МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Утверждение 1: $f(1)=0$

Доказательство: для x, на котором определена $f(x)$ верно, что $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x) \Rightarrow f(1)=0$.

Утверждение 2: $f(x)=-f(x^{-1})$, если $f(x)$ определена на x.

Доказательство: ~~$f(x)=-f(x^{-1})$~~ $0=f(1)=f(x\cdot x^{-1})=f(x)+f(x^{-1}) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=-f(x^{-1})$

Утверждение 3: $f(x)$ равно сумме $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots a_n$ - это все числа в разложении x на простые делители (для составного x), на котором определена $f(x)$

Доказательство по индукции по n:

База: $n=2$ по определению $f(ab)=f(a)+f(b)$.

Шаг: пусть есть разложение $f(x)=f(a_1)+\ldots f(a_n)+$ $+f(y)$, где a_i - простые числа, и y - составной, тогда $f(y)=f(a_{n+1})+f(z)$, где a_{n+1} - простое и $z\cdot a_{n+1}=y$, значит можно разложить $f(x)$ в сумму $f(a_i)$, где a_i - это ~~все~~ попарно числа в ~~разл~~ разложении x на простые.

Тогда сделаем таблицу с ~~числами~~ функциями от чисел, их разложением на простые и значением этой функции:

$8{,}5^2 = 4R^2 - 4R\cdot\left(\frac{15}{16}R\right)$;

$8{,}5^2 = R^2\left(4 - 4\cdot\frac{15}{16}\right) = R^2\left(4 - \frac{15}{4}\right) = R^2\cdot\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}R\right)^2$;

$\frac{R}{2} = 8{,}5$; $\underline{R = 17}$ $\Rightarrow$ $r = \frac{15}{16}R = \frac{17\cdot 15}{16} = \underline{\frac{255}{16}} = \frac{256}{16} - \frac{1}{16} = \underline{16 - \frac{1}{16}}$;

Посмотрим на проекцию A на $EF - A'$, она нормаль BC т.к. BC и $AA' \perp EF$ ~~так~~ так же мы знаем, что $\angle BCA = 90° \Rightarrow C$ – проекция A на $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AA' = BC = \frac{BC}{2} = 8$. $\angle EAF = 90°$ т.к. EF – диаметр. Посмотрим на угол $\angle AEF = \alpha$: ~~$2R\sin\angle AEF = EA$~~;

~~$FA\cdot\sin EFA = AA'$~~ ~~$\sin AE$~~ ~~$2R\cos\alpha = EA$~~,

~~$EA\sin\alpha = AA' = 8$, $\Rightarrow 2R\cos\alpha\sin\alpha = 8$; $R\cdot\sin(2\alpha) =$~~

~~Посмотрим на угол~~ Тогда $\angle AFE = 90° - \alpha = \beta$.

$2R\cos\alpha = 2R\sin\beta = EA$; $EA\sin\alpha = EA\cos\alpha = AA' = 8$

$2R\sin\beta\cdot\cos\beta = 8$; $R\sin 2\beta = 8$. $\beta = \frac{\arcsin\frac{8}{R}}{2} = \frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}$;

неправда

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\sin\angle EAF\cdot EA\cdot FA \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\cos\beta =$

$\boxed{\text{т.к. } \angle EAF = 90°}$

$= R^2\cdot 2\sin\beta\cdot\cos\beta =$

$= R^2\cdot\sin 2\beta$; $\sin 2\beta = \frac{8}{R} \Rightarrow$

$S = R^2\cdot\frac{8}{R} = R\cdot 8 = 17\cdot 8 = \underline{136}$;

Здесь ~~мы получили~~ ~~arcsin~~ arcsin arcsin вернул значение для угла ~~большего~~ FEA т.к. $\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а $2EFA > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = 90° - \alpha =$

$= \frac{\pi - \arcsin\frac{8}{17}}{2}$;

Ответ: радиус R равен 17, радиус r равен $\frac{255}{16}$;

$\angle AFE = \frac{\pi - \arcsin\frac{8}{17}}{2}$; $S_{AEF} = 136$;

