МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

±?

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

пересчитать

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№ 3 решение

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

($x^2+18x = a$)

$$a + 5^{\log_{12}a} \geq |a|^{\log_{12}13}$$

$$\log_{12}a + \log_{12}a \cdot \log_{12}5 \geq \log_{12}a \cdot \log_{12}13$$

$$\log_{12}a + \log_{12}a \cdot \log_{12}5 - \log_{12}a \cdot \log_{12}13 \geq 0$$

$$\log_{12}a\,(1 + \log_{12}5 - \log_{12}13) \geq 0$$

$$\log_{12}a\,(\log_{12}12 + \log_{12}5 - \log_{12}13) \geq 0$$

$$\log_{12}a \cdot \log_{12}\frac{12\cdot5}{13} \geq 0$$

$$\log_{12}a \cdot \log_{12} \Rightarrow \log_{12}a > 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\log_{12}\frac{12\cdot5}{13} > \log_{12}1$$

$\log_{12}13 =$

$\cancel{\log_{12}}$

$a^{\log_{12}13-1}$

$\log_{12}13 - 1 =$

$= \log_{12}\frac{13}{12} - 1$

a

$$\log_{12}(x^2+18x) > 0 \Leftrightarrow \log_{12}(x^2+18x) - \log_{12}1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+18x-1>0 \\ x^2+18x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x(x+18)>0 \\ (x-\ )(x-\ )>0 \end{matrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cancel{x>0} \quad \left[\begin{array}{l} x<-18 \\ x>0 \end{array}\right. \\ \cancel{x<} \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{-18-\sqrt{18^2+4}}{2} \\ x > \frac{-18+\sqrt{18^2+4}}{2} \end{array}\right. \end{array} \right.$$

$D = 3\cancel{24}+4 = \cancel{225}\ 328$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{328}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2+4}}{2}$$

$$5^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13} - a^{\log_{12}12}$$

$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$\log_{12}a\,\left(\log_{12}5 - \log_{12}\cancel{\left(a\,\frac{\log_{12}13}{2}\ (-1)\right)}\right)$$

$$\log_{12}a\,\left(\log_{12}5 - \log_{12}\left(a^{\log_{12}13-1}-1\right)\right) \geq 0$$

$$\log_{12}5 \cdot \log_{12}a \geq \log_{12}a \cdot \log_{12}\left(a^{\log_{12}13-1} - 1\right)$$

$$5^{\log_{12}a} \geq a\left(a^{\log_{12}13-1} - 1\right)$$

$$a \geq a^{\log_{12}13} \geq 5^{\log_{12}a}$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2R - 1 \quad 100 \quad 16^4$

$\frac{100б}{}$ $\frac{36}{75} = 12$

$\log_{12} a \cdot \log_{12} 5 > \log_{12} a \cdot \log_{12}\left(a^{\log_{12} 13 \cdot 2} - a\right)$

$-2x - \frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$

$\left(-2x-\frac{1}{2}\right)(4x+3) = 12x+11$

$-8x^2 - 6x - 2x - \frac{3}{2} = 12x + 11$

$-8x^2 - 20x - \frac{25}{2} = 0$

$8x^2 + 20x + \frac{25}{2} = 0$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x)^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

№2 решение

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 5^2$

$a \quad b$

$\frac{7}{3} = \frac{4}{9(34)} =$

$= \frac{4}{6 \cdot 6 + 6 \cdot 52}$

$\frac{11+3}{2}$

$x - 2y = x(y-1) - 2(y-1) \qquad x-2 \; ; \; y-1$

$(x-2y) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \qquad x - 2 - 2(y-1) = x - 2y$

$$\begin{cases} a^2 + 9b^2 = 5^2 \\ \cancel{a+b} \; a - 2b = \sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 9b^2 = 5^2 \\ a - 2b \geq 0 \\ a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 9b^2 = 5^2 \; (*) \\ a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a - 2b \geq 0 \end{cases}$$

$a^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} ab + \frac{25}{4} b^2 - \frac{9}{4} b^2 = \left(a - \frac{5}{2} b\right)^2 - \frac{9}{4} b = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \qquad \Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{2} b - \frac{3}{2} b\right)\left(a - \frac{5}{2} b + \frac{3}{2} b\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-4b)(a-b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \end{array}\right.$ в $(*)$;

$a - 2b \geq 0$

$a = b$:

