МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

найти $\operatorname{tg}\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) = \sin 2\alpha \, 2\cos^2 2\beta$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

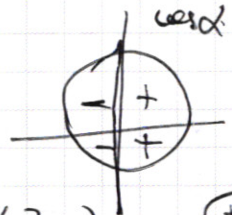
$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

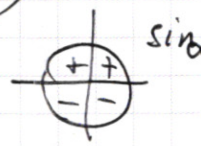
$2\sin 2\alpha \cos 2\beta \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \, 2\sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta\big(\underbrace{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta}_{\sin(2\alpha+2\beta)}\big) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}} = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta = +\frac{4}{5}\cdot\sqrt5$





$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\Rightarrow$ ~~$2\beta = \pm\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)$~~

~~$\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)$~~

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

~~$\cos 2\alpha = -1 - 2\sin 2\alpha$~~ ~~$2\cos\alpha(2\sin\alpha+1)=0$~~

$\Rightarrow 2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

~~$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$~~ ~~$\cos\alpha = 0$ $\Rightarrow$ по условию $\operatorname{tg}\alpha$ определен~~

~~$\cos\alpha = 0$~~ — по условию $\operatorname{tg}\alpha$ опред

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{array}\right.$

Значит $\boxed{\text{Ответ: } \operatorname{tg}\alpha = -2 \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{tg}\alpha = 0}$

№2

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$

$x^2 - 4x + 4 - 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 = 12$

$\begin{cases} (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \\ x - 2y = \sqrt{(x+2)(y-1)} \end{cases}$

$(3x+3)^2 = 9x^2 + 18x + 9$

$xy - x - 2y + 2 =$
$2(y-1) + x(y-1) = (x+2)(y-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$xy-x-2y+2=$
$=2(y+1)+x(y-1)=(y-1)(x-2)$

$x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x\geq 2y$:

$(x-2y)^2=(y-1)(x-2)=((x-2)-2(y-1))^2=(y-1)(x-2)$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Пусть $(y-1)=a$ $x-2=b$

$$\begin{cases} (b-2a)^2=ba \\ b^2+9a^2=25 \end{cases}$$

$b^2-4ab+4a^2=ab$

$b^2-5ab+4a^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a \end{array}\right.$$

при этом $\boxed{b>2a}\Rightarrow \boxed{b=4a}$ при $a>0$ $b>0$

$b>2a\Rightarrow b=a$ при $a<0$ $b<0$

~~$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=a \\ b^2+9a^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ b^2+9a^2=25 \end{cases} \end{array}\right.$~~

~~$b=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}$ $a=$~~

Продолжение задачи 2:

$\begin{cases} b = 4a, \quad b>0 \quad a>0 \\ b^2 + 9a^2 = 25 \end{cases}$

$16a^2 + 9a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{\cancel{a = \pm 1} \quad \cancel{b = \pm 4}}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases} \end{array}\right.$

$b > 2a \Leftrightarrow$

$\underline{b - 2a > 0}$ $\quad \underline{-4 + 2 < 0}$ $\Rightarrow$ удовлетвор только $a = 1$, $b = 4$

$\begin{cases} y - 1 = 1 \\ x - 2 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~Ответ: (6; 2)~~

$\begin{cases} b = a \\ b < 0 \\ a < 0 \\ b^2 + 9a^2 = 25 \end{cases}$ $\quad b = -\sqrt{\frac{25}{10}} = -\frac{5}{\sqrt{10}}$ $\quad \underline{a \cdot b > 0}$

$a = -\sqrt{\frac{25}{10}} = -\frac{5}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y - 1 = -\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}$

значит Ответ: $\left\{ \left(2 - \frac{5}{\sqrt{10}}; 1 - \frac{5}{\sqrt{10}}\right), (6; 2) \right\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x > 0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

Пусть $x^2+18x = z$

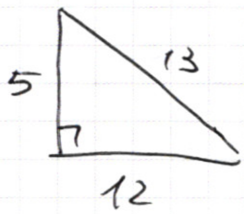
$\Rightarrow 5^{\log_{12} z} + z \geq z^{\log_{12} 13}$ нам известно что $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$5^{\log_{12} z} + z^{\log_{12} 12} \geq 13^{\log_{12} z}$

