МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$tg\alpha$ - ?

1) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) +$
$+ \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta$;

$\cos 4\beta + 1 = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1 = 2\cos^2 2\beta$

$2 \cdot \cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta +$
$+ \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) =$
$= 2\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5} \Rightarrow \quad 2\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \quad \cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2) $\sin 2\beta = \sqrt{\frac{25 - 4\cdot 5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, если $\angle 2\beta$ - в 1 четверти.

3) $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \quad \sin 2\alpha \cdot 2 + \cos 2\alpha + 1 = 0$.

4) $\cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$.

$2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$, т.к. $tg\alpha$ существует, то $\cos\alpha \neq 0$.

$1 + 2tg\alpha = 0 \Rightarrow \quad tg\alpha = -\frac{1}{2}$.

5) если $\angle 2\beta$ - в 4-ой четверти, то $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Тогда, $\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \quad \sin 2\alpha \cdot 2 - \cos 2\alpha + 1 = 0$.

№1 (продолжение)

б) $2\cdot\sin 2\alpha + 1 - \cos 2\alpha = 0.$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0.$; ~~($ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, т.к. $tg\alpha$ сущ., то сущ. $ctg\alpha$, т.е. $\sin\alpha \neq 0$)~~

$2ctg\alpha + 1 = 0.$

$ctg\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow tg\alpha = -2.$

$2(1-\cos^2\alpha) + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \Rightarrow -\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0.$

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0. \Rightarrow D = 4\sin^2\alpha + 4 = 4(\sin^2\alpha + 1)$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{2\sin\alpha + 2\sqrt{\sin^2\alpha+1}}{2} = \sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha+1} \\ \cos\alpha = \sin\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha+1} \end{array}\right.$$

~~tgα~~ $\left[\begin{array}{l} 1 = tg\alpha + \sqrt{tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1} \\ 1 = tg\alpha - \sqrt{2tg^2\alpha+1} \end{array}\right.$ – невозможно, т.к. $tg\alpha - \sqrt{2tg^2\alpha+1} < 0.$

$(1 - tg^2\alpha) = \sqrt{2tg^2\alpha+1} \Rightarrow 1 - 2tg^2\alpha + tg^4\alpha = 2tg^2\alpha + 1$

$tg^4\alpha - 4tg^2\alpha = 0. \Rightarrow tg^2\alpha(tg^2\alpha - 4) = 0.$

$tg\alpha = 0$

$tg\alpha = \pm 2$

$2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$, если $\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

если $\sin\alpha \neq 0 \Rightarrow 2 + 4\,ctg\alpha = 0 \Rightarrow ctg\alpha = -\frac{1}{2}$

Ответ: $tg\alpha = -2$, ~~$tg\alpha = -\frac{1}{2}$~~ и $tg\alpha = -2$

$tg\alpha = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4-4+9(y^2-2y+1)-9=12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$ Замена: $\begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases}$

Заметим, что $\begin{cases} 2b=2y-2 \\ a=x-2 \end{cases} \Rightarrow x-2y=a-2b.$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2-5ab+4b^2=0.$

решим квадратное уравнение относительно a.

$D=25b^2-16b^2=9b^2=(3b)^2$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{5b+3b}{2}=4b \\ a=b \end{array}\right.$$ (т.к. $a=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2}$, то ~~ниже~~ ~~Анализ~~ $\sqrt{(3b)^2}=|3b|$ $\pm$ учитывает все случаи)

2) $a=4b \Rightarrow 4b-2b\geq 0 \Rightarrow 2b\geq 0 \Rightarrow b\geq 0.$
$a\geq 0$

$a^2+9b^2=25 \Rightarrow 25b^2=25 \Rightarrow \begin{cases} b=\pm 1 \\ b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1. \\ a=4 \end{cases}$

Обрат. замена: $\begin{cases} 4=x-2 \\ 1=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

№2 (продолжение)

$a = b \Rightarrow \quad b - 2b \geq 0 \Rightarrow \quad -b \geq 0 \Rightarrow \quad b \leq 0.$

$10b^2 = 25 \Rightarrow \quad b^2 = \frac{25}{10} \Rightarrow \begin{cases} b = \pm\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{\sqrt{10}}$

$a = -\frac{5}{\sqrt{10}}.$

Обр. замена:

$$\begin{cases} -\frac{5}{\sqrt{10}} = x - 2 \\ -\frac{5}{\sqrt{10}} = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array} \right. \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$.

