МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

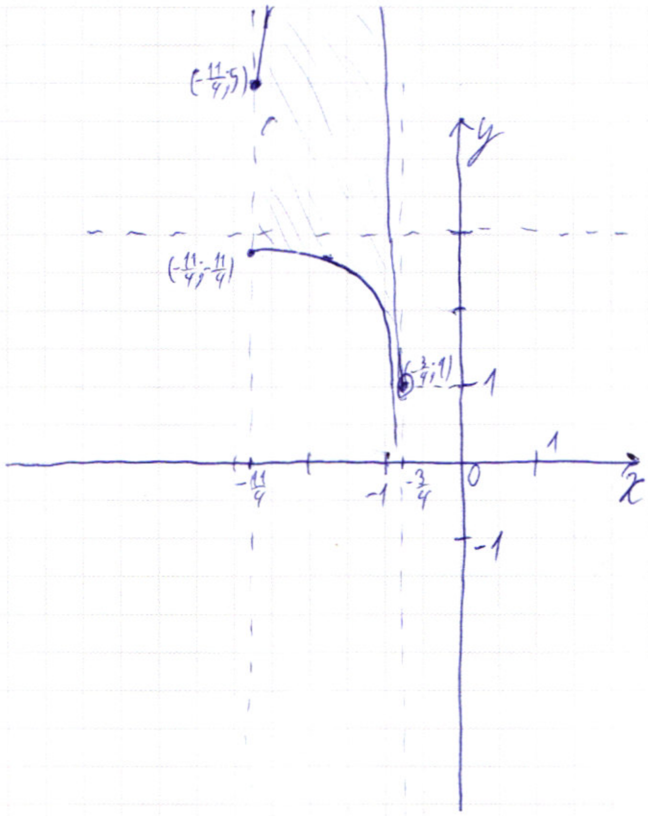
7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$



Выделим целую часть

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

Найдём асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{2}{4x+3}) = 3$ — по Oy

$4x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{4}$ — по Ox

$y=3+\frac{2}{4x+3}$ — гипербола

$y=-8x^2-30x-17$ — парабола ветвями вниз

с вершиной на $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$ (в рассматриваемой области)

Подставим границы нашей области в квадратный трёхчлен:

$-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17 = -\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17 = 1$

$-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17 = -\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17 = 5$

Парабола „обрывается" в точках

Построим график (см. выше). Наша прямая должна находиться в закрашенной области.

Рассмотрим крайний случай — прямую $y=-2x-\frac{1}{2}$.

Уравнение этой прямой мы получили из 2 точек, через которые она проходит — $(-\frac{11}{4};5)$ и $(-\frac{3}{4};1)$, и посмотрим, будет ли такая прямая пересекаться с гиперболой. ~~если прямая~~ Из геометрических соображений благодаря графику мы понимаем, что если эта прямая пересечёт гиперболу ~~дважды~~ два раза - неравенство неверно для любой прямой, если не пересечёт - таких прямых бесконечное множество, если же они будут иметь всего 1 общую точку - эта прямая будет единственной, что удовлетворяет неравенству.

$$\begin{cases} y = 3 + \frac{2}{4x+3} \\ y = -2x - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad -2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$$-4x = 7 + \frac{4}{4x+3} \quad | \cdot 4x+3$$

$$-16x^2 - 12x = 28x + 21 + 4$$

$$16x^2 + 40x + 25 = 0$$

$(4x+5)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$ - 1 точка $\Rightarrow$ прямая единственная

~~Отве~~

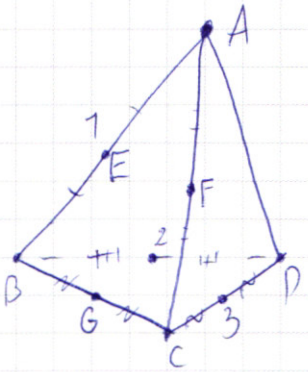
Ответ: $a = -2$; $b = -\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

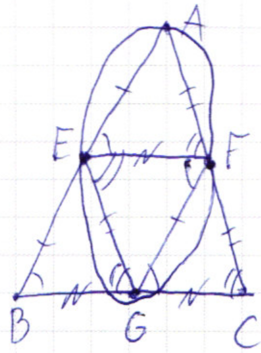


Дано:
AB=1
BD=2
CD=3

Найти:
BC-?
R_{min}-?