$5^{\log_{12} z} + 12^{\log_{12} z} \geq 13^{\log_{12} z}$

заметим, что $5^2+12^2=13^2$

$5+12>13$



покажем, что при $n>2$

$5^n+12^n<13^n$

а при $n\leq 2$

$5^n+12^n\geq 13^n$

для $n=1$ $5+12>13$

$n=-1$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}$ vs $\frac{1}{13}$ $\frac{17}{60}$ vs $\frac{1}{13}$

$\frac{17}{60}-\frac{1}{13}=\frac{170+7\cdot13-60}{60\cdot13}>0$

$\Rightarrow$ при $n=-1$ $\frac{17}{60}>\frac{1}{13}$

при $n=3$ $125+144\cdot12<\underbrace{169\cdot13}_{2197}$ по значению

$1440+288+125<2000$

и еще мы знаем что $x^n+y^n\neq z^n$ где $x,y,z\in\mathbb{Z}$, $n\geq3$

поэтому делали вывод, что

$n=2$ – переменная граница в нашем случае

т.е. при $n<2$ ~~x^2+y^4~~

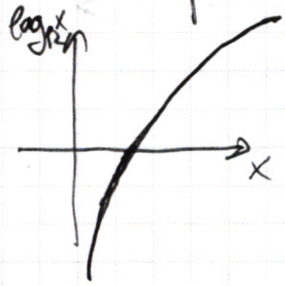
$$12^n+5^n>13^n$$

$n=2$ $12^2+5^2=13^2$

$n>2$ $12^n+5^n<13^n$

значит чтобы выполнялось н-во

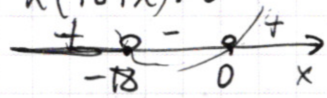
$\log_{12} z \leq 2$ $12>1$



$z \leq 12^2$

$\boxed{z \leq 144}$

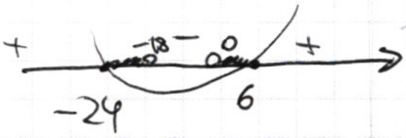
$x^2+18x \leq 144$ и $x^2+18x>0$ $x(18+x)>0$



$x^2+18x-144 \leq 0$

~~$x=-9$~~ $x=-9 \pm \sqrt{81+144}=-9 \pm 15=-24;6$

$(x+24)(x-6) \leq 0$ x



$x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

Ответ! $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

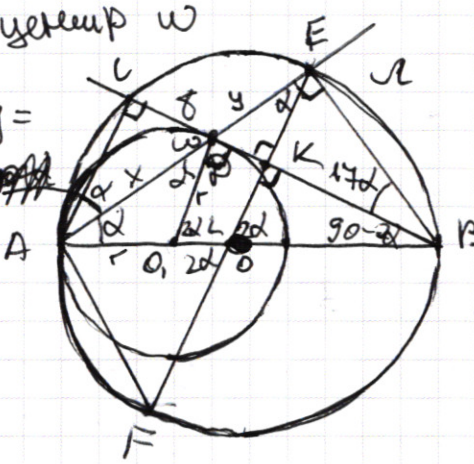
Задача 4

O – центр Ω

O_1 – центр ω

$AD \cdot ED = x \cdot y =$

$= \underline{17 \cdot 8}$



~~$EF \cap AB = L$~~

~~$\angle ELB = 2\alpha$ $\angle EAB = 2\alpha$~~

~~антипод~~

1) Пусть $EF \cap AB = L$

заметим, что $\angle ACB = 90°$ радиус

$\angle O_1DB = 90°$ касательная

и по условию

$EF \perp CB$

значит $CA \parallel EF \parallel O_1D$ (*)

и пусть $\angle EAB = \alpha$ тогда

так как опираются на одну хорду

$\angle DO_1B = 2\alpha \Rightarrow$ из (*)

$\angle ELB = \underline{2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{L = O}$ т.е.

(**) EF проходит через центр окружности Ω

2) из (**) $\Rightarrow$

$OE = OA = R$

и при этом $\underline{OF = R}$

т.к. EF диаметр (что следует из (**))

т.к. $\boxed{\angle EAF = 90°}$

и при этом AO медиана в треуг-ке $\underline{\triangle AEF}$

3) ~~т.к. $\angle CAE = 90 - \alpha$~~

$OO_1 = R - r$

$x = 2r\cos\alpha$

$x + y = 2R\cos\alpha$

$\angle EDB = 90 - \alpha \Rightarrow$ т.к. $\angle DEF = 90°$ то $\underline{\angle EBC = \alpha}$

