МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

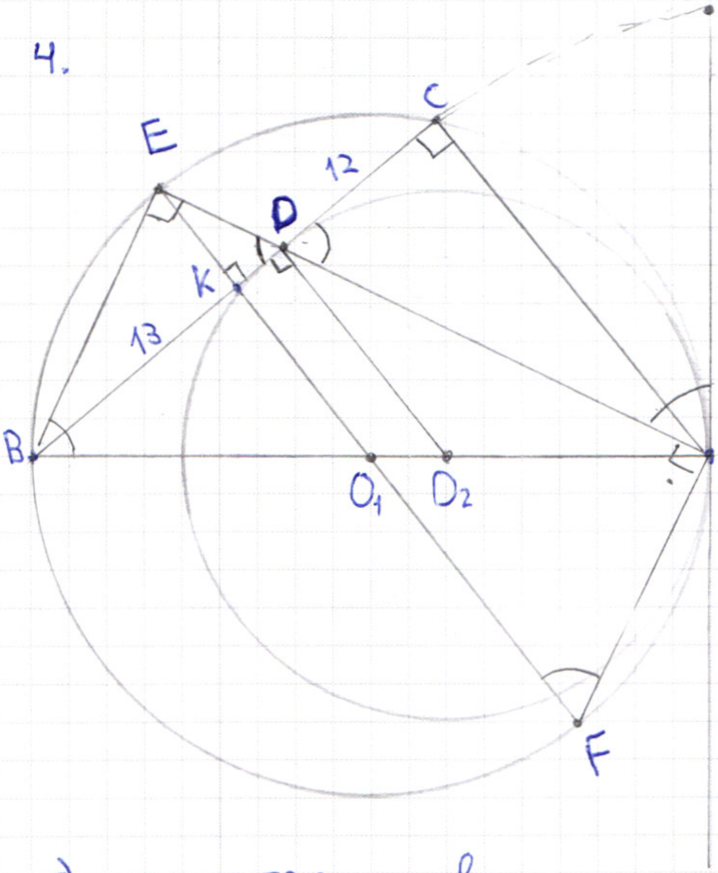
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Найти: R; r; $\angle AFE$; S_{AFE}

Решение:

1) Пусть O_1; O_2 – центры Ω и ω соответственно

2) $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB окр-ти Ω
Аналогично $\angle BEA = 90^\circ$

3) $\angle AFE = \angle ABE$, т.к. опир. на $\breve{AE}$ окр-ти Ω

4) Пусть T – т. пересечения DC и кас-ой к обеим окр-ям в т. A, тогда $\angle AFE = \angle TAD$, как угол между хордой и касат-ой и $\angle TAD = \angle TDA$, т.к. BC – тоже кас-ая

5) $\angle TDA = \angle EDB$, как вертик-ые

6) ~~Рассм~~ Пусть т$\{K\} = BC \cap AF$, тогда р-м $\triangle EKD$ и $\triangle EAF$, с общим углом $\angle KED$ и равными $\angle EDK = \angle EFA$
$\Downarrow$
$\triangle EKD \sim \triangle EAF$, з-н $\angle EAF = 90^\circ = \angle EKD$, т.е. EF проходит через O_1 как диаметр.

7) Т.к. EF проходит через O_1 и $EF \perp BC$, то $BK = KC = \frac{13+12}{2} = 12\frac{1}{2}$
и $KD = 13 - 12\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

8) Р-м $\triangle BED \sim \triangle EKD \Rightarrow \frac{KD}{ED} = \frac{ED}{BD} \Rightarrow ED^2 = 13 \cdot \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$
$ED = \sqrt{\frac{13}{2}}$

4 (продолжение)

9) $BD \cdot DC = ED \cdot DA$, из степени точки D, Ω.

