МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\overset{>0}{\frac{4x-3}{2x-2}}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30 \geqslant -\frac{49}{8}$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\cancel{\sin 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$ – универсальная подстановка

1) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$tg\alpha = a$

$$\frac{8a}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{1+a^2} = -1$$

$$\frac{8a-1+a^2}{1+a^2} = -1$$

$$a^2+8a-1 = -a^2-1$$

$$2a^2+8a=0$$

$$2a(a+4)=0$$

$$\boxed{\begin{matrix}a=0\\a=-4\end{matrix}}$$

2) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$\frac{8a+1-a^2}{1+a^2} = -1$$

$$8a+1-a^2 = -1-a^2$$

$$8a=-2$$

$$\boxed{a=-\frac{1}{4}}$$

Ответ. $\boxed{tg\alpha = \left[\begin{matrix}-\frac{1}{4}\\0\\-4\end{matrix}\right.}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\min(8x^2-34x+30)$

$4x^2+1-2x^2+x^4$ $\quad x_B=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

x^4+2x^2+1

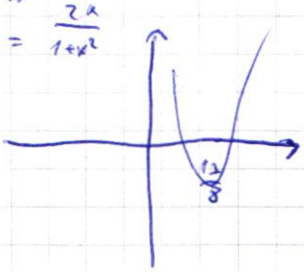
$(x^2+1)^2$

$\cos 2\alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$y_B = \frac{8\cdot17\cdot17}{8\cdot8} - \frac{34\cdot17}{8}+30=$ $\quad 17^2=289$

$\sin 2\alpha = \frac{2x}{1+x^2}$

$=\frac{17^2-17^2\cdot2}{8}+30=$



$=\frac{-17^2}{8}+30=$

$=\frac{-17^2+240}{8}=\frac{-289+240}{8}=-\frac{49}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-2}>0$ при $x\in(1;3]$

$\sin 2\alpha=$

$\sin 2\alpha = \frac{2x}{}$ $\quad ax+b\le0$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$\frac{1+x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x}$ $\quad ax+b\ge-\frac{49}{8}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad ax+b$

$\frac{2x}{1+x}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}$ $\quad$ $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\sin\alpha=$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$ $\quad +\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=+\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha=\frac{2x}{1+x^2}$

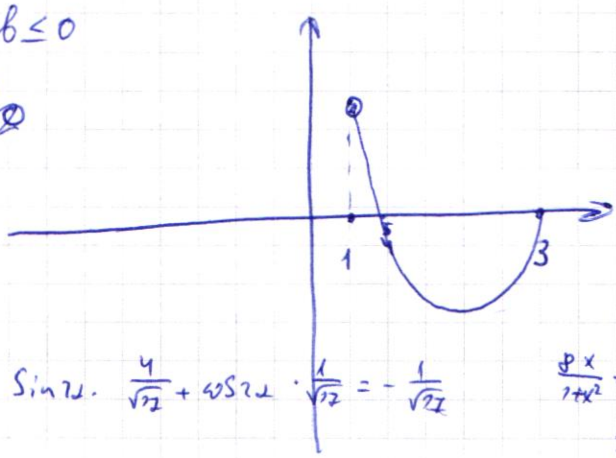
$\cos 2\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$ax+b\le0$ $\quad \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha}=$



$-x^2+8x+1=-x^2-1$

$x=0.$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{8x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$

$\frac{-x^2+8x+1}{1+x^2}=-1$

$4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}+\cos 2\alpha=-1$ $\quad 4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$ $\quad \frac{8x+x^2-1}{1+x^2}=-1$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha$

$8x+x^2-1=-1-x^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$x^2+6x=a \quad , a>0$

$\log_4 5=\dfrac{\log_a 5}{\log_a 4}$

$a\neq 1$

$$3^{\log_4 a}+\cancel{3}\,4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$$