также заметим, что $\angle CBA = \alpha = \angle AFE$

т.к. опираются на одну хорду

Продолжение задачи 4

значит $\angle CBA = 90 - 2\alpha \Rightarrow \angle CAB = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle CAD = \alpha \Rightarrow AD$ бис-са в тр-ке $\triangle ACB$

теперь все углы расставили, остается ответить на вопросы

$$\frac{y = 17\sin\alpha}{8 = x\sin\alpha} \Rightarrow x = \frac{8}{\sin\alpha} \quad y = 17\sin\alpha$$

AD - бис-са $\Rightarrow \frac{17}{8} = \frac{2R}{AC} \quad AC = R\sin(90-2\alpha) = R\cos 2\alpha$

$$\frac{17}{8} = \frac{2}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{16}{17}$$

$6+7=13$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{16}{17} \quad 2\cos^2\alpha = \frac{33}{17} \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{33}{34}}$$

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{33}{34}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{33}{34}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{17}{\sqrt{2\cdot 17}} = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

$$\angle AEF = \alpha = \arccos\sqrt{\frac{33}{34}}$$

$$x = 8\sqrt{34}$$

$$x = 2r\cos\alpha$$

$120+16$

$$2r\cdot\sqrt{\frac{33}{34}} = 8\sqrt{34} \Rightarrow r = 4\cdot\frac{34}{\sqrt{33}} = \frac{136}{\sqrt{33}}$$

$$x+y = 2R\cos\alpha = 8\sqrt{34} + \frac{\sqrt{34}}{2} = \frac{17}{2}\sqrt{34}$$

$$2R\sqrt{\frac{33}{34}} = \frac{17}{2}\sqrt{34}$$

$14\cdot 10 + 70 + 49 =$
$= 140 + 49$

$$R = \frac{17\cdot 34}{2\cdot 2\sqrt{33}} = \frac{17^2\cdot 2}{4\cdot\sqrt{33}} = \frac{289}{2\sqrt{33}}$$

$$R = \frac{289}{2\sqrt{33}}$$

$$S = \frac{1}{2}2R\cdot(x+y)\sin\alpha = \frac{289}{2\sqrt{33}}\cdot\frac{17}{2}\cancel{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{34}}}$$

$$S = \frac{289\cdot 17}{4\sqrt{33}} = \frac{4913}{4\sqrt{33}}$$

$289\cdot 17 = 2890 + 1400 + 560 + 63 = ~~2890~~ 2900 + 53 + 1960 =$

$= 2900 + 13 + 2000 = \boxed{4913}$

Ответ: $\alpha = \angle AEF = \arccos\sqrt{\frac{33}{34}}$ $\quad r = \frac{136}{\sqrt{33}}$ $\quad R = \frac{289}{2\sqrt{33}}$ $\quad S = \frac{4913}{4\sqrt{33}}$

Задание 6

все графики нарисованы нечестно.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$-\frac{b}{2a} = x_b = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$y_b = -\frac{15^2}{8} + \frac{15^2}{8}\cdot 2 - 17$