$\Downarrow$

$$DA = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{\frac{13}{2}}} = \frac{12 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 12\sqrt{26}$$

10) Т.к. $\triangle BEK \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{BK}{BE} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow BE^2 = 13 \cdot \frac{25}{2} = \frac{13 \cdot 25}{2}$

$$BE = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$$

11) Т.к. $\triangle BED \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{BE}{EA} = \frac{ED}{BE} \Rightarrow EA = \frac{\frac{13 \cdot 25}{2}}{\sqrt{\frac{13}{2}}} = 25\sqrt{\frac{13}{2}}$

12) Из прямоуг. $\triangle BEA$, по т. Пифагора

$$AB^2 = BE^2 + EA^2 = 25^2 \cdot \frac{13}{2} + 25 \cdot \frac{13}{2} = 25 \cdot \frac{13}{2} \cdot 26 = 25 \cdot 13^2$$

$$AB = 5 \cdot 13 = 65$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{65}{2}$$

13) Т.к. BC - кас., то $O_2D \perp BC$ и $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по двум углам

$\Downarrow$

$$BO_2 = \frac{65 \cdot 13}{25} = \frac{13^2}{5} \Leftarrow \frac{BO_2}{BD} = \frac{BA}{BC}$$

$$O_2A = r = BA - BO_2 = 65 - \frac{169}{5} = \frac{156}{5} = r$$

14) $\angle AFE = \angle ABE = \arcsin \frac{EA}{BA} = \arcsin \frac{25\sqrt{\frac{13}{2}}}{65} = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{\frac{13}{2}}}{13}\right) = \angle AFE$

15) $\triangle BEA = \triangle FAE$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow S_{BEA} = \frac{BE \cdot EA}{2} = \frac{5 \cdot 25 \cdot \frac{13}{2}}{2} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{65}{2}$; $r_\omega = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{13/2}}{13}\right)$, $S_{AFE} = \frac{1625}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right], p\in P$

Найти кол-во $(x;y)$ $4\le x\le 28$ $4\le y\le 28$ и $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, $x,y\in N$

Т.к. $f(a)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

Т.к. $f(2a)=f(2)+f(a) \Rightarrow f(2a)=f(a)$

Т.О.:

$0=f(1)=f(2)=f(4)=f(8)=f(16)$

$0=\left[\frac{3}{4}\right]=f(3)=f(6)=f(12)=f(24)$

$1=\left[\frac{5}{4}\right]=f(5)=f(10)=f(20)$

$1=\left[\frac{7}{4}\right]=f(7)=f(14)=f(28)$

$0=2f(3)=f(9)=f(18)$

$2=\left[\frac{11}{4}\right]=f(11)=f(22)$

$3=\left[\frac{13}{4}\right]=f(13)=f(26)$

$4=f(3)+f(5)=f(15)$

$4=\left[\frac{17}{4}\right]=f(17)$

$4=\left[\frac{19}{4}\right]=f(19)$

$1=f(3)+f(7)=f(21)$

$5=\left[\frac{23}{4}\right]=f(23)$

$2=2f(5)=f(25)$

$0=3f(3)=f(27)$

$4\le t\le 28$, $t\in N$

Т.О. $f(t)=0$ при 9 различных t

$f(t)=1$ при 8 различных t

$f(t)=2$ при 3 различных t

$f(t)=3$ при 2 различных t

$f(t)=4$ при 2 различных t

$f(t)=5$ при 1 различном t

5. (продолжение)

Т.к. $\underset{0}{\overset{\parallel}{f(1)}} = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) < f(y)$$

1) $f(x) = 0$ (9 вариантов)
$f(y) \geq 1$ ($28 - 9 = 19$ вариантов) $\Rightarrow 9 \cdot 19$

2) $f(x) = 1$ (8 вариантов)
$f(y) \geq 2$ (8 вариантов) $\Rightarrow 8 \cdot 8$

3) $f(x) = 2$ (3 варианта)
$f(y) \geq 3$ (5 вариантов) $\Rightarrow 3 \cdot 5$

4) $f(x) = 3$ (2 варианта)
$f(y) \geq 4$ (3 варианта) $\Rightarrow 2 \cdot 3$

5) $f(x) = 4$ (2 варианта)
$f(y) \geq 5$ (1 вариант) $\Rightarrow 2 \cdot 1$

Итого, $171 + 64 + 15 + 6 + 2 = 258$ пар

Ответ: 258

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0$ $\quad x(26-x)>0 \quad x\in(0;26)$