1) $a^2 + 9a^2 = 25$

$10a^2 = 25$

$a^2 = \frac{25}{10}$

$a = \pm \frac{5}{\sqrt{10}} = \pm \frac{5\sqrt{10}}{10} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

$+ \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} -$

2) $a = 4b$

$16b^2 + 9b^2 = 25$

$b^2 = 1$

$b = 1$

$b = -1$

$+ \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} -$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\sin 2(x+2\beta) = 2\sin(x+2\beta)\cdot\cos(x+2\beta) + \sin 2x$~~

$\sin(2x+4\beta) + \sin 2x = \cancel{2\sin(2x+4\beta)}\ 2\cdot\sin\frac{4x+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{2x+4\beta-2x}{2} =$

$= 2\sin(2x+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt5}{5\cdot 2} = \frac{2\sqrt5}{5}$; ~~$\sin 2\beta = 1-$~~

~~$2x+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k$~~

$2x+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k$

$2x+2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k$

$2\beta = \arccos\frac{2\sqrt5}{5}+2\pi k$

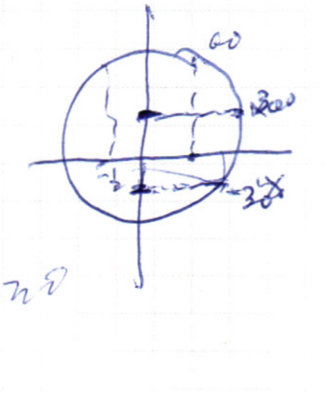
$2\beta = -\arccos\frac{2\sqrt5}{5}+2\pi k$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{4\cdot5}{25}} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$ или $-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2x\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2x = -\frac{4}{5}\ \frac{\sqrt5}{4}$ ~~$\frac{4}{5}$~~ $= -\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2x\cdot\frac{2\sqrt5}{5} + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\left(2x+\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$



$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

f – компл. R

для любых a и b из

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ – для простого p

найти кол-во пар $x, y \in \mathbb{N}$

$1 \le x \le 24$ $\qquad f\left(\frac{x}{y} < 0\right)$

$1 \le y \le 24$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x y \cdot \frac{1}{y^2}\right) = f(xy) + f\left(\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= f(x) + f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f(1)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \qquad f\left(\frac{x}{y}\right) = \qquad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

$$2f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x) - f(xy)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \cdot \left(f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)\right) - f(xy)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f\left(\frac{x}{y}\right) + 2f(y) - f(xy)$$

$$-f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(y) - f(x) - f(y)$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4} \cdot 2\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) + f(2) = f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{y}{2^k}\right)$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

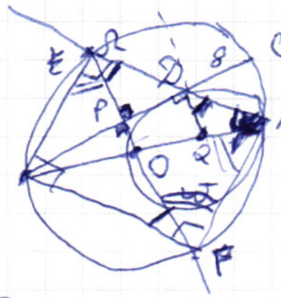
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AB = d \quad r - ? \quad R?$

$\angle AFE - ?$

$S_{\triangle AEF} - ?$



$\frac{25\cdot 9}{4} + \frac{9^2}{4} =$

$CD = 8$

$= \frac{9}{4}(25+9)$

$BD = 17$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC = 8 \cdot 17$

$\frac{32}{+25}{57}$

$AD = \frac{8 \cdot 17}{ED}$

$\frac{57}{25}R^2 = 17^2$

$R = \frac{17^2 \cdot 25}{57}$

$\triangle EPD \sim \triangle BPF$

$\frac{BP}{PD} = \frac{BF}{ED} = \frac{PF}{EP}$

$\triangle EPD \sim \triangle BEA$

$\triangle BPF \sim \triangle BEA$

$\frac{AB}{ED} = \frac{BE}{PD} = \frac{AE}{EP}$

$\frac{BP}{ED} = \frac{BE}{AB} = \frac{PF}{AE}$

$9r = 16R - 16r$

$25r = 16R$

$r = \frac{16}{25}R$

$EP^2 = BP \cdot PD$

$\frac{34}{-25}{9}$

$\triangle EAF$ – п/уг. : (·)O – центр Ω

$BP = PC = \frac{BC}{2} = \frac{17+8}{2} = \frac{25}{2}$; $PD = BD - BP = 17 - \frac{25}{2} = \frac{9}{2}$

из $\triangle BDQ$ по т. Пифаг.: $BD^2 + r^2 = (R+r)^2$

по т. Фалеса: $\frac{AQ}{AD} = \frac{OQ}{ED}$

$17^2 = R^2 + 2Rr$

81

$AQ \cdot ED = QO \cdot AD$

$r \cdot \frac{9}{2}\sqrt{34} = (R-r) \cdot \frac{8 \cdot 17}{\frac{9}{2}\sqrt{34}}$