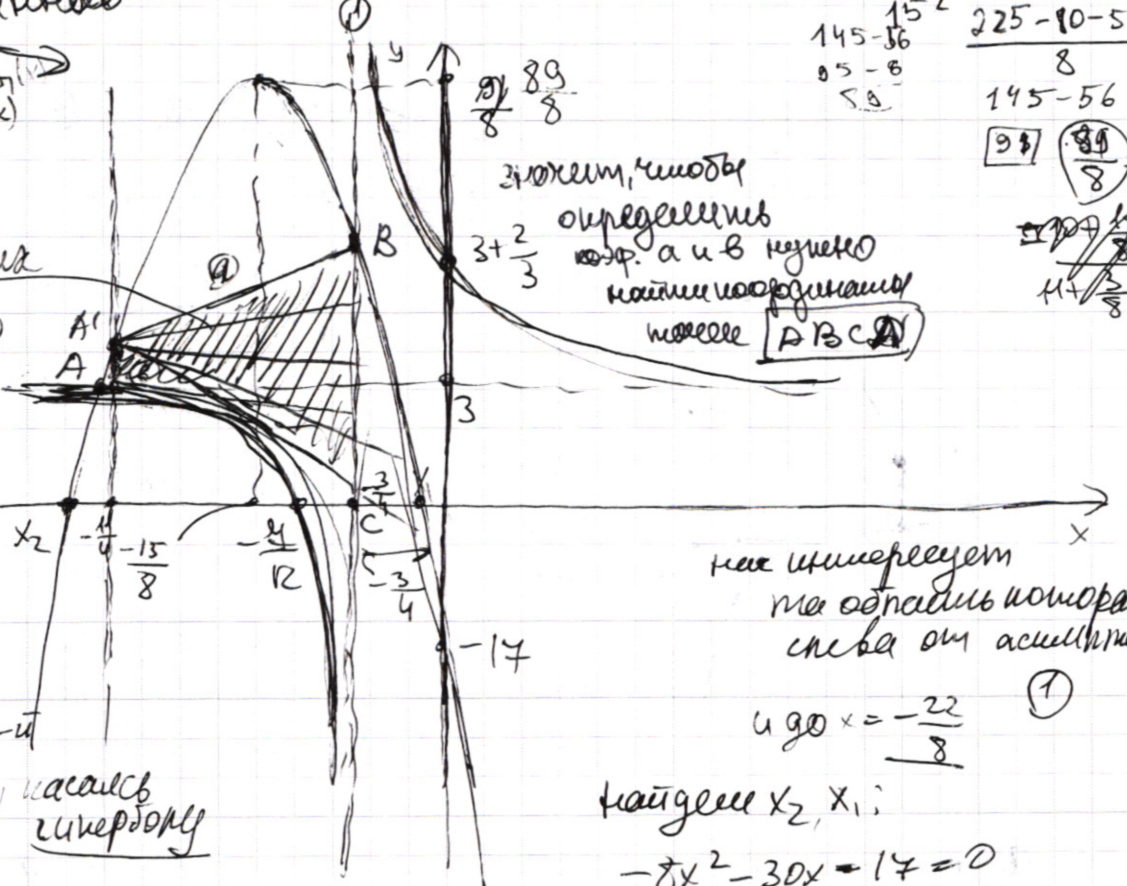
$\frac{225-80-56}{8}$

$145-56$

$\boxed{89}$ $\frac{89}{8}$

$11 + \frac{3}{8}$

нарисуем графики $f_1(x)$ $f_2(x)$



область подходящих к условию прямых

граничные прямые a и b

a проходит через точки касания границу с пар-й

b проходит касаясь гиперболу

значит, чтобы определить коэф. a и b нужно найти координаты точек $\boxed{ABCD}$

нас интересует та область которая слева от асимптоты ①

и до $x = -\frac{22}{8}$

найдем значение равное $f_2(x)$ при $x_0 = -\frac{11}{4}$

$f_2(x_0) = -8\frac{22^2}{8^2} + \frac{30\cdot 22}{8} - 17 =$

$= \frac{30\cdot 22 - 8\cdot 22^2 - 17\cdot 8}{8} =$

$22^2 + 22\cdot 6 -$

$x_0 > x_2$

найдем x_2, x_1:

$-8x^2 - 30x - 17 = 0$

$8x^2 + 30x + 17 = 0$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225-80-56}}{8}$

$= \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$

$x_2 = -\frac{15+\sqrt{89}}{8}$

сравним x_2 и $x_0 = -\frac{11}{4}$

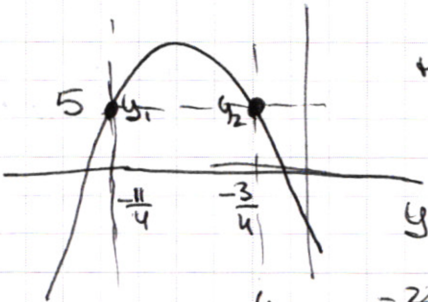
$9 < \sqrt{89} < 10$ $24 < \sqrt{89}+15 < 25$

$\Leftarrow$ $\frac{22}{8} < \frac{24}{8} < \frac{\sqrt{89}+15}{8} < \frac{25}{8}$

Продолжение задачи 6

~~еще покажем что точка A будет над гиперболой~~

еще поймем где будет находиться точка A отн-но гиперболы (выше или ниже ее при $x = -\frac{11}{4}$)