По ОДЗ $x^2-26x<0$, поэтому модуль раскрывается со сменой знака

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $t=26x-x^2$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

Из св-ва логарифмов $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

На ОДЗ

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

Т.к. $t>0$ воспользуемся нер-вом о средних

$t^{\log_5 12}+t\geq 2\sqrt{t^{\log_5 12+1}}=2\sqrt{t^{\log_5 12+\log_5 5}}=2\sqrt{t^{\log_5 60}}$

на ОДЗ $=$ $2t^{\frac{\log_5 60}{2}}$

Нужно

$2t^{\frac{\log_5 60}{2}}\geq t^{\log_5 13}$

Т.к. $\log_5 60>2 \Rightarrow 2t^{\frac{\log_5 60}{2}}>2t$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

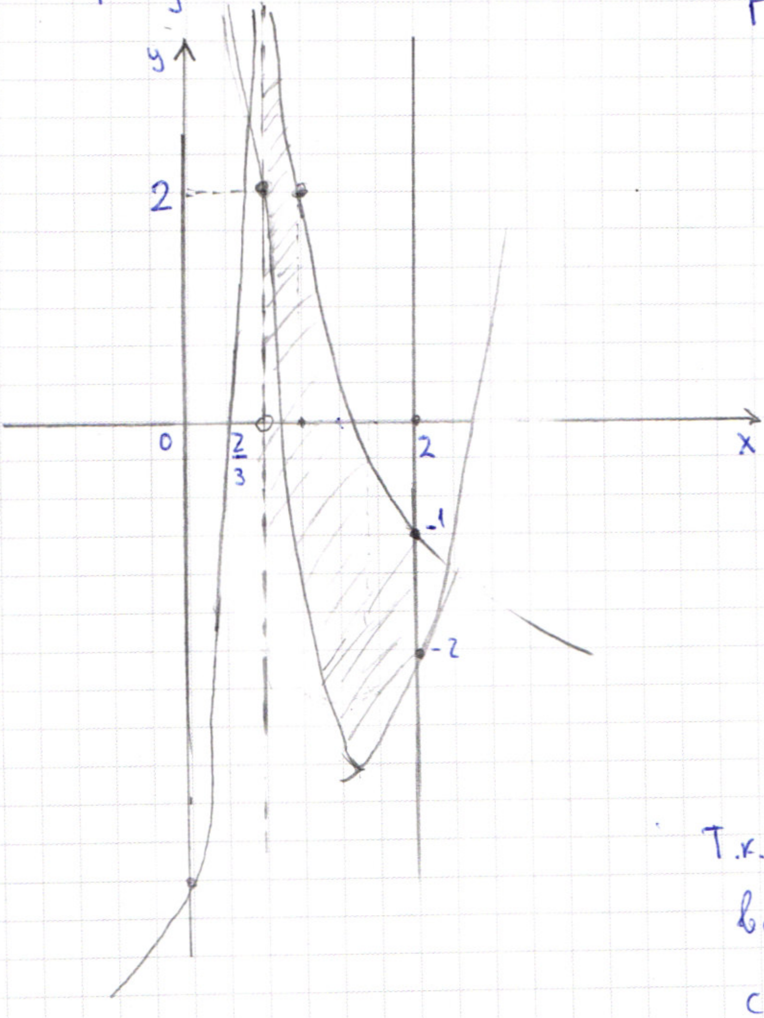
$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$18x^2-51x+28=0$$

$$D=51^2-36\cdot 28=2601-2016=585$$

$$x_{1,2}=\frac{51\pm\sqrt{585}}{36}=\frac{51\pm3\sqrt{65}}{36}=\frac{17\pm\sqrt{65}}{12}$$

Нарисуем схематично



Правый корень параболы >2, т.к.

$$\sqrt{65}>8$$

$$\frac{17+8}{12}>2$$

Левый корень параболы $<\frac{2}{3}$, т.к.

$$\sqrt{65}>8$$

$$\frac{17-8}{12}<\frac{2}{3}$$

При $x=2$ $18x^2-51x+28=-2$

$$\frac{8-6x}{3x-2}=-1$$

Асимптота гиперболы $x=\frac{2}{3}$

Гиперболу нарисовал по точкам

Т.к. $-\frac{b}{2a}=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$ ~~...~~ $>1\frac{1}{3}$, т.е.