Решение:

~~1) Рассмотрим п-ть ABC~~



1) Точки A, E, F, G лежат в 1 п-ти, а также лежат на сфере ⇒
⇒ точки A, E, F, G лежат на одной окружности (сечение сферы любой п-тью - окружность)
2) Рассмотрим п-ть ABC:
по св. ~~окр~~ вписанного четырёхугольника $\angle EAF+\angle EGF=180°$
Если $\angle B=\alpha; \angle C=\beta \Rightarrow \angle A=180°-\alpha-\beta \Rightarrow \angle EGF=\alpha+\beta$
$\angle EGF+\angle BGE+\angle FGC=180°$
$\angle EGF=\alpha+\beta; \angle BGE=\beta; \angle FGC=\alpha$
$\Rightarrow \alpha+\beta=90° \Rightarrow \angle A=\angle EGF=90°$
AF ∥ EG (по ср. линии); EA ∥ GF ⇒ AFGE - параллелограмм с 2 углами по 90° ⇒ AFGF - прямоугольник

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$(x-2)(y-1)\geq 0$ $\quad x-2y\geq 0 \Rightarrow y<\frac{x}{2}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$4y^2+y(2-5x)+x^2+x-2=0$

$D=4-20x+25x^2-16x^2-16x+32$

$D=9x^2-36x+36$

$D=(3x-6)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{5x-2+3x-6}{8}=x-1 \\ y=\frac{2x+4}{8}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

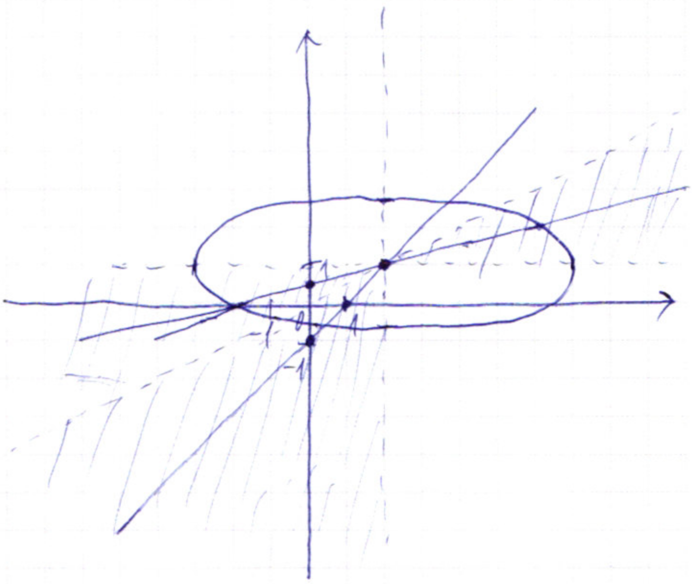
$x^2+9(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})^2-4x-18(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=12$

$x^2+\frac{9}{16}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}-4x-\frac{18}{4}x-9=12$

$\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{4}x-\frac{75}{4}=0 \quad |\cdot 16$

$25x^2-100x-300=0 \quad |:25$

$x^2-4x-12=0 \qquad D=16+48=60$



2 пересечения:

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ в правой верхней части графика

$y=x-1$ в левой нижней части

$x_1=\frac{4+\sqrt{60}}{2}=2+\sqrt{15}$ $\quad y=1+\frac{1}{4}\sqrt{15}$

$x_2=2-\sqrt{15}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4 (Нумеровать только чистовики)

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2+9(x-1)^2-4x-18(x-1)=12$

$x^2+9x^2-\cancel{2}^{18}x+9-4x-18x+18=12$

$10x^2-40x+15=0$

$2x^2-8x+3=0$

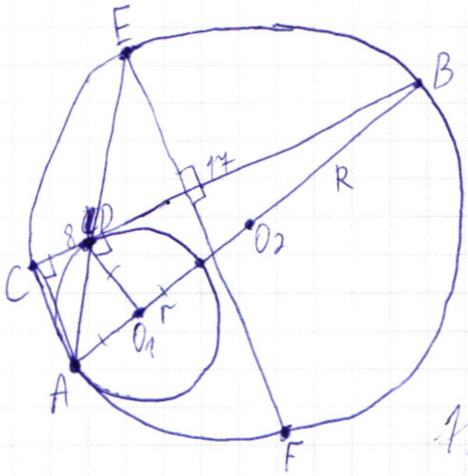
$D=64-24=40$

$x_1=\frac{8+2\sqrt{10}}{4}=2+\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$x_2=2-\frac{1}{2}\sqrt{10}$ $\quad y=1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Ответ: $x=2-\frac{1}{2}\sqrt{10}$ при $y=1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$ или $x=2+\sqrt{15}$ при $y=1+\frac{7}{4}\sqrt{15}$