найдем y_1 и y_2

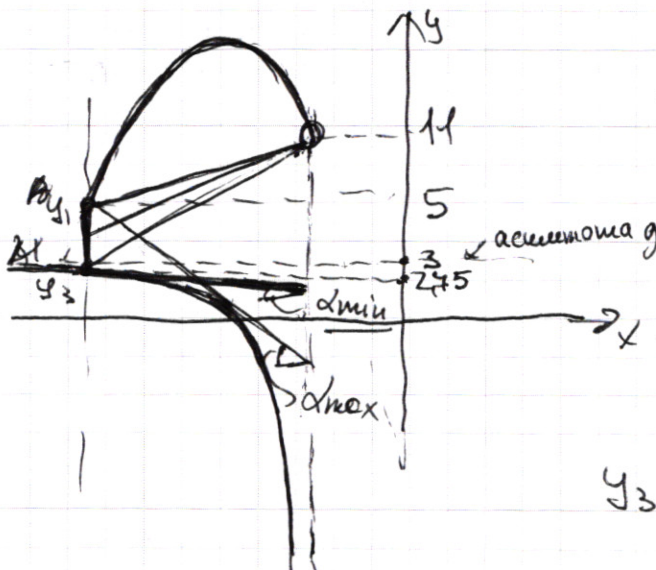
$$y_1 = f_2\left(x = -\frac{11}{4}\right) = -\frac{22^2}{8} + \frac{30\cdot 22}{8} - \frac{17\cdot 8}{8}$$

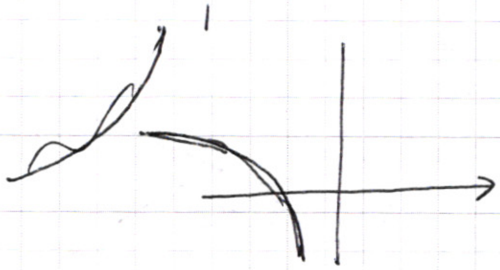
$$y_1 = \frac{-22^2 + 8\cdot 22 - 17\cdot 8}{8} = \frac{160+16-80-56}{8} =$$

$$= \frac{80-40}{8} = 5$$

$$y_2 = f_2\left(x = -\frac{3}{4}\right) = \frac{-36+30\cdot 6-17\cdot 8}{8} = \frac{180-36-56}{8} =$$

$$= \frac{100-12}{8} = \frac{88}{8} = 11$$





найдем y_3:

$$y_3 = 3 + \frac{2}{-4\cdot\frac{11}{4}+3}$$

$$y_3 = 3 + \frac{2}{3-11} = 3 - \frac{2}{8}$$

$y_3 = 2{,}75$ $\Rightarrow$ y_1 и y_3 левая граница области возможных прямых

коэф. a у нас должен изменяться так чтобы граничные прямые или касательной к гиперболе

$$a_{max} = \frac{11-5}{11-3}\cdot 4 = \frac{6}{8}\cdot 4 = 3$$

$$a_{min_1} = f_1'\left(x = -\frac{11}{4}\right) \quad f_1' = -\frac{2\cdot 4}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2} \Rightarrow f_1'\left(x=-\frac{11}{4}\right) = -\frac{8}{(3-11)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$a_{min_1} = -\frac{1}{8}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

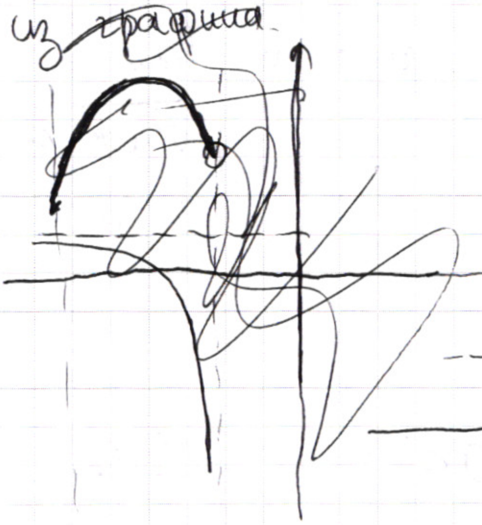
~~Стр~~ Продолжение задания 6.