вершина параболы правее середины нужного полуинтервала

~~Т.о. нас интересует прямые~~

6. (продолжение)

Т.о. нам нужны такие прямые, ~~которые~~ которые лежат в заштрихованном промежутке

$\cancel{-2 \leq 2a + b \leq -1}$

Р-м "самую нижнюю" прямую из всех возможных подходящих и докажем, что оно пересекает гиперболу на нашем промежутке.

Построим по точкам $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ $(2; -2)$

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{y - 2}{-2 - 2}$$

$y = -3x + 2$ должно быть $< \frac{8 - 6x}{3x - 2}$

$$-3x + 2 < \frac{8 - 6x}{3x - 2}$$

$$9x^2 - 18x + 12 > 0$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$xy-6x-y+6\geq 0$

$$\begin{cases} 9(x^2-2x+1)+(y^2-12y+36)=90 \\ (y-6x)^2=xy-6x-y+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \end{cases}$$

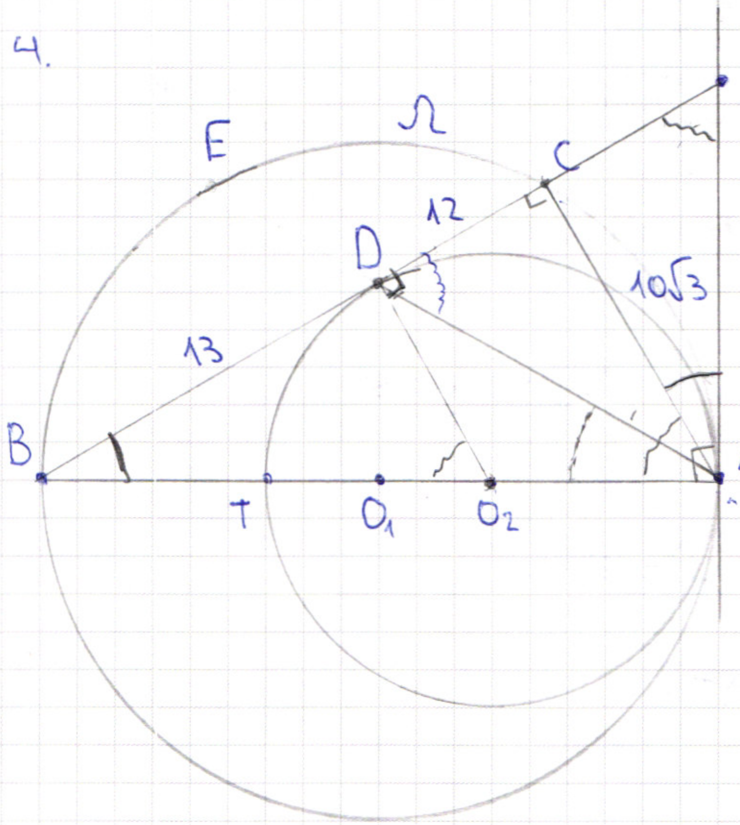
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4.