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f(x)	f(2)	f(3)	f(4)	f(5)	f(6)	f(7)	f(8)	f(9)	f(10)	f(11)	f(12)	f(13)	f(14)
разложение на простые	–	–	f(2)+f(2)	–	f(2)+f(3)	–	f(2)+f(2)+f(2)	f(3)+f(3)	f(2)+f(5)	–	2f(2)+f(3)	–	f(2)+f(7)
значение f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1

x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(x)	f(15)	f(16)	f(17)	f(18)	f(19)	f(20)	f(21)	f(22)	f(23)	f(24)	f(25)
Разложение на простые	f(3)+f(5)	4f(2)	–	2f(3)+f(2)	–	2f(2)+f(5)	f(3)+f(7)	f(2)+f(11)	–	3f(2)+f(3)	f(5)+f(5)
значение f_y	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

количество x, для которых:

$f(x)=0$: 16

$f(x)=1$: 7

$f(x)=2$: 3

$f(x)=3$: 1

$f(x)=4$: 2

$f(x)=5$: 1

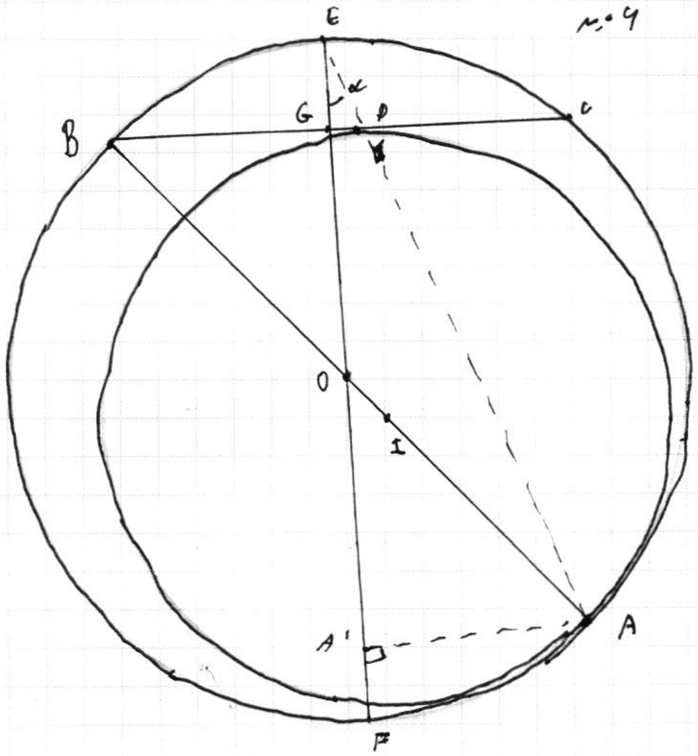
$$f(x/y) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f(y^{-1}) = f(x) - f(y);$$

Соответственно нам нужны два пары, где $f(y)$ больше $f(x)$, чтобы $f(x/y)<0$. Пар, где $f(y)=5$ — 23 штуки (каждое число с $f(23)$), пар, где $f(y)=4$ — $2\cdot 21$ — $f(y)$ — два варианта и 21 вариант для $f(x)$, которое меньше $f(y)$, аналогично для $f(y)=3$ — $1\cdot 20$, $f(y)=2$: $3\cdot 17$; $f(y)=1$: $7\cdot 10$, тогда всего пар:

$1\cdot 23 + 2\cdot 21 + 1\cdot 20 + 3\cdot 17 + 7\cdot 10 = 23+42+20+51+70 =$
$= 65+141 = 206$.

Ответ: 206.

№4



O - центр Ω; I - центр ω

Докажем, что EF проходит через O.

Пусть есть точка ~~...~~ пересечения Ω и сер-пера к BC (он проходит через O) отличная от E обозначим её E', тогда треугольники $\triangle AOE$ и $\triangle DIA$ подобны т.к. они равнобедренные и их ~~...~~ равные стороны перпендикулярны одинаковым прямым: касательной в точке A и BC. Но треугольник $\triangle EOA$ подобен $\triangle IDA$ т.к. они равнобедренные с общим углом $\angle BAE$ => E и E' совпадают - доказано.