№4



Дано:

$BD=17$

$CD=8$

Найти:

R - ?

r - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

~~Решение:~~

~~1) По Тh Пифагора~~

~~$(2\cancel{8}9-r^2-(2R-r)^2=289=4R^2$~~

~~$(2R-r)^2=289$~~

Решение:

1) По Th Пифагора в $\triangle BDO_1$:

$289+r^2=(2R-r)^2=4R^2-4Rr+r^2$

$289=4R^2-4Rr$

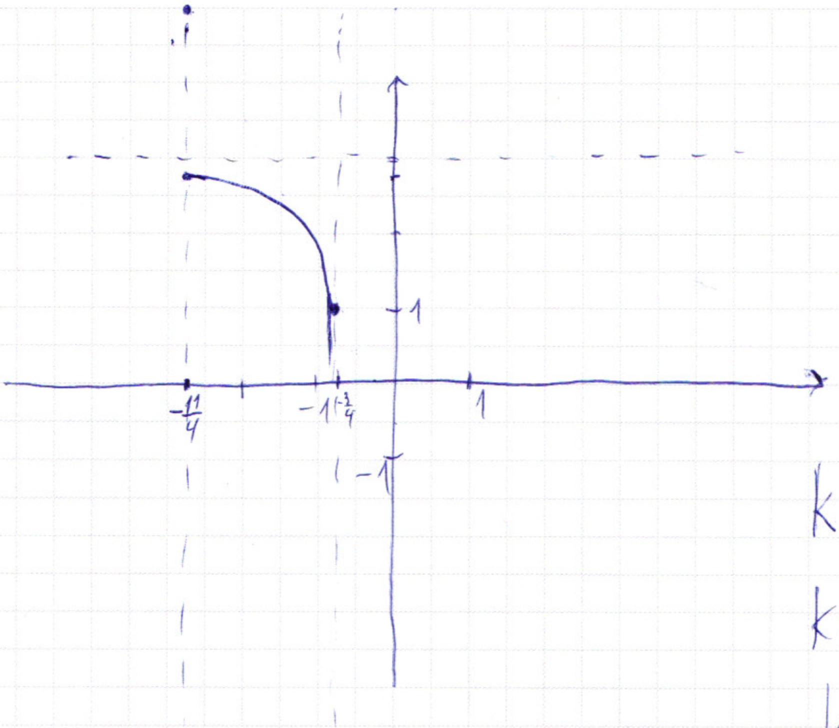
2) По подобию $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$:

$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 34R=50R-25r \Rightarrow r=\frac{16}{25}R$

$289=4R^2-\frac{64}{25}R^2$ $\quad 289=\frac{36}{25}R^2 \Rightarrow \frac{6}{5}R=17 \Rightarrow R=\frac{85}{6}$; $r=\frac{8}{5}\cdot\frac{17}{3}=\frac{136}{15}$

Ответ: $R=14\frac{1}{6}$; $r=9\frac{1}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



$3+\frac{2}{4x+3}$

$k=f'(x_0)$

$k=\left(3+\frac{2}{4x_0+3}\right)'$

$k=\left(\frac{2}{4x_0+3}\right)'$

$k=\frac{4x_0-5}{(4x_0+3)^2}$

уп $k=-2 \quad b=-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y=-2x-\frac{1}{2} \\ y=3+\frac{2}{4x+3} \end{cases}$$

$-2x-\frac{1}{2}=3+\frac{2}{4x+3}$

$-4x=7+\frac{4}{4x+3}$

$-16x^2-12x=28x+21+4$

$16x^2+40x+25=0$

$(4x+5)^2=0$

$x=-\frac{5}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 9 13

$f(\frac{1}{11})$

$f(\frac{4}{3}) = f(4$

$f(\frac{5}{3}) = f(5) + f(\frac{1}{3}) =$

$= f(5) + f$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

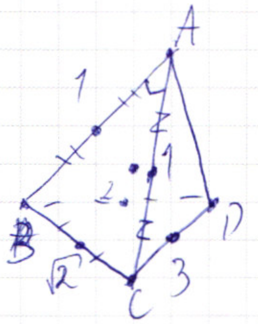
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