$EP^2 = BP \cdot PD = \frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{25 \cdot 9}{4}$; $EP = \frac{5 \cdot 3}{2}$

из $\triangle EPD$ – п/уг.: $ED = \sqrt{EP^2 + PD^2} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^2}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{9^2 + 9 \cdot 25}{4}} =$

$= \frac{3}{2}\sqrt{9+25} = \frac{9}{2}\sqrt{34}$

$r \cdot \frac{81}{4 \cdot 2} \cdot 34 = (R-r) \cdot 8 \cdot 17$

$81r = (R-r) \cdot 16$

$R^2 + 2 \cdot \frac{16}{97}R \cdot r = 17^2$

$81r + 16r = 16R$

$97r = 16R$

$r = \frac{16}{97}R$

$\frac{97}{+32}{129}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

первые 42 мин — 2, 3, 4

№6 найти все $(a;b)$, что для всех x из $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

(1) $y = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

(2) $y = -8x^2 - 30x - 17$

$-\frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$

$-8 \cdot \frac{15^2}{8^2} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 = \frac{-15^2+30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{15(30-15)}{8} - 17$

$= \frac{15^2}{8} - 17 = \frac{15^2 - 136}{8} = \frac{89}{8} \approx 11\frac{1}{8}$

$$\begin{array}{r} 225 \\ -\ 136 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

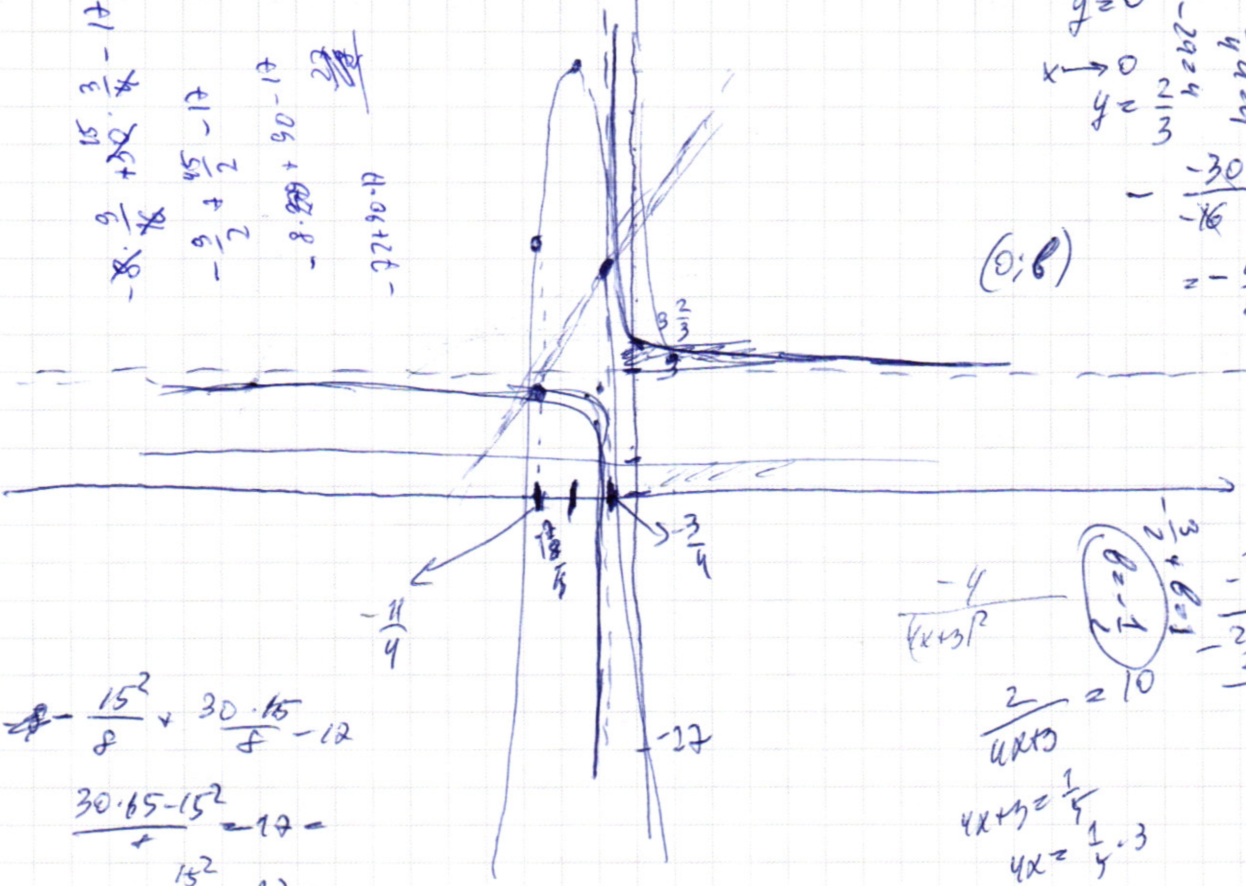
$\frac{11\left(\frac{15 \cdot 11}{2}\right)}{2}$

