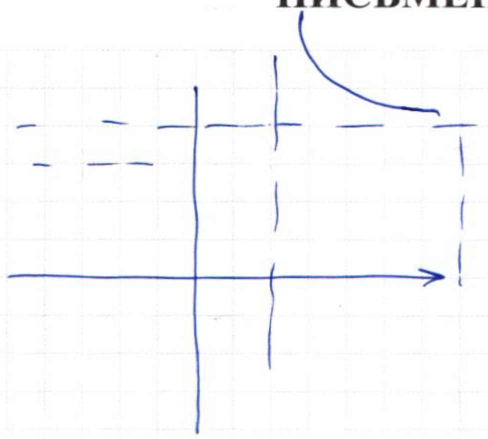
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2x-2+2x-1}{2x-2} = 1 + \frac{2x-1}{2x-2} = 1 + \frac{2x-2+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$$

$$x = \frac{54}{16} = \frac{27}{8}$$

$$\frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{26}{16} = \frac{13}{8} \quad \frac{13}{8}$$

$$\frac{4x-3}{2x-3} \in \left[2\frac{1}{4}; \infty\right)$$

$$\frac{40 \pm 14}{16} =$$

$$8x^2 - 40x + 6x + 30$$

$$\sqrt{34^2 - 4\cdot 8\cdot 30} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 17^2 - 4\cdot 8\cdot 30} = 4(289 - 8\cdot 30) =$$

$$= 4\cdot\sqrt{289 - 240} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 49} = 2\cdot 7 = 14$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ +\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$$

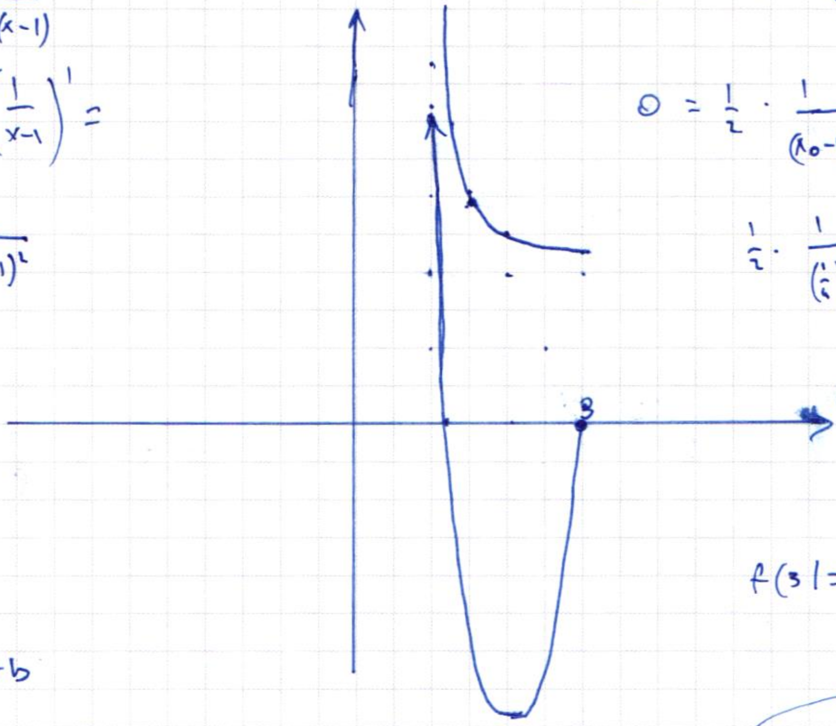
$$f(x) = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x_0-1)^2}(3-x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{4})^2}\left(3-1\frac{1}{4}\right) + 2 + \frac{1}{2(1\frac{1}{4})}$$



$8 \cdot 1\frac{3}{4}$

$f(3) = 3a+b = 0$

$f(x) = ax+b$

$a = -\frac{b}{3}$

$y = -\frac{b}{3}x + b$

$f(1) \geq 4$ $\quad f(1) = a+b \geq 4$

$f(3) \geq 0$ $\quad f(3) = 3a+b \geq 0$

$8 \cdot 4 - 34 \cdot$

$\frac{17}{8} \approx 2\frac{1}{8}$

$\frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$

$4a+2b \geq 4$

$2a+b \geq 2$

$f(x) = ax - 3a$

$8 - 34 + 30 = 8 - 4 = 4$

$$\frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4\cdot 8\cdot 30}}{16} =$$