неравенство Пифагора

$\Downarrow$

$\log_4 a \leq 2 \quad (3^2+4^2=5^2)$

$\log_4 a \leq \log_4 16$

$\underline{a \leq 16}$

$x^2+6x-16\leq 0$

$D=36+64=100$

$x=\dfrac{-6\pm 10}{2}$

$x_1=-8$

$x_2=2$

~~$x^2+16x\leq 16$~~

~~$x^2+16x-16\leq 0$~~

~~$D=16^2+64=$~~

~~$=256+64=320$~~

$+ \quad - \quad +$

$-8 \quad 2$

$\underline{x\in[-8;2]}$

~~$x^2+6x\leq 4$~~

~~$x^2+6x-4\leq 0$~~

~~$D=36+16=52$~~

~~$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{52}}{2}$~~

~~$x=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{13}}{2}$~~

~~$x=-3\pm\sqrt{13}$~~

~~$+ \quad - \quad +$~~

~~$-3-\sqrt{13} \quad -3+\sqrt{13}$~~

~~$-3-\sqrt{13}<-6$~~

~~$-3+\sqrt{13}>0$~~

~~$-3-\sqrt{13} \quad -6 \quad 0 \quad -3+\sqrt{13}$~~

~~Ответ: $x\in[-3-\sqrt{13};-6)\cup(0;-3+\sqrt{13}]$~~

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$+ \quad - \quad +$

$-6 \quad 0$

$\underline{x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)}$

$-8 \quad -6 \quad 0 \quad 2$

$\Downarrow$

Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4.

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

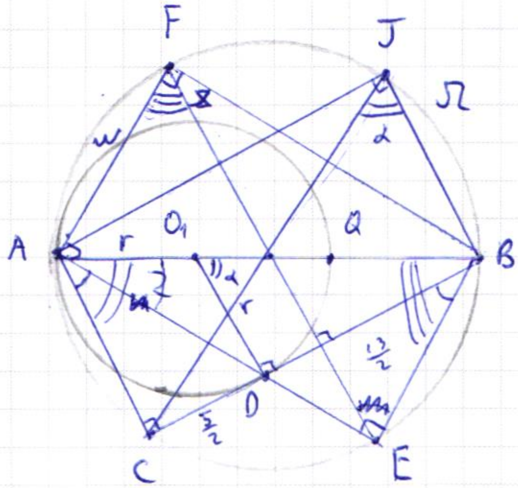
$DB = \frac{13}{2}$

$CD = \frac{5}{2}$

$\sin\angle BAE = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\angle BAE = 90^\circ - \angle AFE$

$\boxed{\cos\angle AFE = \frac{2}{\sqrt{13}}}$



$DB^2 = BQ\cdot AB$

$BQ = 2R-2r$

$AB = 2R$

$\frac{169}{4} = 2(R-r)\cdot 2R$

$\frac{169}{16} = (R-r)R$

$\frac{169}{16} = R\cdot\frac{4}{9}R$

$R^2 = \frac{169\cdot 9}{16\cdot 4}$

$\boxed{R = \frac{13\cdot 3}{4\cdot 2} = \frac{39}{8}}$

$\boxed{r = \frac{39}{8}\cdot\frac{5}{9} = \frac{195}{72} = \frac{65}{24}}$

$\triangle O_1BD \sim \triangle ABC$

$\frac{O_1B}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{13}{18}$

$AB = 2R$

$O_1B = 2R-r$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18}$

$1-\frac{r}{2R} = \frac{13}{18}$

$\frac{r}{2R} = \frac{5}{18}$

$18r = 10R$

$r = \frac{10}{18}R = \frac{5}{9}R$

$AE = AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2\cdot 39\cdot 3}{4\cdot 8\sqrt{13}} = \frac{3\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot 3}{4\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$S = \frac{1}{2}AE\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot AB = \frac{9\sqrt{13}\cdot 2}{4\cdot 2\sqrt{13}}\cdot\frac{2\cdot 39}{8} = \frac{9\cdot 2\cdot 39}{4\cdot 8} = \boxed{\frac{351}{16}}$

$\angle AFB$ – прямой – опирается на диаметр

$\angle AFE = \angle ABE$

$AFBE$ – прямоугольник

$\angle FAE$ – прямой.