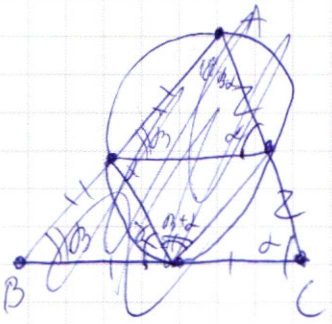
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

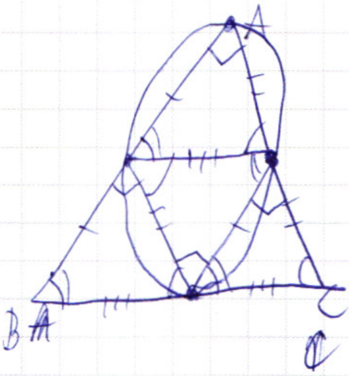
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

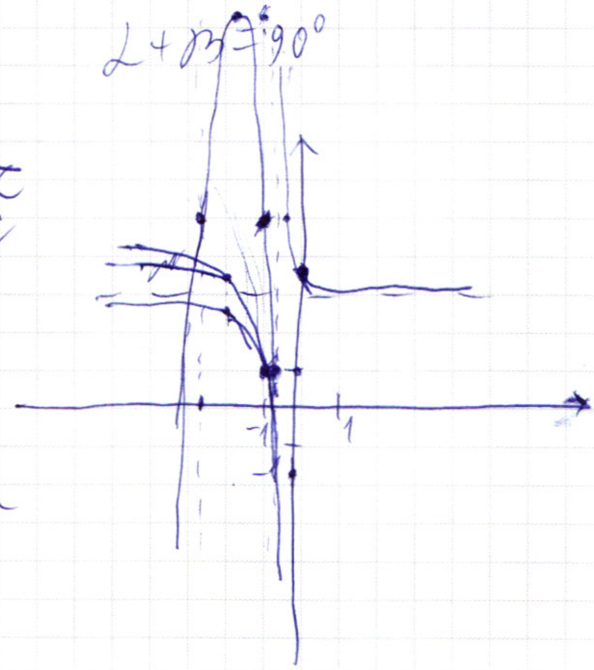






$2\alpha+2\beta=180°$

$\alpha+\beta=90°$



№6

$\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$\cancel{3+\frac{2}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17}$

$\frac{12x+11}{4x+3}\le -8x^2-30x-17$

$12x+11\le -(8x^2+30x+17)(4x+3)$

$12x+11\le -(32x^3+120x^2+68x+24x^2+90x+51)$

$\times\,\frac{28}{8}$ 224

$32x^3+144x^2+170x+62\le 0$

$16x^3+72x^2+85x+31\le 0$

$\cancel{221-404\ldots}$

$-(8x^2+30x+17)$

$-(8-30+17)=5$ $x_B=-\frac{30}{16}=-1\frac{7}{8}=-\frac{15}{8}$

$=-1{,}875$

$-8\cdot\frac{9}{16}+\frac{3}{4}\cdot30-17=$

$=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=\frac{36}{2}-17$ $y_B=-(15\cdot\frac{15}{8}-30\cdot\frac{15}{8}+17)$