Т.к. $\log_{12}(x^2+18x)$ существует, то $x^2+18x>0$.

Значит $|x^2+18x|^{\log_{12}13} = (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Замена: $x^2+18x=t$.

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$; $t^{\log_{12}13} = 13^{\log_{12}t}$.

$5^{\log_{12}t}+t \geq 13^{\log_{12}t}$; Пусть $\log_{12}t=a$

$5^a+12^a \geq 13^a$. $\qquad t=12^a$.

$5^a+12^a \geq (12+1)^a = 12^a+3\cdot 12^{a-1} \dots +3\cdot 12+1$.

$5^a \geq 3\cdot 12^{a-1} \dots +3\cdot 12+1$

- если $a-1>1$, т.е. $a>2$, то $5^a < 3\cdot 12^{a-1}$.

  значит $a>2$ не подходят.

- если $a=2$, то $5^2+12^2=13^2 \to$ подходит

- если $a<2$, то $\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$.

  если $a\leq 0$, то $\left(\frac{5}{13}\right)^a \geq 1$.

  если $0<a<2$ $\qquad$ - подходит.

Обр. замена: $\log_{\sqrt{12}} t \le 2 = \log_{\sqrt{12}} 144$.

$0 < t \le 144$

$$\begin{cases} x^2+18x-144 \le 0 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$$

$x^2+18x-144=0$

$D = 4 \cdot 15^2$

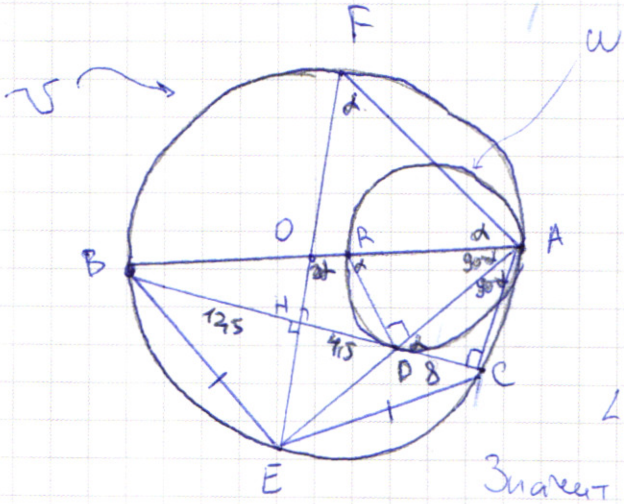
$x = \frac{-18+30}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$x = \frac{-48}{2} = -24$.

$$\begin{cases} (x-6)(x+24) \le 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

№4.



$AB \cap \omega = R$.

т.к. $v \cap \omega = A$, то

центр ω лежит на AB, то есть AR – диаметр ω.

$\angle RDA = 90$.

Пусть $\angle ARD = \alpha \Rightarrow \angle ADC = \alpha$ ($\angle$ между кас и хордой)

$\angle RAD = \angle DAC = 90 - \alpha \Rightarrow BE = EC$

Значит $\triangle BEC$ р/б ($BE = EC$)

$EH \perp BC \Rightarrow EH$ сер. пер. к BC, но центр v лежит на сер. пер. к $BC \Rightarrow EF \cap AB = O$ – O центр v

т.к. $HE \perp BC \rightarrow$ то HE медиана $\triangle BEC \Rightarrow BH = HC = \frac{25}{2} = 12,5$

т.к. $\angle EAF = 90$ (EF – диаметр) – $\angle OAF = \alpha = \angle AFO$ ($\triangle OFA$ р/б)

* $17^2 = BR \cdot (AB)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

Пусть R - радиус Ω_2, r - радиус ω

$(2R-2r)2R = 17$

$4R^2 - 4Rr - 17^2 = 0$.