$BD^2 = BT \cdot BA$

$\frac{12}{CA} = \frac{CA}{25}$

$CA^2 = 25 \cdot 12$

$CA = 10\sqrt{3}$

$\frac{13}{25} = \frac{\frac{5\sqrt{37}}{2} - r}{\frac{5\sqrt{37}}{2}}$

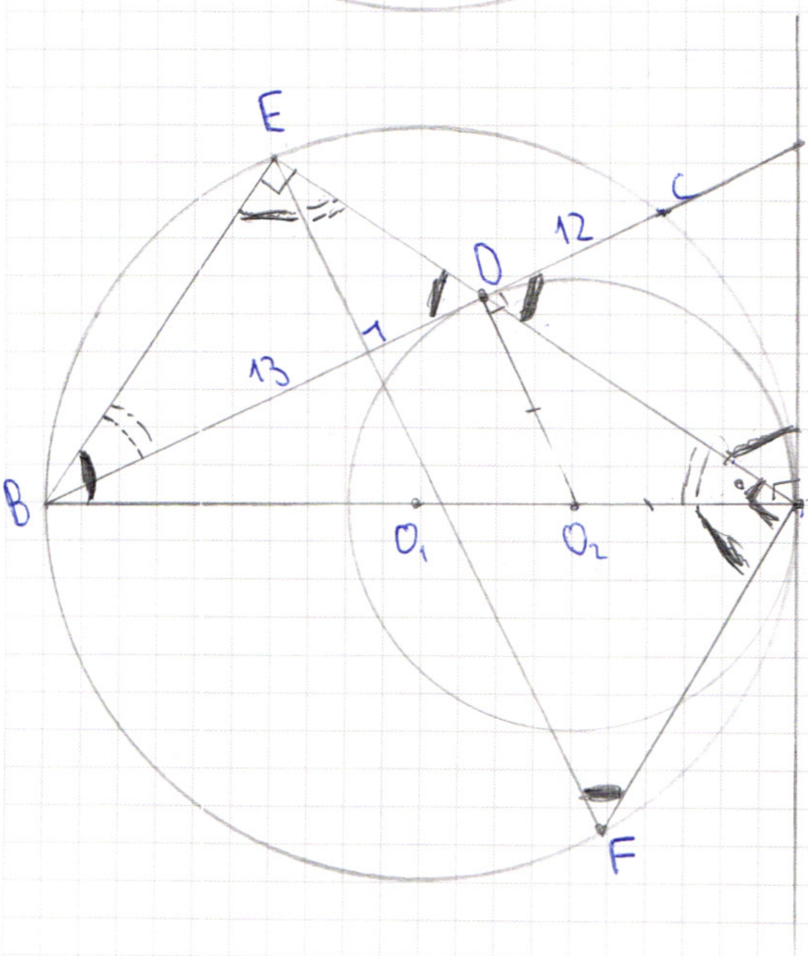
$\cancel{10\sqrt{3}}$

$300 + 625 = 925$

$\frac{\sqrt{925}}{2} = \frac{5\sqrt{37}}{2}$

925 | 5
-5
42
-40
25

185 | 5
-15
35
37



R - ? r - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF}

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$

65
× 25
325
+ 130
1625

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$51 \cdot 51 = 2601$, $28 \cdot 72 = 2016$