$\boxed{f_1'(x) = -\frac{8}{(4x+3)^2}}$

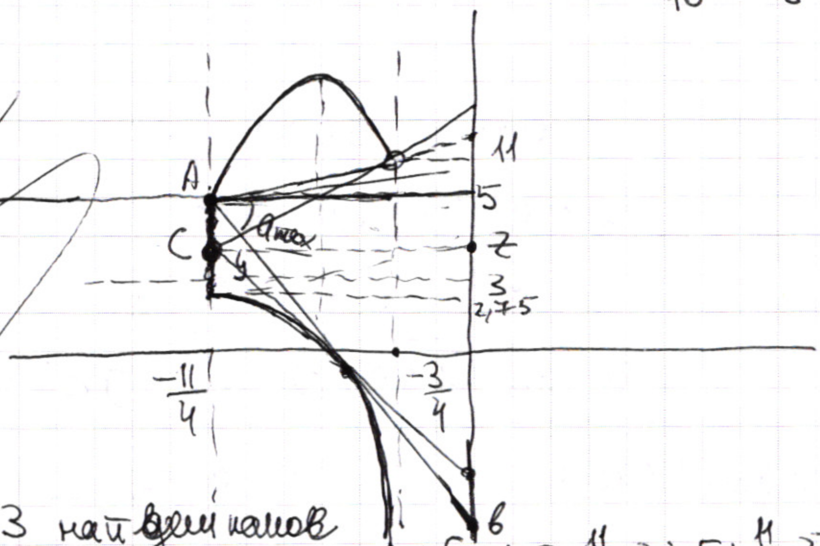
$\cancel{\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = f'(x)}$

$\cancel{\Delta f(x) = f'(x)\Delta x}$

из ~~графика~~



$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$



при $a = 3$ наибольших касаний должно быть b: $b \in \left[2{,}75 + \frac{11}{4}\cdot 3;\ 5 + \frac{11}{4}\cdot 3\right]$

$b \in [2{,}75 + 8 + 0{,}25;\ 5 + 8 + 0{,}25]$

$\underline{b \in [11;\ 13{,}25]}$

~~из значении при~~ ~~...~~ найдем a_{max} (максимальный тангенс по модулю)

$y = a_m x + b$ причем $a_m = \frac{b-5}{\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}(b-5)$ ← если прямая проходит через A

~~$y = f_1(x)$ и пересекаются только в одной точке~~ $b = 5 + \frac{11}{4} a_m$

Пусть граничная прямая, касающаяся гиперболы через C произвол.

тогда: $y = a_m x + b$ ~~$b =$~~ $a_m = \frac{b-2}{11} 4$ $b = 2 + \frac{11}{4} a_m$

$a_m x + 2 + \frac{11}{4} a_m = 3 + \frac{2}{4x+3}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение задачи 6.

$$12x+B+z=4amx^2+3amx+4xz+3z+\frac{11}{4}amx+\frac{33}{4}am$$

$$x^2 4am+x\left(3am+4z+\frac{11}{4}am-12\right)+3z+\frac{33}{4}am-11=0$$

т.к. одна точка кас-я то $D=0$

$33\cdot4=120$
132

$$\cancel{3am+4z+\frac{11}{4}a}\left(\frac{23}{4}am+4(z-3)\right)^2-16am\left(3z+\frac{33}{4}am-11\right)=0$$

$$(*)\quad\left(\frac{23}{4}\right)^2am^2+46am(z-3)+16(z-3)^2-48amz-132am^2+176=0$$

отсюда я могу ~~выр~~ выразить $\boxed{am(z)}$

решив квадратное ур-е am отн-но $\underline{z}$

найдя $a_m(z)$

я могу сказать что

$$\underline{\cancel{z}\in[2{,}75;5]}$$

~~и для каждого~~ z $\quad a\in\left[a_m(z);\ \frac{11-z}{11}\cdot4\right]$

и для каждого z: $\quad b\in\left[z+\frac{11}{4}a_m;\right.$

$$a\in\left[am(z);\ \frac{11-z}{2}\right]$$

$$b\in\left[z+\frac{11}{4}am(z);\ z+\frac{11-z}{2}\cdot\frac{11}{4}\right]$$

$$\frac{11\cdot11}{8}-\frac{11}{8}z$$

~~BE~~ значит Ответ: выразив из $(*)$ $am(z)$

для каждого $z\in[2{,}75;5]$

$$a\in\left[am(z);\ \frac{11-z}{2}\right]$$

$$b\in\left[z+\frac{11}{4}am(z);\ -\frac{3}{8}z+\frac{121}{8}\right]$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$(x-2y)^2 = (x+2)(y-1)$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$9(y-1)^2 = 25$

$z^{\log_{12} 13}$

может быть вот решения симметричны

$(y-1) = \frac{x-2y}{x+2}$

$x-2y = \sqrt{(x+2)(y-1)}$

$(x-2y)^2 = (x+2)(y-1)$

$(x-2)^2 + \frac{9(x-2y)^2}{(x+2)^2} = 25$

$(x^2-4)^2 + 9(x-2y)^2 = 25$

$\cancel{y-2}$

$x^2 \cancel{-4}$ $\quad 9(x-2y)^2 = (5-x^2)(21+x^2)$

симметрия

замена

$$\begin{cases} (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \\ (x-2y)^2 = (x+2)(y-1) \end{cases}$$