~~$D = 16 + 4\cdot 17^2 = 4(4r^2+17^2)$~~

~~$R = 4r + 2\sqrt{4r^2+17^2}$~~

* $EF \perp BC$, $AC \perp BC$ => $ACEF$ трапеция, т.к. она вписана в окр-ть, то $FA = EC$,

$\angle AFE = \alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 6xy + 2x + 6y + 3y^2 = 0.$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 0.$

$2(x+3y)$

$f(6) = f(6)$

$2x(1-3y)$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ ~ 3

$5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} \geq -t$ < 0

$y = x^2 + 18x$

$t > 0.$

$y' = 2x + 18 = 0$

$5^{\log_{12} t} \vee t^{\log_{12} 13}$

$x = -9.$

$y_{min} = 81 - 18 \cdot 9 = 81 - 2 \cdot 81 = -81.$

$\log_{12} 5^{\log_{12} t} \vee \log_{12} t^{\log_{12} 13}$

$2 \cdot 9$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

$\log_{12} t \log_{12} 5 \vee \log_{12} t \cdot \log_{12} 13$

$\log_{12} 5$

$5^{\log_{12} t} = t^{\log_{12} 5}.$

$\cancel{\log_{12} t} ($

$\log_{12} 13 > 1$

$\cancel{\log_{12} 5 \cdot \log_{12} t} =$

$\log_{12} 5 < 1.$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 = \log_{12} t \cdot \log_{12} 5.$

$\underset{>0}{t} \geq \underbrace{t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5}}_{<0}.$

$\cancel{t \geq 1}.$ $t \geq 1.$

$\boxed{0 < t \leq 1.}$

$13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t}.$

$t > 1.$

$2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$

$13^{2 \cdot \log_{12} t} - 2(13 \cdot 5)^{\log_{12} t} + 25^{\log_{12} t}$

$\cancel{2 - \sin^2\alpha}.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$(x-2y)^2 = \sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$\frac{12x+33-22}{4x+3}$$

25
$+16$
41

$$\frac{12x+9+2}{4x+3} =$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25.$$

$x-2=a$ $\quad$ $x-2y.$

$y-1=b.$ $\quad$ $x-2y-4=a-2b.$

$x-2=a$ $\quad$ $x-2y=a-2b+4.$

$2y-2=2b$ $\quad$ $(a-2b+4)^2.$

$$\begin{cases}(a-2b+4)=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25\end{cases}$$