$\sin\alpha = \frac{DB}{O_1B} = \frac{DB}{2R-r} = \frac{12}{13}$

$\sin\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin(180^\circ-\alpha) = \frac{12}{13}$

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$

$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{13}$

~~$\sin(180 \ \frac{180-\alpha}{2}$~~ $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\angle BAE = \frac{2}{\sqrt{13}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$(2-3y)(1-x)\geq 0$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \end{cases}$$ – возводим в квадрат

$9y^2+y(3-15x)+4x^2+2x-2=0$

$D=9-90x+225x^2-36\cdot 4x^2-72x+72=$

$=81x^2-162x+81=$

$=81(x^2-2x+1)=$

$=81(x-1)^2$

$y=\frac{15x-3\pm 9(x-1)}{18}$

$y_1=\frac{15x-3-9x+9}{18}$

$y_1=\frac{6x+6}{18}$

$y_1=\frac{x+1}{3}$

$y_2=\frac{15x-3+9x-9}{18}$

$y_2=\frac{24x-12}{18}$

$y_2=\frac{4x-2}{3}$

1) $y=\frac{x+1}{3}$

$3x^2+\frac{9(x+1)^2}{9_3}-6x-\frac{4(x+1)}{3}=4$

$3x^2+\frac{x^2+2x+1}{3}-6x-\frac{4x+4}{3}=4$

$\frac{9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4-12}{3}=0$

$10x^2-20x-15=0$

$2x^2-4x-3=0$

$D=16+24=40$

$x=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{4}$

$x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

2) $y=\frac{4x-2}{3}$

$3x^2+\frac{(4x-2)^2}{3}-6x-\frac{4(4x-2)}{3}=4$

$\frac{9x^2+16x^2-16x+4-18x-16x+8-12}{3}=0$

$\frac{25x^2-50x}{3}=0$

$\left[\begin{array}{ll} x=0 & y=-\frac{2}{3} \\ x=2 & y=2 \end{array}\right.$

Проверим корни.

1. $(0; -\frac{2}{3})$

$3y-2x \geq 0$ $\varnothing$

2. $(2; 2)$

$3y-2x \geq 0$ ✓

$(2-3y)(1-x) \geq 0$ ✓

3. $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{x+1}{3} = \frac{\frac{2+\sqrt{10}+2}{2}}{3} = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$3y-2x \geq 0$

$\frac{4+\sqrt{10}}{\cancel{6}\,2} - \cancel{2+\sqrt{10}}$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} - 2 - \sqrt{10} =$

$= \frac{4+\sqrt{10} - \cancel{4} - 2\sqrt{10}}{2} < 0$ $\varnothing$

4. $x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{x+1}{3} = \frac{\frac{2-\sqrt{10}+2}{2}}{3} = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} = \frac{4-\sqrt{10}-4+2\sqrt{10}}{2} > 0$ ✓

$(2-3y)(1-x) = (2 - \frac{4-\sqrt{10}}{2})(1 - \frac{2-\sqrt{10}}{2}) =$

$= (\frac{\cancel{4-4}+\sqrt{10}}{2})(\frac{\cancel{2-2}+\sqrt{10}}{2}) > 0$ ✓

Ответ: $(2; 2)$

$(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6})$

>0

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{3}{4} \quad 1$

$8x^2-34x+30$

№6.

$D=34^2-120\cdot 8=1156-960=196=14^2$

$34\cdot 34=1156$

$x=\frac{34\pm 14}{16}$

$x_1=3$

$x_2=\frac{5}{4} \quad \frac{20}{16}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

$1 \quad \frac{5}{4} \quad 3$

>0

$F(x)\geq ax+b\geq g(x)$

$ax+b\leq 0$

$g(x)\leq 0$

$g(x)\leq ax+b$

$8x^2 ~~-34x+30-ax-b\leq 0~~$

$8x^2 ~~-x(34+a)~~+30-b$

N1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=?$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2\beta-1)+2\sin\beta\cos\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2\geq(x^2+6x)^{\log_4 5} \qquad x^2+6x>0$

$3^{\log_4 a}+a\geq a^{\log_4 5} \qquad \log_4 5=\frac{\log_a 5}{\log_a 4}$

$a^{\log_a 3\cdot\log_4 a}$

$a^{\frac{\log_a 3}{\log_a 4}}+a\geq a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3}+a\geq a^{\log_4 5}$