$-8 \cdot \frac{11^2}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 =$

$= -\frac{11^2}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 =$

$\frac{44}{2} = 22 - 17 =$

$y = -2x - \frac{1}{2}$



$-8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{15}{30} \cdot \frac{3}{4} - 17$

$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17$

$-8 \cdot 8 + 90 - 17$

$-72 + 90 - 17$

$4x+3$ — ~~мин~~

(1) $x \to \infty$

$y = 0$

$x \to 0$

$y = \frac{2}{3}$

$-\frac{11}{4}a + \frac{3}{4}a = 4$

$-\frac{8}{4}a = 4$

$-2a = 4$

$-\frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$(0; b)$

$a = -2$

$y = ax + b$

$-\frac{11}{4}a + b = 5$

$-\frac{3}{4}a + b = 1$

$-\frac{3}{4} \cdot (-2)$

$-\frac{3}{2} + b = 1$

$b = -\frac{1}{2}$

$\frac{-4}{(4x+3)^2}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ -\ 136 \end{array}$$

$\frac{2}{4x+3} = 10$

$4x+3 = \frac{1}{5}$

$4x = \frac{1}{5} - 3$

$-8 \cdot \frac{15^2}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17$

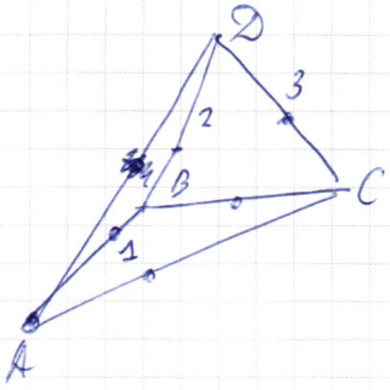
$\frac{30 \cdot 15 - 15^2}{8} - 17 =$

$= \frac{15^2}{8} - 17 =$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

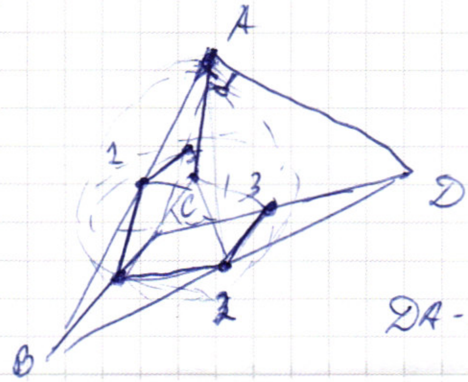
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

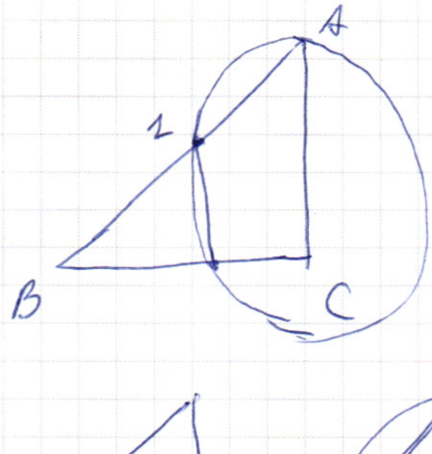


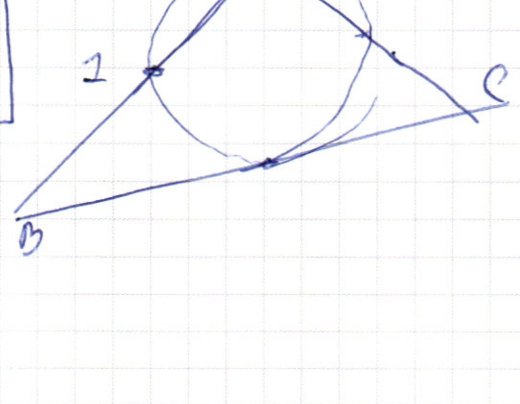
BC?