$$a^2-5ab+4b^2+8a-16b+16=0$$

$$\begin{cases}a^2-4ab+4b^2+8(a-2b)+16=ab. \\ a^2+9b^2=25\end{cases}$$

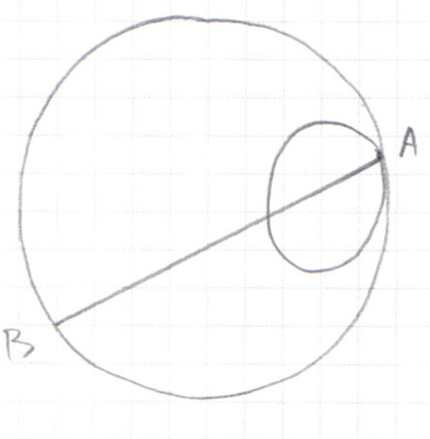
$$9b^2+4ab-4b^2-8a+16b-16=25-ab.$$

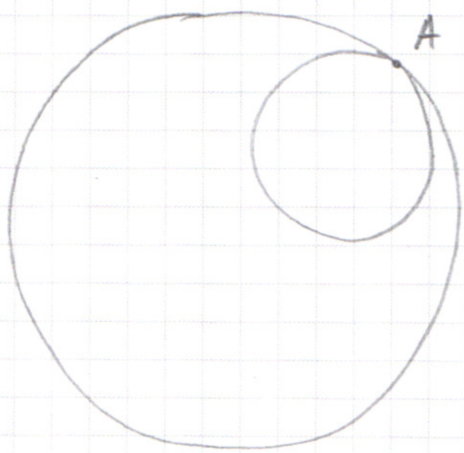
$$5b^2+5ab-8a+16b-41=0.$$

$$2a^2+13b^2-5ab+8a-16b\cancel{+16}=\cancel{25}\ 9.$$

$$(a-3b)^2=a^2-6ab+9b^2$$

$$(a-3b)^2+6(a-2b+4)^2=25.$$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$ $5b^2 + 5ab = 25$

$D = 25b^2 - 24b^2 = b^2$

$\begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$ $a = \frac{5b \pm b}{2} = (a+b)^n = a^n + 3a^{n-1}b \dots +$

$(a^2+2ab+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$ $tg\alpha = 1 + \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}$

$D = 4\sin^2\alpha - 4 = 4$

$\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$ $38t^2$ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$\cos\alpha = -2\sin\alpha$

$1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos = 0$ $13^2 + 12^2$

$-2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 2 = 0$ $13^2 + 4\cdot 12^2 = 4\cdot 9^2 + 4\cdot = 4(81+144)$

$5^a + 12^a \geq (12+1)^a = 12^a + 3\cdot 12^{a-1} + \dots + 3\cdot 12 + 1 = 4\cdot 15$

$(a-1) > 2$ $\begin{array}{r} 144 \\ +\ 81 \\ \hline 225 \end{array}$

a $a - 1 > 1$ 125

$a > 2$ $25 \cdot 25 \vee 3\cdot 12^3$

$125 \vee 3 \cdot 144$

$\frac{5}{13}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$ $a \cdot \log_2 \frac{12}{13} \cdot \log_2 \alpha \vee \log_2 \frac{2}{3}$

$\frac{5^a + 12^a}{13^a} \geq 1$ $\frac{5}{13}$ $\left(\frac{12}{13}\right)^a > \frac{2}{3}$

$5^a + (13-1)^a = 5^a + 13^a - 3\cdot 13^{a-1}$ $12^a \cdot 3 \vee 2\cdot 13^a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$64+x^2=DA^2$

$64+x^2+RD^2=2r^2$

$2\sin\alpha\, r=AD$

$AC=$

$2R\sin(2\alpha-90)=AC$

$2R\sin($

$-2R\cos 2\alpha=AC$

$RD=2r\cos\alpha$

$4R^2\cos^2 2\alpha+4r^2\cos^2\alpha=4R^2$

$(2R-2r)\,2R=17^2$

$4R^2-4Rr=17^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$. $\quad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \underline{\cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta} + \sin 2\alpha =$

$\cancel{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \cdot \sin}$

$\sin(2\alpha)(\cos 4\beta + 1) = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1 = \cos^2 2\beta + \cos^2 2\beta =$
$= 2\cos^2 2\beta$.

$\sin 2\alpha \cdot 2 \cdot \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta)$

$= 2\cos 2\beta \cdot (\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}) = -\frac{4}{5}$.

$x - 2y = \sqrt{y(x-2) - (x-2)}$

$2\cos 2\beta = \frac{\sqrt5 \cdot 4 2}{5}$.

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$.

$1 - \sin^2\alpha + 1 \cdot \sin^2\alpha =$

№ 2. $\quad 4+9=-13$

$x^2 - 4x + 4 - 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 - 12 = 0$. $=$

$3 \cdot 2 \cdot 3$

$\boxed{(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25.}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{\sqrt5}{5}$. $\quad \sin 2\beta = \sqrt{\frac{25-20}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} =$
$= \frac{\sqrt5}{5}$.