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$xy - x - 2y + 2 = 0$

$5e$

$\log_b a \log_c b = \log_b b \log_c a$

$(x-2)y = x-2$

$y = 1$

$\log_c b = \frac{1}{\log_b c}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$\log_b c \log$

$\frac{\log_a b}{\log}$

$\boxed{\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c}$

$\frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c$

$\log$

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$(c^a)^{\log_a b}$

$b^{\log_b a} = a$

$\log_c b \ln a = \ln b \log_c a$

$a = x^y$

a

$\log$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$a = x^y$

$y = \log_x a$

$y = \log_x a$

$\boxed{a = x^{\log_x a}}$

$\log_b b$

черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$ $\quad \underline{x > 2y}$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = -x - 2y + 2$

$25 - 16 = 9$

$x^2 + x + 4y^2 + 2y = -5xy + 2$

$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 4y^2 + 2y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 5xy + 2$

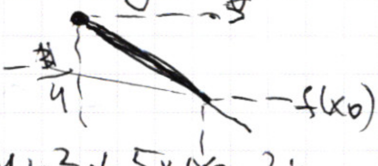
$\frac{5y \pm 3y}{2} = \underline{4y;\ y}$

$(x - 4y)(x - y) = -x - 2y + 2$ $\quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 = 5xy + 2 + \frac{1}{2}$

$(x^2 + x - 2) = -2y + 5xy - 4y^2$ $\quad xy - \cancel{x} + (x - 2y) + 2$

$x = 1$ $\quad xy - 2x + 2 + (x - 2y)$

$x = -2$ $\quad xy - 2(x - 1)$



$(x-1)(x+2) = -4y^2 + 5xy - 2y$ $\quad a^1 = a$ $\quad \underline{y(x)}$ – ф-е [illegible]

$-(x+y) - y + \underline{2 + xy}$ $\quad \underline{1 = \log_a a}$ $\quad y(x) =$

$x^2 - 4yx + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$ $\quad a^b \quad a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$x^2 - 5xy + x$ $\quad \log_c b \cdot \log_b a = \log_c a$

в окружности [illegible] ~~помогает~~

$\underline{f(x_0)}$ $\quad \frac{f(x + dx) - f(x)}{\cancel{dx}} = 0$ $\quad$ т.к. $x \geq 0$

ур-е прямой

$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$ $\quad 1 \geq -7^{(\log_{12} 5 - 1)}$ $\quad \log_{12} \frac{5}{12}$

$\boxed{y(x)} = a + bx$ $\quad 5y^2 + 4xy - 4x - 18y = 12 - xy + x + 2y - 2$

$b = f'(x)$ $\quad 5y^2 - 18y - 2y = 10 - 5xy + 5x$

$y(x) = a + f'(x)x$

$81 + 10 \quad 91$ $\quad y^2 - 4y = 2 - xy + x$

$5y^2 - 20y \quad 5y(y - 4) =$ $\quad y(y - 4) = 2 + x - xy$

$5(y^2 - 4y - 2) = 0$

и так понятно $\quad xy = 2 + x - y^2 + 4y$

$4 + 2 = 6$

$4y + x^2 - 10 - 5x + 5y^2 + 20y = -x - 2y + 2$

$\left(1 + 7^{\log_{12} \frac{5}{12}}\right) >$ $\quad x^2 + 9y^2 - 4x - 10 + 22y = 2$

$12^{\lg}$ теперь нужно через [illegible] $x^2 - 4x + 9y^2 - 22y = 28$

[illegible]

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{17}{60} - \frac{1}{13} = \underline{130+70+21-60}$

Задание 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x > 0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

нам известно что

$\frac{17}{60}$ $\frac{1}{13}$

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$\log_{12} z <$

$\Rightarrow (x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}5}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1\right)$

z

$\frac{1}{12} + \frac{1}{5}$ $\frac{1}{13}$

$\cancel{x^2+18x = z}$

$z \geq -z^{\log_{12}5} + z^{\log_{12}13}$

$z^{\log_{12}5} + z^{\log_{12}12} \geq z^{\log_{12}13}$

т.к. $z > 0$

$1 \geq -z^{\log_{12}\frac{5}{12}} + z^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$1 + z^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geq z^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$x^2+18x = z$