$AB=1$
$BD=2$
$CD=3$



DA-кас.-ная





4	6	8	9	10	12	14	15	16
0	0	0	0	1	0	1	1	6

18	20	21	24
0	1	2	6

$f(3) = f(3) + f(1) = 0$

$f(1) = 0$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} (*)$$

Пусть $x-2=a$, $y-1=b$, тогда система $(*)$ примет вид

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a-2b\geq 0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+\frac{25}{4}b^2-\frac{9}{4}b^2=0 \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-\frac{5}{2}b\right)^2-\left(\frac{3}{2}b\right)^2=0 \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 16b^2+9b^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b^2+9b^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right. \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит, (*) ⇔

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ y-1=-\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right); (6;2)\right\}$

№3 Р-ть нер-во

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}23}-18x \quad (*)$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

Заметим, что на ОДЗ (*) ⇔ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Пусть $x^2+18x=a$, $a>0$, тогда (*) примет вид

$5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$ ~~; прологарифмируем по основанию 12, получим~~

$\cancel{\log_{12} 5^{\log_{12}a} + \log}$

$$5^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13}-a$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

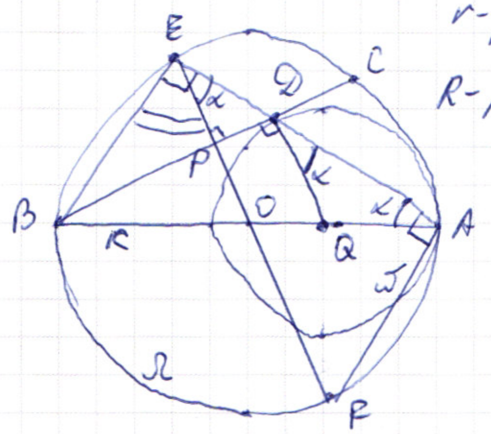
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



r - радиус ω

R - радиус Ω

Дано:

$CD=8$

$BD=17$

$r; R$ - ?

S_{AEF} - ?

$\angle AFE$ - ?

$\angle DAQ=\alpha$

Решение:

1) Пусть Q - центр окр-ти ω; опустим радиус QD:

$QD\perp BC$ (по св-ву кас-ной)

рас-м $\triangle DQA$: $QD=QA=r \Rightarrow \triangle DQA$ - р/б $\Rightarrow \angle QAD=\angle QDA=\alpha$ (по св-ву)

2) $EF\perp BC$, $QD\perp BC$ $\Rightarrow QD\parallel EF \Rightarrow \angle AEF=\angle ADQ=\alpha$ (при секущей EA)

3) Рас-м $\triangle BEA$: AB - диаметр $\Omega \Rightarrow \angle BEA=90^\circ$ (по св-ву - вписанный угол, опир-ся на диаметр)

~~$\Rightarrow \angle BEF=\beta=90^\circ-\alpha$~~ $\angle BEF=90^\circ-\angle FEA=90^\circ-\alpha$

4) $\angle BEF=\angle BAF=90^\circ-\alpha$ (впис. углы, опир. на дугу BF)

$\angle EAF=\angle EAB+\angle BAF=\alpha+90^\circ-\alpha=90^\circ \Rightarrow EF$ - диаметр окр-ти Ω

{ Пусть O - центр окр-ти Ω, тогда $(\cdot)O=(AB)\cap(EF)$. Пусть $(\cdot)P=(BC)\cap(EF)$

5) EF - диаметр, $EF\perp BC$, тогда по св-ву: $BP=PC$

$BP=PC=\frac{BC}{2}=\frac{BD+CD}{2}=\frac{25}{2}$; $PD=BD-BP=17-\frac{25}{2}=\frac{9}{2}$

6) $\triangle BED$ — прямоуг, EP — высота:

$EP^2 = BP\cdot PD = \frac{25}{2}\cdot\frac{9}{2} = \left(\frac{3\cdot5}{2}\right)^2$

7) $\triangle EPD$ — пр/уг, по т. Пифагора

$ED = \sqrt{EP^2+PD^2} = \sqrt{\left(\frac{5\cdot3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{25+9} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

8) по св-ву ~~хор~~ пересек-ся хорд в окр-ти:

$ED\cdot AD = BD\cdot DC = 8\cdot17$

$AD = \frac{8\cdot17}{ED} = \frac{8\cdot17}{\frac{3}{2}\sqrt{34}} = \frac{16\cdot17}{3\sqrt{34}}$

9) по т. Фалесса для $\angle EAO$ и $EO \parallel DQ$:

$\cancel{AQ}$ $\quad \cancel{\frac{AQ}{AD} = \frac{ED}{}}$ $\quad \frac{AQ}{AD} = \frac{OQ}{ED}$

$AQ\cdot ED = OQ\cdot AD$; $OQ = R-r$

$r\cdot\frac{3}{2}\sqrt{34} = (R-r)\cdot\frac{16\cdot17}{3\sqrt{34}}$

$r\cdot 9\cdot 34 = (R-r)\cdot 32\cdot 17$

$9r = 16(R-r)$; $r = \frac{16}{25}R$

21

$\cancel{11)\ \triangle AEF - \text{пр/уг};\ \sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{34}+\frac{16\cdot17}{3\sqrt{34}}}{\frac{85}{3}} = \frac{9\cdot34+16\cdot34}{85\cdot12}\cdot3 = \frac{34\cdot25}{4\cdot85}}$

10) $\triangle ADQ$ — пр/уг, по т. Пифагора:

$BQ^2 = BD^2+DQ^2$; $\cancel{(R+r)^2 = 17^2+r^2;\ R^2+2R\cdot r = 17^2}$

$\cancel{\text{С учётом } r=\frac{16}{25}R \text{ — получаем } R^2+\frac{32}{25}R^2 = 17^2;\ R^2 = \frac{17^2\cdot25}{57}}$

$\cancel{R = \frac{85}{\sqrt{57}};\ r = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{\sqrt{57}} = \frac{17}{16\sqrt{57}}}$

$\cancel{11)\ \triangle EAF - \text{пр/уг}:\ \sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{ED+DA}{2R} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{34}+\frac{16\cdot17}{3\sqrt{34}}}{2\cdot\frac{85}{\sqrt{57}}} =}$

$\cancel{= \frac{9\cdot34+16\cdot34}{12\sqrt{34}\cdot\frac{85}{\sqrt{57}}} = \frac{34\cdot25\sqrt{57}\cdot\sqrt{34}}{12\cdot85\cdot34} = \frac{5\sqrt{34}\cdot\sqrt{57}}{12\cdot17}}$

$(2R-r)^2 = 17^2+r^2$; $4R^2-4Rr = 17^2$; $4R^2-4\cdot\frac{16}{25}R^2 = 17^2$

$\frac{36}{25}R^2 = 17^2 \Rightarrow R^2 = \frac{17^2\cdot25}{36}$; $R = \frac{17\cdot5}{6} = \frac{85}{6}$; $r = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

Ответ: радиус большей окр-ти $\frac{85}{6}$, меньшей — $\frac{136}{15}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2x+4\beta)+\sin 2x=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow 2\cdot\sin\frac{4x+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{2x+4\beta-2x}{2}=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin(2x+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

подставим $\sin(2x+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$, получим

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos 2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{20}{25}}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2x+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin 2x\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2x=-\frac{1}{\sqrt5}$

(1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ $(2\pi k\le\beta\le\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z})$:

$\sin 2x\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2x=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \cancel{\sin\left(2x+\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{2x=-\frac{1}{\sqrt5}-ar}$ $\left[\begin{array}{l}2x=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k,\\ 2x=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k,\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\pi k-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right),\\ 2x=\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$

(2) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ $(\pi+2\pi k\le\beta\le 2\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z})$

$\sin 2x\cdot\frac{2\sqrt5}{5}-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2x=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin\left(2x-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k,\\ 2x=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k,\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=\pi+2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

Найдём $tg\alpha$:

(1) $2\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$tg\alpha = 0$

(2) $2\alpha = -2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k$

$\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\cos\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\sin^2\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\frac{1}{5}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2}$$

(3) $2\alpha = \pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi k$

$$tg\alpha = \frac{\cos\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sin\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1} = -2$$

(4) $2\alpha = \pi + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi k$

$$tg\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{-\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = -2$$

Т.о. получили значения $tg\alpha = -\frac{1}{2}$; $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = -2$

Т.к. из условия известно, что значений $tg\alpha$ не меньше 3-х, то все эти ~~такие~~ $tg\alpha$ - определены.