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$.

$\cos^2\alpha$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$. $\quad 2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$
$1 + 2 \cdot tg\alpha = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

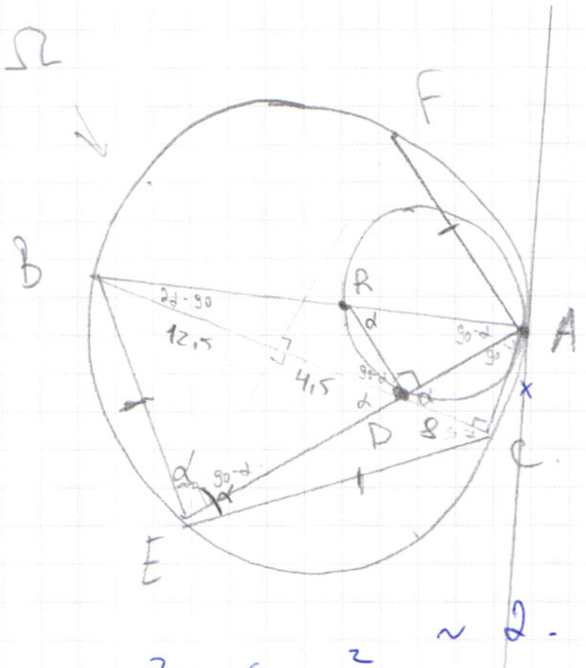
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x \qquad \log_{12}\left(5^{\log_{12}t}+t\right) \geqslant \log_{12}13\cdot\log_{12}t$$

т.к. $x^2+18x>0$, то $|x|>0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18) \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13} \qquad x(y-1)-2(y-1)$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geqslant t^{\log_{12}13} \qquad (x-2)(y-1).$$

$R,\ r,\ \angle AFE,\ S_{AEF}$



$BR\cdot 2R = 17^2.$

$(2R-2r)2R = 17^2.$

$DA^2 = 64+x^2.$

$25^2+x^2 = (2R)^2.$

$x^2+64 = DA^2.$

$\frac{2r}{DA} = \frac{RD}{8}$

$RD = \sqrt{2R}=$

$x-2=a$

$2y-2=2b$

$x-2y=a-2b+4$

$17+8 = 25$, $12{,}5$

№ 2.

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=25. \Rightarrow (x-2)^2+9y^2-18y+9=25.$$

$$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \qquad 9(y^2-2y+1)=x$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25 \qquad 5x(x+2)+15y($$

$$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2.$$

$$(x-2+3y-3)^2=(x-2)^2+6(x-2)(y-1)+(3y-3)^2$$

$$(x+3y-5)^2=\underbrace{(x-2)^2+6(x-2y)^2+(3y-3)^2}_{25}$$

$$x^2+2x(3y-5)+9y^2-30y+\cancel{25}=\cancel{25}+6(x^2-4xy+4y^2)$$

$$\cancel{x^2}+6xy-\cancel{10x}+9y^2-\cancel{30y}=\cancel{6x^2}-24xy+24y^2.$$

$$5x^2-30xy+10x+30y+15y^2=0.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

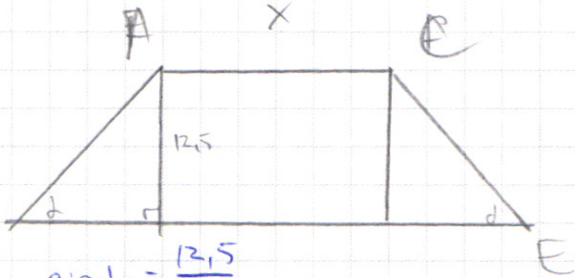
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(2R-2r)\cdot 2R = 17$.