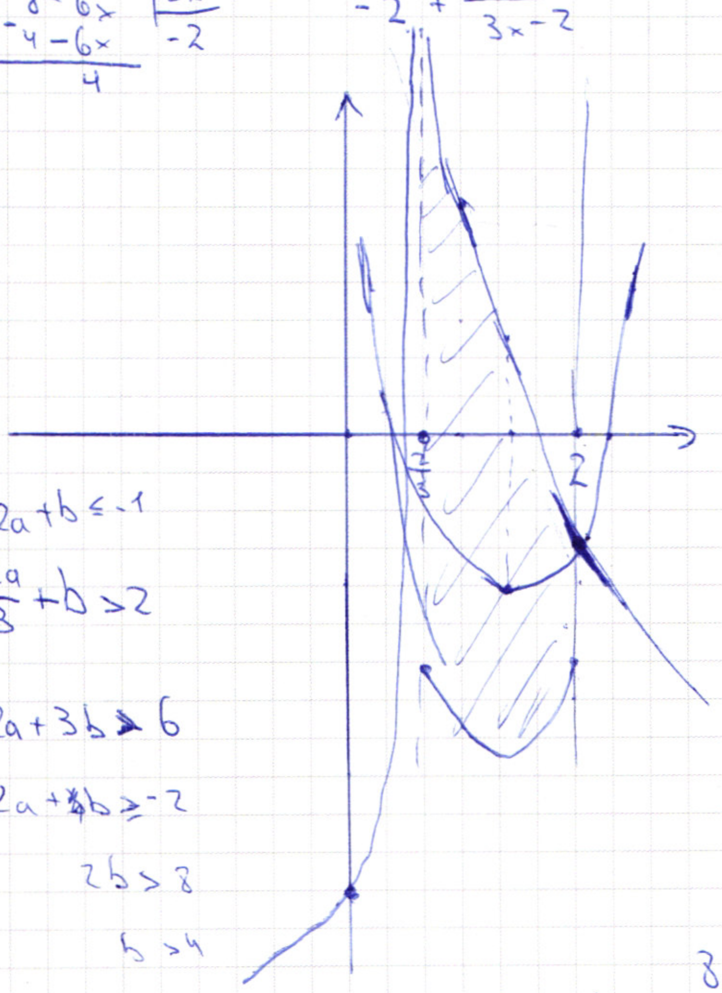
$D = 2601 - 2016 = 585$

$585 : 5 = 117$, $117 : 9 = 13$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$$x_{1,2} = \frac{51 \pm 3\sqrt{65}}{36} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{12}$$

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$ $\quad \frac{9}{12}$



$\frac{-4}{4}$

$2a+b \leq -1$

$\frac{2a}{3}+b > 2$

$2a+3b \geq 6$

$72-102+28$

$(2;-1)$

$2a+\cancel{b}b \geq -2$

$2b > 8$

$b > 4$

$8-34+28$

$ax+b \leq \frac{8-6x}{3x-2}$

$\frac{4}{9} \cdot 18^2 - \frac{2}{3} \cdot 17 + 28$

$x = \frac{2}{3}$

$-2 \leq 2a+b \leq -1$

$8+28$

$18 \cdot \frac{17^2}{12^2} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28$

b

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ $(2; -2)$

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{2-\frac{2}{3}} = \frac{y-2}{-2-2}$$

$$-4x + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}y - \frac{8}{3}$$

$$12x + 4y - 8 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0$$

$$y = -3x + 2 < \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$-9x^2 + 6x + 6x - 4 < 8 - 6x$$

$$9x^2 - 18x + 12 > 0$$ $\times\frac{36}{12}$

$324 -$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sqrt{t^{\log_5 60}} \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$2t^{\frac{\log_5 60}{2}}$

$\log_5 25$

$t^{\log_5 12}\left(1 - t^{\log_5 \frac{13}{12}}\right) + t \geq 0$

$\frac{\log_5 60}{\log_5 25} = \log_{25} 60$

$5^k = \frac{13}{12}$

$2t^{\log_{25} 60} \geq t^{\log_5 13}$

$\log_5 60 \geq 2$

$26x - x^2$

$2t^2 \quad t^2$

$\frac{-26}{-2} = 13$

$26 \cdot 13 - 13^2 = 13^2$

$2t^{\frac{\log_5 60}{2} - \log_5 13} \geq 1$

$2t^{\log_5 60 -}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

2.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

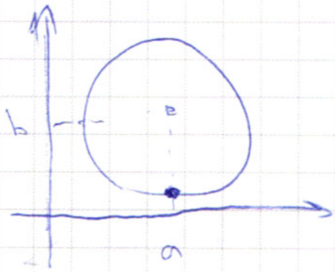
$tg\,\alpha$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x \end{cases}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$