$\cancel{17 = 12^{0}}$ $12^{\log_{12} 17}$

$z^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq z^{\log_{12}13}$

$2,1 + 3,4$

$z \geq z^{\log_{12}5}\left(\log z^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1\right)$

$\underline{z > 0}$ $\cancel{z^{\log\frac{5}{12}}}$

$\cancel{1 - \log_{12}5 = \lg}$

что-то должно решаться легко

$(z^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq z^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1$

$z^a \geq z^b - 1$

$\sqrt{5} + \sqrt{12} + \sqrt{\ }$

$5^{\log_{12}z} + 12^{\log_{12}z} \geq 13^{\log_{12}z}$

$25 + 144 > 169$ $5+12 > 13$

$5^2 + 12^2 = 13^2$

1 a^x $(a-1)^x$

$125 + 144 \cdot 12 > 169 \cdot 13$

$5+12 > 13$

$5^3 + 12^3 > 13^3$

5, 13, 12

2197

$1440 + 288$

$144 \cdot 12$

$1640 + 88$

$1648 + 80$

$1690 + 300 + 180 + 24$

$1990 + 207$ $1997 + 200$

1728

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

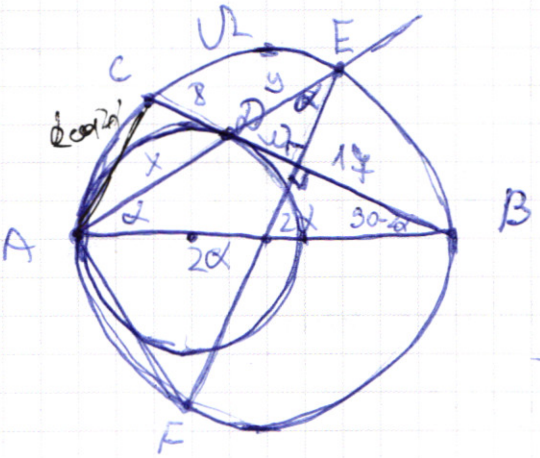
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(логарифм решен)

теперь давайте. либо уравнение-прямо либо систему

~~$x+2y=7$~~



$\angle AFE$

S_{AEF}

$8\cdot 17 = xy$

$12x+19+2$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$$\frac{8}{R\cos 2\alpha}=\frac{17}{2R}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{16}{17}$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{16}{17}$$

$20+13$

33

$$\boxed{x\in\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)}$$

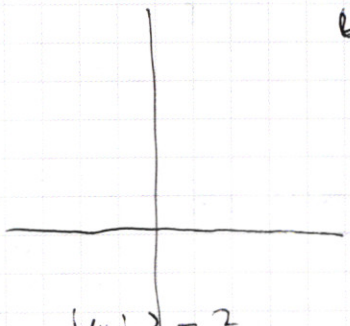
$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

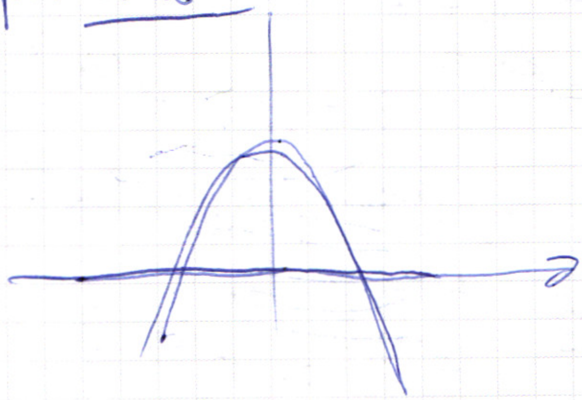
все пары a и b

$4(x+1)-1$

$-\frac{16}{8}+\frac{1}{8}$

$-2+\frac{1}{3}$

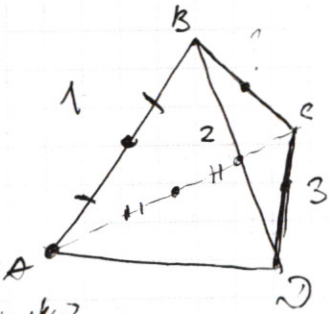




$4x+3=\frac{2}{3}$

$4x=\frac{2-9}{3}=-\frac{7}{3}$

$x=-\frac{7}{12}$



$(5+4)+5+5+2$

9 14 19

$x-2y$

$\boxed{y-x+1}$

$x-2y+2-2$

$x-2$

$x^2-4xy+4y^2$

b^2-4ab-

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)