$2\sin 2\alpha \cdot 2R = 17$.

$2R\sin(90-\alpha) = AF$.

$\sin\alpha = \frac{12,5}{AF}$.

$2R\cos\alpha = AF$

$AF = \frac{12,5}{\sin\alpha}$.

$2R\cos\alpha = \frac{12,5}{\sin\alpha}$.

$R\sin 2\alpha = 12,5$.

$x-2y = a-2b+4$.

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$

$4b^2-16b+16-16$

$2\cdot 2\cdot 4$

$(x-2y)^2 = ab$.

$\begin{cases} (a-2b+4)^2 = ab \\ a^2+9b^2 = 25 \end{cases}$

$(a-2b)^2+8(a-2b)+16 = ab$.

$a^2-4ab+4b^2+8a-16b+16 = ab$

$(a+3b)^2 = a^2+6ab+9b^2$

$a^2-5ab+4b^2+8a-16b+16=0$.

$\frac{(a+3b)^2-25}{6} = ab$

$(a+4)^2+(2b-4)^2-16-5ab=0$.

$5^{\log_2 t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$\Rightarrow$ log

$t\,\cancel{\leq 0}$

$\boxed{t\leq 1}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}13}+t \geq 0$.

$t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5} \leq t$.

$t > 1$.

<0

$13^{\log_{12}t} - 5^{\log_{12}t} \leq t$.

>0

$y = x^{\log_{12}13}-x^{\log_{12}5}$

$\log_{12}t = a$.

$13^2-5^2 \leq 144$.

$y' = \log_{12}13\left(x^{\log_{12}\frac{13}{12}} - \log_{12}5\cdot x^{\log_{12}\frac{5}{12}}\right) = 0$.

$13^3-5^3 \leq 12^3$

$\log_{12}13\cdot x^{\log_{12}\frac{13}{12}} = \log_{12}5\cdot x^{\log_{12}\frac{5}{12}}$.

$t = 12^a$.

$13^a-5^a \leq 12^a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$13 \cdot 12^x$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\cancel{\log_{\sqrt{12}}(\log_{\sqrt{12}} 13) + \log_{\sqrt{12}} x \cdot \log_{\sqrt{12}} \frac{13}{12} = \log_1}$

$12^x \geq 13^x - 5^x$ $\quad x = 2.$

$13^a - 5^a \leq 12^a.$

$12($

$(a^x)' = a^x(\ln a)$

$12^x + 5^x \geq 13^x$

$12^x \cdot \ln 12 > 13^x \ln 13 - 5^x \ln 5$

$144 \cdot 12 + 125 \vee 169 \cdot 13$

$12^x + 5^x \geq 13^x$

$144 \cdot 12 = 1628$, $1628 + 125 = 1753$; $169 \cdot 13 = 2197$; $\frac{1628}{2197}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x \geq 1.$

$\frac{144}{169} > \frac{1}{2}.$

$\left(\frac{12}{13}\right)^x$ $\quad \left(\frac{5}{13}\right) < \frac{1}{2}.$

$\left(\frac{12}{13}\right)^3 > \frac{1}{13}$

$12^3 \cdot 13 \vee 13^3 \cdot x.$

$\frac{12^4 + 5^4}{13^4} \vee 1$

$a - 2b = x - 2y - 4$

$a + 3b = x - 2 + 3y$

$6(x-2y)^2 = 6ab$

$\left.\begin{array}{l} a = x-2 \\ 3b = 3y - 2 \end{array}\right| \Rightarrow$ $\quad a = x-2$, $\quad 2b = 2y - 2.$

$(x+y-3)^2$

$a - b$

$(a+3b)^2 = a^2 + 6ab + b^2.$

$\left\{\begin{array}{l} a = x-2 \\ 2b = 2y - 2 \end{array}\right| \Rightarrow$ $\quad a - 2b = x - 2y - 2 + 2.$

$a - 2b$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)