$36 \cdot 45$: 180, 144, 1620

$18 \cdot 18$: 144, 18, 324

$36 \cdot 12$: 72, 36, 432

$9x^2 - 18x + y^2 - 12y - 45 = 0$

$D = 324 - 36(y^2 - 12y - 45)$

$324 - 36y^2 + 432y + 1620$

$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{D}}{18}$

$36(9 - y^2 + 12y + 45) = -36(y^2 - 12y - 54)$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

f(x)

x 4

y 4

f(x) 1

$f\left(\frac{1}{y}\right)$ 0

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

~~f(4)=1~~ f(4)=0 f(11)=2

~~f(3)~~ f(5)=1 f(12)=0

f(6)=0 f(13)=3

f(7)=1 f(14)=1

f(8)=0 f(15)=1

f(9)=0 f(16)=0

f(10)=1

x ~~f(x)~~ $\frac{1}{y}$ $f\left(\frac{1}{y}\right)$

4 ~~f(4)~~ $\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{x}{5}\right)$ $f\left(\frac{x}{10}\right)$ $f\left(\frac{x}{15}\right)$ $f\left(\frac{x}{20}\right)$ $f\left(\frac{x}{25}\right)$

$f\left(\frac{x}{7}\right)$ $f\left(\frac{x}{14}\right)$ $f\left(\frac{x}{21}\right)$ $f\left(\frac{x}{28}\right)$

$f\left(\frac{x}{11}\right)$ $f\left(\frac{x}{22}\right)$

$f\left(\frac{x}{13}\right)$ $f\left(\frac{x}{26}\right)$

$f\left(\frac{x}{17}\right)$

$f\left(\frac{x}{19}\right)$

$f\left(\frac{x}{23}\right)$

f(2) = f(4) = f(8) = f(16)

f(3) = f(6) = f(9) = f(18)

f(

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 9 \\ \hline 171 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$4\le x\le 28$ $4\le y\le 28$ $f(x/y)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=\underbrace{f(x)}_{\ge 0}+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\underbrace{f(1)}_{=0}+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\underbrace{f(2)}_{=0}+f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=\cancel{f(10)}+\cancel{f(\frac{1}{2})}$ $f\left(\frac{1}{4}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\underbrace{f(2)}_{=0}+f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$f(2)+f\left(\frac{1}{10}\right)$

$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$\cancel{f(\frac{1}{7})=}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$\cancel{f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{7}}$

$f\left(\frac{1}{10}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\underbrace{f(3)}_{=0}+f\left(\frac{1}{9}\right)$

$\underbrace{f(1)}_{=0}=f\left(\frac{1}{7}\right)+\underbrace{f(7)}_{=1}$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{10}\right)$

$\cancel{f(\frac{1}{6})=2f(3)}$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{7}\right)=-1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)$

$\underbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0}=f(3)+\underbrace{f\left(\frac{1}{6}\right)}_{=0}$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\underbrace{f(5)}_{=1}+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{7}\right)=-1$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right],\ p\in\mathbb{P}$

Найти кол-во $(x;y)$ $4\le x\le 28$; $4\le y\le 28$ и $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

Заметим, что $f(a)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0$

Тогда $f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$0 = \underbrace{0}_{\left[\frac{2}{4}\right]}+f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f(1)=f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=0$ аналогично

$f(1)=\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{f(5)}+f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right)=-1$

$f(1)=\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{f(7)}+f\left(\frac{1}{7}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{7}\right)=-1$

$f(11)=\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{f(11)}+f\left(\frac{1}{11}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{11}\right)=-2$

3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$26x-x^2 \geq 0$

$x^2-26x<0$

$a^{\log_b c}=a^t$

$\log_b c=t$

$b^t=c$

$26x-x^2=t$

$\log_5 5+\log_5 12=\log_5 60$

$t^{\log_5 12+1}$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$t^{\log_5 12}=12^{\log_5 t}$$

$\log_5 12=a \qquad \log_5 t=b$

$5^a=12 \longrightarrow 5^b=t$

$t^a \stackrel{?}{=} 12^b$

$t(t^{\log_5 12-1}+1)$

$t(t^{\log_5 \frac{12}{5}}+1)$

$7^{\log_3 9}=9^{\log_3 7}$

$\shortparallel$

49

$5=12^{\frac{1}{a}}$

$5=t^{\frac{1}{b}}$

$12^{\frac{1}{a}}=t^{\frac{1}{b}}$

$12^b=t^a$

$$t^{\log_5 60} \geq t^{\log_5 13}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)