$5^{\log_4 a}$

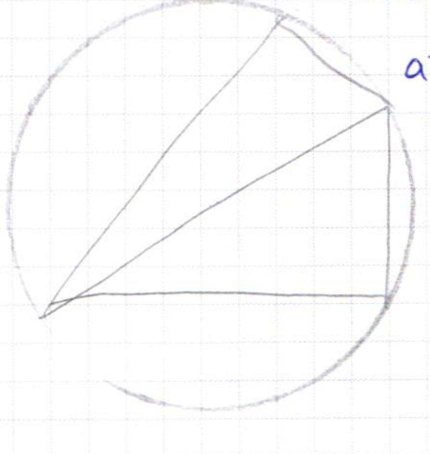
$3^{\log_4 a}+4^{\log_4 a}$

$3^{\log_4 a}+4^{\log_4 a}\geq 5^{\log_4 a}$

$3^2+4^2=5^2$

~~$3^3+4^3>5^3$~~

$\log_4 a<1.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$

$x^2+6x=a \quad , a>0$

$(x^2+6x)^{\log_{(x^2+6x)}3 \cdot \log_4(x^2+6x)}$

$4^{\log(x^2+6x)}\ 3 \quad +$

$3^{\log_4 a} \geq a^{\log_4 5}-a$

$3^{\log_4 a} \geq a(a^{\log_4 5-1}-1)$

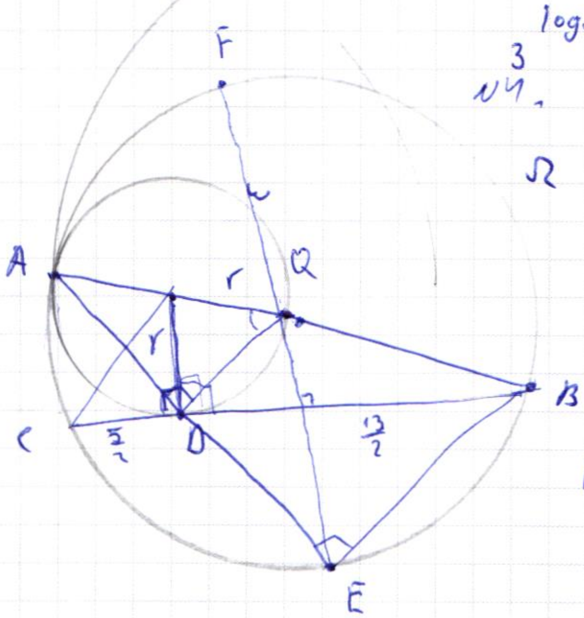
$3^{\log_4 a} \geq a(a^{\log_4 \frac{5}{4}}-1)$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{16} \geq \frac{1}{25}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\frac{20}{60}+\frac{15}{60}=\frac{12}{60}$

№4.



$BD^2=2(R-r)\cdot 2R$

$BD^2=4R^2-4Rr$

$3+4\geq 5$

$\sqrt{3}+\sqrt{4}$

$BD^2=BQ\cdot BA$

$r^2+BD^2=(BQ+r)^2$

$BD^2=BQ\cdot 2R$

$BQ=2R-2r=$

$=2(R-r)$

$r^2+BD^2=(BQ+r)^2$

$\cancel{r^2}+BD^2=BQ^2+\cancel{r^2}+2BQr$

~~BD BQ~~

$BD^2=4(R-r)^2+4r(R-r)$

$BD^2=4R^2+\cancel{4r^2}-8Rr+4rR-\cancel{4r^2}$

$BD^2=4R^2-4Rr$

№3.

$12+12-12-8$ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$\frac{3}{4}(2-\sqrt{10})^2+\frac{3}{36}(4-\sqrt{10})^2-$

$-3(2-\sqrt{10})-\frac{2}{3}(4-\sqrt{10})$

~~$\cos\beta = 2\cos^2\beta-1$~~ $x^2+6x>0$

$\cos 2\beta = 1-2\sin^2\beta$ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$ $\frac{3}{4}(4+10-4\sqrt{10})$

$\sqrt{3}^{\log_2(x^2+6)}+x^2+6x \geq \sqrt{x^2+6x}^{\log_2 5}$ ~~$3^{\log_2(x^2+6)\cdot\log_4 5}$~~ $+\frac{1}{12}(16+10-8\sqrt{10})$

$\times\frac{39}{9}$ $\overline{351}$

$\sqrt{3}^{\log_2 a}+a \geq \sqrt{a}^{\log_2 5}$ $-6+3\sqrt{10}-\frac{8}{3}+\frac{2\sqrt{10}}{3}$