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$$= \frac{34 \pm 2\sqrt{289-240}}{16} = \frac{34 \pm 14}{16} =$$

$= \frac{3}{\frac{5}{4}}$

$$\sqrt{34^2 - 4\cdot 8\cdot 30} = \sqrt{4\cdot 17^2 - 4\cdot 8\cdot 30} =$$

$8\cdot 16 - 34\cdot 4 + 30 =$

$= 4(4\cdot 16 - 34) + 30 = 4\cdot 30 + 30 = 5\cdot 30 = 150$

$= \sqrt{4\cdot(289-240)} = \sqrt{4\cdot 49} = 2\cdot 7$

$\frac{48}{16} = 3$

$\frac{34 \pm 14}{16} =$

$\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

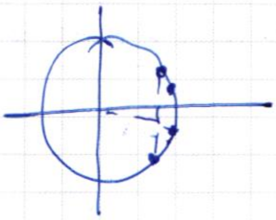
$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cancel{2\cdot\sin -\frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\quad -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \pm 1$



$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{4\sqrt{17}}{17}}{2}} =$

$=$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2}}$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{4}{\sqrt{17}}}{2}}$

$\sin\beta = \pm$

$\frac{1+\frac{4\sqrt{17}}{17}}{2} = \frac{\frac{17+4\sqrt{17}}{17}}{2} =$

$= \cancel{\frac{17+4\sqrt{17}}{3}} =$

$= \quad = \sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\frac{17+4\sqrt{17}}{2}} =$

$=\pm\sqrt{\frac{2-17-4\sqrt{17}}{2}} =$

$= -15-4\sqrt{17}$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} = \sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 3y$

$\cancel{3(x^2 - 2x + 1) +}$

$$\begin{cases} (3y - 2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$3y - 2x \geq 0$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$3(x-1)^2 - 3 + 3(y-1)^2 + 3y - 3 - 4 = 0$

$\cancel{3(x-1)^2 + 3(y-1)}$

$3(x-1)^2 - 3 + 3y^2 - 3y - 4 = 0$

$\cancel{9y^2 - 12xy +}$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$\underbrace{3y^2 + 3x^2} + 6y^2 + x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$+6x + 4y + 4$

$6y^2 + x^2 - 15xy + 8x + 7y + 2 = 0$

$(3^x)'$ $\quad$ $(3^{\log_4 a} + a - a^{\log_4 5})' =$

$=$

$3^{\log_4 a} \cdot \frac{1}{a \cdot \ln 4} + 1 - 3^{\log_4 9} \cdot \frac{1}{a \ln 4}$

$- \log_4 5 (a^{\log_4 5 - 1})$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

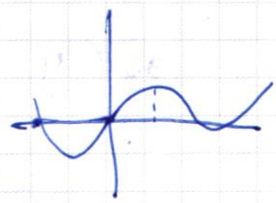
$\sqrt{1 - \left(\frac{16}{\sqrt{17}}\right.} =$

$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}; \ \sin\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cancel{\cos 2}\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$



$\sin(2\alpha + 180) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 90^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + \pi) =$

$= -\sin 2\alpha$

$= \sin 2\alpha \cdot \cos\pi + \sin\pi \cdot \cos 2\alpha$

$-\sin 2\alpha$

$3(x-1)^2 - 3 + 9y^2 - 6$

$3y - 2 - 2(x-1)$

$a + b = \sqrt{ab}$

$a + b = \sqrt{ab}$

$a^2 + ab + b^2 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 6(x-1) - 6 - \frac{4}{3}(3y-2) + \frac{8}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 + 3y + 4x^2 + 2x - 15xy = 2$

$\cancel{\left(3y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - 15xy = \frac{3}{2}}$

$3x^2 + 3y^2 = 6x + 4y + 4$

$3y^2 - 15xy + 4x^2$

$9y^2 - 9xy - 6xy + 6x^2 - 2x^2 + 2x + 3y = 2$

$9y(y - 3x) + 6x(x -$

$\cancel{3x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x - 4y - 6xy = 4}$

$\cancel{3(x+y)^2 - 6x(y+1) - 4(y+1) = 0}$

$\cancel{3(x+y)^2 - (y+1)(6x+4) = 0 \Leftrightarrow 3(x+y)^2 = (y+1)(}$

$3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)}$

$3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$x > 1$

$4x - 2 > 2x$

$3y > 2x$

$3y = 4x - 2$

$3y - 2 = 4(x-1)$

a