Ответ: $tg\alpha = -2$; $tg\alpha = -\frac{1}{2}$; $tg\alpha = 0$ - возможные значения $tg\alpha$

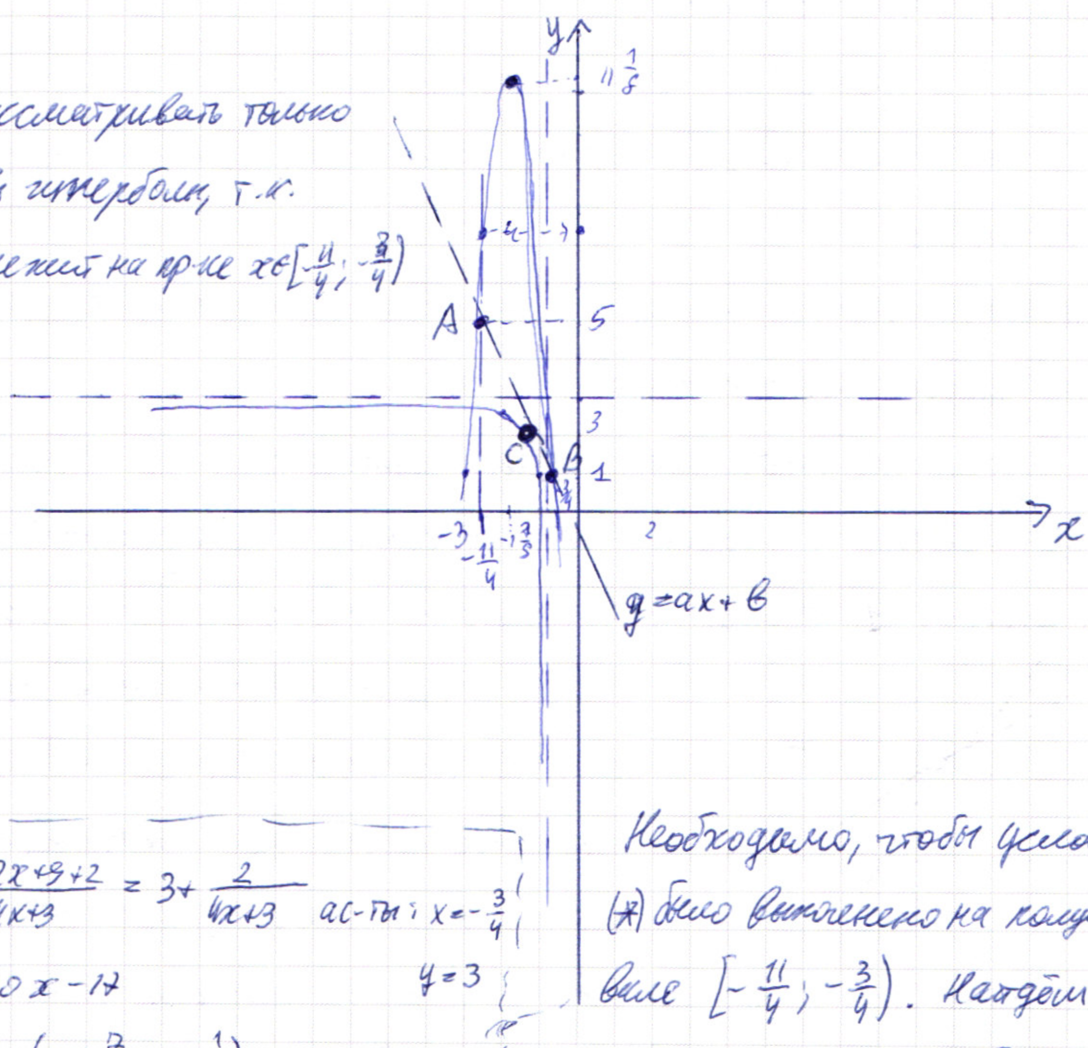
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \overset{(1)}{\le} ax+b \overset{(2)}{\le} -8x^2-30x-17 \quad (*)$$

Изобразим на графике ф-ции $y=\frac{12x+11}{4x+3}$ и $y=-8x^2-30x-17$

Будем рассматривать только левую ветвь гиперболы, т.к. правая не лежит на пр-ке $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}]$



$\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{12x+9+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$ ас-ты: $x=-\frac{3}{4}$

$y=3$

$y=-8x^2-30x-17$

вершина: $(-1\frac{7}{8}; 11\frac{1}{8})$

Необходимо, чтобы условие $(*)$ было выполнено на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$. Найдём точки пересечения параболы с прямыми $x=-\frac{11}{4}$ и $x=-\frac{3}{4}$:

(·)A $(-\frac{11}{4}; 5)$, (·)B$(-\frac{3}{4}; 1)$. Пусть прямая $y=ax+b$ проходит через (·)A и (·)B, найдём a и b:

$$\begin{cases}5=-\frac{11}{4}a+b\\ 1=-\frac{3}{4}a+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Расс-м прямую $y=-2x-\frac{1}{2}$ и ветвь гиперболы $y=\frac{12x+11}{4x+3}$:

$$-2x-\frac{1}{2}=\frac{12x+11}{4x+3} \Leftrightarrow \frac{(-2x-\frac{1}{2})(4x+3)-12x-11}{4x+3}=0$$

при $x\neq-\frac{3}{4}$ получаем ур-ние:

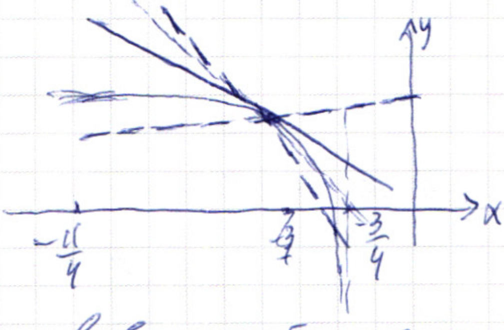
$$-8x^2-6x-2x-\frac{3}{2}-12x-11=0 \Leftrightarrow 8x^2+20x+\frac{25}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x+5)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

Значит, прямая $y=-2x-\frac{1}{2}$ и ~~гипербо~~ ветвь гиперболы $y=\frac{12x+11}{4x+3}$ имеют единственную точку пересечения. $y=-2x-\frac{1}{2}$ – кас-ная к гиперболе.

прямая $y=-2x-\frac{1}{2}$ – уд-ет условию $(a=-2; b=-\frac{1}{2})$, докажем, что других таких прямых – нет.

Действительно, если будем изменять a, то прямая будет пересекать левую ветвь гиперболы в промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}] \Rightarrow$ условие (1) не будет выполнено на всём промежутке.



Если будем увеличивать b, то прямая пересечёт параболу при $x<-\frac{11}{4}$ и $x>-\frac{3}{4}$ и условие (2) не будет выполнено.

Если $\downarrow b$, то прямая пересечёт левую ветвь гиперболы 2 раза на пр-ке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ или будет лежать ниже её $\Rightarrow$ условие (2) не выполнится. Т.о. нам подходит только случай $\begin{cases}a=-2\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Ответ $\{(-2; -\frac{1}{2})\}$ – $(a; b)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) $f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

т.к. для условия $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ необх-мо, чтобы $f(y)>f(x)$

2) $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\cdot 2\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)+f(2)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{4}\cdot 2\right)=f\left(\frac{x}{4}\right)+f(2)=f\left(\frac{x}{4}\right)$

т.о., $f(x)=f\left(\frac{x}{2^k}\right)$, где k - целое

3) простые числа от 2 до 24:

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	
0	0	0	1	1	2	3	4	4	5	их $f(x)$

Среди простых чисел подходит пар (для условия $f(y)>f(x)$):

$N_1=3\cdot 7+2\cdot 5+4+3+2=40$

~~не про ∃ число x четное.~~

~~4) $f(x)=f\left(\frac{3x}{3}\right)=f\left(\frac{x}{3}\right)+f(3)=f\left(\frac{x}{3}\right)=f\left(\frac{x}{3k}\right)$, где k целое~~

4) Т.к., любое не простое число можно расписать как произведение его простых множителей, тогда:

$f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$; $f(10)=f(5)+f(2)=1$; $f(12)=f(2)+f(6)=0$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$; $f(15)=f(5)+f(3)=1$; $f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$; $f(20)=f(5)+f(4)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$

$f(24)=f(12)+f(2)=0$; Найдём число пар, которое можно составить: ~~из~~ между этими числами: $N_2=8\cdot 5+4\cdot 2=48$

⟶ см. далее

3) число пар, которые можно составить между простыми и не простыми числами, чтобы $f(y) > f(x)$

$N_3 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 2 + 4 + 4 = 15 + 56 + 10 = 25 + 56 = 81$

6) тогда всего: $N = N_1 + N_2 + N_3 = 40 + 48 + 81 = 169$

Ответ: всего 169 таких пар можно составить