$y_B=11\frac{1}{8}$ $y_B=15\cdot\frac{15}{8}+17=$

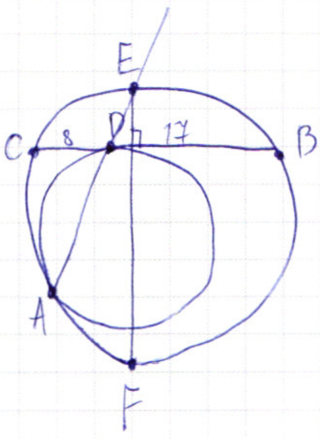
$=\frac{225}{8}+17=28\frac{1}{8}+17$

Точки параболы: $(-\frac{11}{4};5)$ и $(-\frac{3}{4};1)$

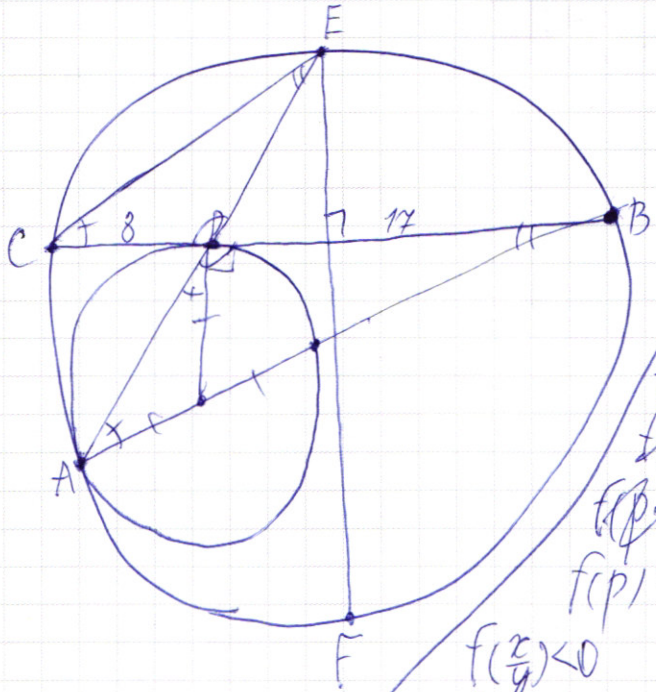
$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{11}{4}\cdot30-17=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=\frac{44}{2}-17=5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 17 \\ \hline +\,119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(16)=f(2)+f(2)+\dots$

$f(16)=$

$\cancel{2R\cdot 2r=289}$

$(2R-2r)\cdot 2R=289$

$4R^2-4rR=289$

$289+r^2=(2R-r)^2$

$289+r^2=4R^2-4Rr+r^2$

$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R}$

$34R=50R-25r$

$16R=25r$

$r=\frac{16}{25}R$

$4R^2-4\cdot\frac{16}{25}R^2=289$

$\frac{100}{25}R^2-\frac{64}{25}R^2=289$

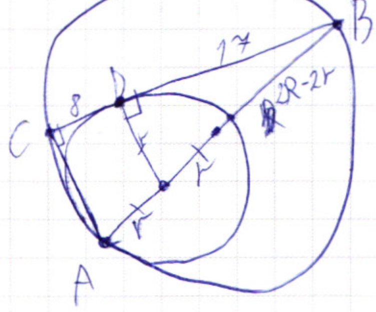
$\frac{36}{25}R^2=289$

$\frac{6}{5}R=17$

$R=\frac{85}{6}$

$r=\frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6}=\frac{8}{5}\cdot\frac{17}{3}=\frac{136}{15}$

$R=14\frac{1}{6}\quad r=9\frac{1}{15}$



$\cancel{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1\\ 2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1\end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta$

$\left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}\\ \cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta+\frac{2}{\sqrt5}\sin2\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\quad |\cdot\sqrt5\\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta-\frac{2}{\sqrt5}\sin2\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\quad |\cdot\sqrt5\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\cos2\beta-2\sin2\beta-\sqrt5\sin2\alpha=\frac{4}{\sqrt5}\\ \cos2\beta+2\sin2\beta-\sqrt5\sin2\alpha=\frac{4}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos2\beta-2\sqrt{1-\cos^2 2\beta}-\sqrt5\sin2\alpha=\frac{4}{\sqrt5}\\ \cos2\beta+2\sqrt{1-\cos^2 2\beta}-\sqrt5\sin2\alpha=\frac{4}{\sqrt5}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin2\alpha\cos2\beta+\sqrt{1-\cos^2 2\beta}\cdot\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}\\ \sin\end{array}\right.\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x=t \qquad t>0$

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t \geq t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$

$t \geq t\cdot t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-t\cdot t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$

$1 \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$

$\log_a b=c$

$a^c=b \qquad 12^{\log_{12}t}=t$

$12=5^{\log_5 12}$

$5^{\log_5 12\cdot\log_{12}t}=t$

$5^{\log_{12}t}=t^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$5^{\log_{12}t}=t^{\log_{12}5}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$y(4y-3x+2)+x^2+x-2=0$

$4y^2-4xy+x^2=xy-x-2y+2$

$4y^2-5xy+2y+x^2+x-2=0$

$a=4 \quad b=2-5x \quad c=x^2+x-2$

$D=4-20x+25x^2-16x^2-16x+32=9x^2-36x+36=(3x-6)^2$

$3x-6\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{5x-2+3x-6}{8}=x-1 \\ y=\frac{2x+4}{8}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$$\begin{cases} (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \\ (y-1)(x-2)\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)