G - середина BC и пересечение EF с BC. Посмотрим на треугольники $\triangle BGO$ и BCA, они подобны ($\angle BCA = 90^\circ$ т.к. BA - диаметр), а $BG = GC = 8$, тогда (R - радиус Ω, r - радиус ω) ~~$\frac{BC}{BG}$~~ посмотрим на подобные треугольники BDI и BCA ($\angle BDI = 90^\circ$ т.к. BC - касательная к ω) тогда: $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BI} = \frac{2R}{2R-r}$;

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17}$; $34R = 64R - 32r$; $32r = 30R$; $r = \frac{15}{16}R$;

Посмотрим на треугольник BDI. По теореме Пифагора: $BD^2 + DI^2 = BI^2$;

$8{,}5^2 + r^2 = (2R - r)^2$; ~~$8{,}5^2 = \left(\frac{32-15}{16}R\right)^2 - \left(\frac{15}{16}R\right)^2$~~

~~$\left(\frac{17^2}{16^2} - \frac{15^2}{16^2}\right)$~~ $8{,}5^2 + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

Сделаем замену $t = 10x - x^2$, тогда:

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)};$$

$$(10x - x^2) + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)};$$

$$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t};$$

Заметим, что $\log_3 t$ определён, если $t > 0$ => мы рассматриваем только интервал $t \in (0; 10)$ (т.к. $10x - x^2$ - парабола ветвями вниз, она положительна только строго между корнями $0; 10$), тогда $|-t| = t$ т.к. $t > 0$ => у нас неравенство имеет такой вид:

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t};$$

$$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t};$$

$$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t};$$

Воспользуемся свойством этой пифагоровой тройки, что для $3^n + 4^n > 5^n$ для $n < 2$, $3^n + 4^n = 5^n$ для $n = 2$ и $3^n + 4^n < 5^n$ для $n > 2$. Тогда нас интересуют значения $\log_3 t \leq 2$; $\log_3 t = 2$ при $t = 9$ => нас интересует $0 < t \leq 9$;

Решим неравенство $0 < 10x - x^2 \leq 9$. $10x - x^2 > 0$ на $(0; 10)$, найдём, где $10x - x^2 \leq 9$;

№ 2

$x - 12y = 3\sqrt{2xy - 12y - x + 6}$;

$(x+6y)^2 - 12xy + 36y^2 - 12x - 36y = 45$;

$(x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$;

$(x+6y)^2 = 12xy - 36y^2 + 12x + 36y + 45$;

вычтем одно из другого.

$-36xy + 108y = -10xy + 36y^2 - 48y - 13x - 39$;

$36y^2 - y(48 \cancel{+10x} \cancel{-36x+108} \cancel{\ldots} + 26(6-x)) - 13x - 39$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x - x^2 - 9 \le 0$;

Корни $-x^2 + 10x - 9 = 0$ такие:

$D = 100 - 36 = 64$;

$x_1 = \frac{-10+8}{-2} = 1$;

$x_2 = 9$;

Тогда нам подходят $x \in (-\infty; 1]$ и $x \in [9; +\infty)$ [illegible]

[illegible] $x \in (0; 10)$ с этим:

нам подходят $x \in (0; 1]$ и $x \in [9; 10)$;

Ответ: $x \in (0; 1]$ и $x \in [9; 10)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

Сделаем замену $t = x - 1$, тогда:

$$\frac{11t}{4t-1} \le at + a + b \le 32t^2 + 100t - 36;$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{10x + |x^2 - 10x|^{\log}}$

$t = \cancel{x^2 - 10x}\ 10x - x^2;$

$10x = -t + x^2;$

$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t};$

$\cancel{x - 12y}$

$(x - 6y)^2 + 24xy - 12x - 36y = 45;$

$(x - 12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6;$

$(x - 6y)^2 = -24xy + x + 12y + 45;$

$\cancel{x^2 - 24xy + 144y^2}$

$x^2 - 12xy + 36y^2$

$12xy + (\cancel{a}\,108y)^2 = 26xy - 24y - 2x - 39;$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$;

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$(x+6y)^2$

$$\frac{10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4}}{x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}} \geq 1;$$

$x^2 - 10x = 0$;

$x_1 = 10$;

$x_2 = 0$;

$\min(x^2 - 10x) = -25$

$-32x^2 + 36x - 3$

$D = 36^2 - 4 \cdot 32 \cdot 3 =$

$= 12(3^2 - 32$

$-64x + 36 = 0$;

$x = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$;

$\frac{3}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

0 4 0 4 1 1 2 5 0 2

$f(2)=f(3)=0$;

$f(1)=0$;

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$;

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$;

$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6; \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases}$

$f(7/3)=$

$=f(7)+f(\frac{1}{3})=$

$=f(1)+f(\frac{1}{3})$

0 : 10

1 : 7

2 : 3

3 : 1

4 : 2

5 : 1

$x^2-26xy+144y^2+12y+x+6$;

$108y^2-26xy+13x+48y+51=0$;

f

$x=ay$, $a>1$

$f(1)=0$;