$3^{\log_2 a}+a^2+2a(\sqrt{3}^{\log_2 a}) \geq a^{\log_2 5}$

$3^{\log_2 a}+a^2+$

$3+\frac{15}{2}-3\sqrt{10}+$

$1-\frac{8}{13}=\frac{5}{13}$

$\sin 2\alpha = \frac{13\cdot 24^{12}}{2\cdot 169}$ $3^{\log_4 a}+a \geq a^{\log_4 5}$ $+\frac{8}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\sqrt{10}$

$\frac{13}{6}+\frac{45}{6}$ $\frac{58}{6}$

$144+25$ $3^{\log_2 \sqrt{a}}+a \geq \sqrt{a}^{\log_2 5}$

$\cos 2\beta = 1-\sin^2\beta$

$O_1B=\frac{39\cdot 6}{84}-\frac{65}{24}$ $\frac{169}{24}$ $a(1-a^{\log_4 5-1})$ $3+\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-6-\frac{8}{3}$

$\frac{6}{13}=\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}$ $\frac{289}{169}$ $\log_4 5-\log_4 4$ $\log_4\frac{5}{4}$

$\frac{36}{169}=\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)$. $39\cdot 6=$ $=234$ $-3-\frac{4}{3}+\frac{5}{6}$

$-\sin$

$D=36+4=40$ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$ $-\frac{8}{6}+\frac{5}{6}$

$-\frac{1}{2}$

$x^2+6x \neq 1$ ~~$(x^2+6x)^{\log_{x^2+6x}}$~~

$x^2+6x-1=0$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

x^2+6x

$x(x+6)>0$ $(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$+ \quad - \quad +$

$-3-\sqrt{10}$ -6 0 $-3+\sqrt{10}$ $\sin\frac{\alpha}{2}=$ $a^{\log_4 3}+a \geq a^{\log_4 5}$

$\frac{\sin 2\beta}{2}=\frac{6}{13}$ $a(a^{\log_4\frac{3}{4}}+1-a^{\log_4\frac{5}{4}}) \geq 0$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{40}}{2}=\frac{-6\pm 2\sqrt{10}}{2}=$ $JC=\frac{13\cdot 78^9}{2\cdot 12}=112$ $\log_4\frac{3}{2}$ $\frac{5\cdot 4}{4\cdot 3}$

$=-3\pm\sqrt{10}$ $JC\cdot\sin\alpha=\frac{18}{2}$

$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ $a^{\log_4\frac{3}{4}}(\underbrace{1-a^{\log_4\frac{5}{3}}}_{>0})+1$

$\frac{189\cdot 13}{24\cdot 2}=$ $\frac{a>0}{a\neq 1}$ $\frac{12}{13}JC=\frac{18}{2}$ $O_1B=\frac{39}{4}-\frac{65}{24}=$ $\log_4\frac{5}{3}>0$

$\times\frac{39}{6}$ $\overline{234}$ $\frac{24}{13\cdot 18}$ $\frac{18}{2}$ $=\frac{6\cdot 39-65}{24}=\frac{134-65}{24}=$

$=\frac{169}{24}$

$\frac{5}{13}=\frac{AC\cdot 2\cdot 39\cdot 8^4}{2\cdot 39\ 3}$ $\cos\alpha=\frac{AC}{2R}$ $\sin\alpha=\sin\alpha=\frac{13\cdot 24^{12}}{2\cdot 169^{13}}=\frac{12}{13}$

$AC=\frac{15}{4}$ $\cos\alpha=\frac{169-144}{}$ $\frac{5}{13}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{8}{17}$$

3+4

№ 2.

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

$$-x(-3y+2) + (-3y+2)$$

$$(-3y+2)(1-x)$$

$$x^2 - 6x + 9 + 2x^2 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 2y^2 = 4$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + 2x^2 + 2y^2 = 17.$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = (1-x)(2-3y)$$

$$(3y-2x)^2 = (1-x)(2-3y)$$

№ 3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$x^2 + 6x > 0$$

$$x(x+6) > 0$$

$+\ -6\ -\ 0\ +$

$$3^{\frac{1}{2}\log_2(x^2+6x)} + 6x \geq \sqrt{x^2+6x}^{\log_2 5} - x^2$$

$$\sqrt{3}^{\log_2 a} + a \geq \sqrt{a}^{\log_2 5}$$

$$3^{\log_2 a} + a^2 + 2a\sqrt{3}^{\log_2 a} \geq a^{\log_2 5}$$

$$\frac{3(2-\sqrt{10})^2}{4} + \frac{3(4-\sqrt{6})^2}{36} = \frac{3(4-4\sqrt{10}+10)}{4} + \frac{16-8\sqrt{6}+10}{12} = \frac{3}{4}(14-4\sqrt{10}) + \frac{13-4\sqrt{10}}{6} = \frac{13}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{10} + \frac{63}{2} - 3\sqrt{10}$$