$f(x)$ $f(y)$

$23+2\cdot 21+20+$

$+3\cdot 17+7\cdot 10=$

$=23+42+20+$

$+51+70=65+71+$

$+70=206$;

$10x-x^2=4$;

$f(x)=f(ay)=f(a)+f(y)$

$f(\frac{1}{x})=0$;

$x^2-10x+4=0$;

$f(x)=-f(x^{-1})$;

$x-1=t$

$D=$

$\begin{array}{r|l} -32x^2+36x-3 & x-1 \\ -32x^2+32x & -32x+4 \\ \hline 4x-3 & \\ -4x-4 & \\ \hline 1 & \end{array}$

-77

$36\cdot 36-12\cdot 32$;

$12(3\cdot 36-32)$;

$-32x^2+36x-3=(-32x+4)(x-1)+1$

$48(3\cdot 9-8)$;

$48(19)$;

$-32t=-32x+32$

$\frac{t}{4t-1}\leq at+b+a\leq t(-32x+4)+1$;

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

~~$\sin 2\alpha =$~~

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$

$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y;$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta$~~

$2\alpha = x \quad ; \quad 2\beta = y;$

~~$\sin 2\alpha = x$~~

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

[redacted]

$\sin(x+2y) = \sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y = -\frac{2}{5}$

$\sin(x+2y) = \sin x \cos^2 y - \sin x \sin^2 y + 2\cos x \sin y \cos y;$

$x - 6y = t$

$x - 6y =$

$-32(t-1)^2 + 36(t-1) - 3 =$

$= -32t^2 + 64t - 32 + 36t - 1 - 3 =$

$= 32t^2 + 100t - 36 \quad ;$

$$\begin{array}{r} 1226 \\ \times\ 36 \\ \hline 768 \\ 382\ \ \\ \hline 4581 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\ 4581 \\ \hline 5419 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 73 \\ \hline 239 \\ 511\ \ \\ \hline 5349 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

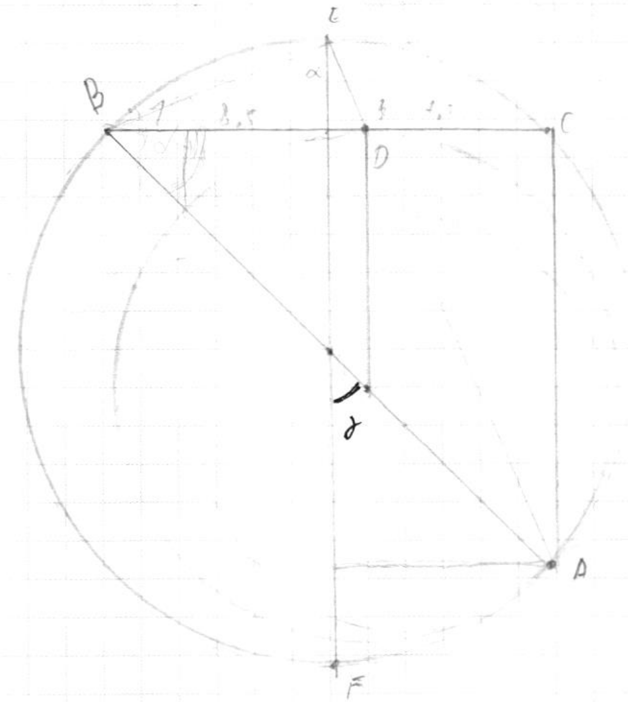
$\frac{2R}{2R-r} = \frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17};$

$34R = 64R - 32r;$

$30R = 32r;$

$15R = 16r;$

$r = \frac{15}{16}R;$



$\alpha - (90 - \alpha) =$

$= 2\alpha - 90$

$\sin\gamma = \frac{8}{R}$

$2R\cos\alpha = 16$

$R\cos\alpha =$

$R\cos\alpha = 1 + r\cos\alpha,$

$R\cos\alpha = 8;$

$2(180 - 2\alpha) = 360 - 4\alpha$

$180 - 2\alpha$

$15 \times 17 = 105 + 15\_ = 255$

$r^2 + 8,5^2 = (2R - r)^2$

$\cancel{r^2} + 8,5^2 = 4R^2 - 4rR + \cancel{r^2};$

$4R^2 - 4 \cdot \frac{15}{16}R^2 = 8,5^2;$

$17 \times 8 = 136$

$\frac{1}{4}R^2 = 8,5^2;$

$\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = 8,5^2;$

$R = 17;$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)