$$\frac{26}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = -\frac{8(2-\sqrt{10})}{4} - \frac{8(4-\sqrt{6})}{8\cdot 3} = -6+3\sqrt{10} - 2 + \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$-6+3\sqrt{10} - \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$\frac{76}{6} - \frac{16}{6} - 6$$

$$-6 - \frac{8}{3} + \frac{13}{6} + \frac{63}{2}$$

$13 \cdot 13 = 39 \ldots$; $39 \cdot 5 = 195$; $89 \cdot 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\ge(x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$x^2+6x=a,\quad a>0$

$$3^{\log_4 a}+a\ge a^{\log_4 5}$$

$$\cancel{3^{\log_3 a\cdot\log_4 5}}$$

$$\cancel{\sqrt{3}^{\log_2 a}+a\ge\sqrt{a}^{\log_2 5}}\qquad \cancel{\log_4 a+\log_4\frac{5}{a}}$$

$$(x^2+6x)(1-(x^2+6x)^{\log_4 5-1})$$

$$\cancel{(x^2+6x)(1-(x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{4}})+3^{\log_4(x^2+6x)}\ge0}$$

$$\cancel{\log_4}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\ge(x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$4^{\log_4 3\cdot\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\ge(x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x\ge(x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$a^{\log_4 3}+a^{\log_4 4}\ge a^{\log_4 5}$$

$$a^{\log_4 3}(1+a^{\log_4 4-\log_4 3}-a^{\log_4 5-\log_4 3})$$

$$a^{\log_4 3}(1+a^{\log_4\frac{4}{3}}-a^{\log_4\frac{5}{3}})\ge0$$

$\wedge 2$

$9y^2+y(3-15x)+4x^2+2x-2=0$

$D=9-90x+225x^2-36(4x^2+2x-2)=$

$=9-90x+225x^2-144x^2-72x+72=$

$=81x^2-162x+81$

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$$

$3y-2x=\sqrt{(2-3y)(1-x)}$

$9y^2-12xy+4x^2=(2-3y)(1-x)$

$3x^2\cancel{-6x}+3y^2-4y-4=0$

$\cancel{D=36-12(3y^2-4y-4)=}$

$=36-36y^2+48y+48=$

$=36(1-y)(1+y)+48(1+y)=$

$\cancel{=(1+y)(36+48-36y)=}$

$16\cdot9=144\quad=(1+y)(84-36y)$

$9y^2+4x^2=15xy-2x-3y+2$

$\cancel{4x^2+x(15y+2)}$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0\quad\cancel{D}\quad x=6\pm$

$D=4-60y+225y^2-16(9y^2+3y-2)=$

$=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-108y+36$

$81(x^2-2x+1)=(x-1)^2\cdot81$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$-x(2-3y)+(2-3y)$

$(2-3y)(1-x)$

$3y-2x\geq 0$

$(3y-2x)^2=(2-3y)(1-x)$

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$

$D=16-\cancel{12}\,36x^2+72x+48=$

$=-36x^2+72x+64$

$-(6x-8)^2+48x$

$3(x^2-2x+1-1)+3y^2-4y=4$

$3((x-1)^2-1)+3y^2-4y=4$

$3(x-2)(x)+3y^2-4y=4$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D=36-12(3y^2-4y-4)=$

$=36-36y^2+48y+48=$

$=-36y^2+48y+84\geq 0$

$\frac{84}{4}=21$

$-6y^2+8y+21\geq 0$

$D=64+84\cdot 6=$

$=568$

$84\cdot 6=504$

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$

$D=16-12(3x^2-6x-4)=$

$=16-36x^2+72x+48$

$-36x^2+72x+64=$

$=-18x^2+36x+32=$

$=-9x^2+18x+16$

$D=18^2+4\cdot 9\cdot 16=$

$=18\cdot 18+4\cdot 9\cdot 16=$

$=18(18+32)=$

$=18\cdot 50$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)