МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = \frac{-2}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \frac{-2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-2}{17} \end{cases}$$

т.к.

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \left[\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = 1\right]$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin\left(2\alpha \pm \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\underset{n\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 2\alpha \pm \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{+4}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha \pm \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} = \pi + \arcsin\frac{+4}{\sqrt{17}} + 2\pi n \end{array}\right.$$

$$\underset{n\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi n \\ 2\alpha = -2\arcsin\frac{+4}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha = \pi + 2\pi n \\ 2\alpha = \pi + 2\arcsin\frac{+4}{\sqrt{17}} + 2\pi n \end{array}\right.$$

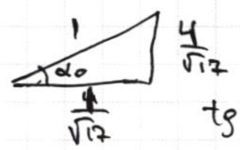
период πn на $tg\alpha$ не влияет

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = tg(\pi) = 0 \\ tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty - \text{неопр} \\ tg\,\alpha = tg\left(-\arcsin\frac{+4}{\sqrt{17}}\right) \\ tg\,\alpha = tg\left(\arcsin\frac{+4}{\sqrt{17}} + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

т.к. ? знач. $tg\alpha \geq 3$ то все три подх.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \end{array}\right.$$



$\operatorname{tg}\alpha_0 = 4$

$\operatorname{ctg}\alpha_0 = \frac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{4} \\ \operatorname{tg}\alpha = -4 \end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \{0; -4; -\frac{1}{4}\}$.

№2

$$\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

Замена
$a' = x-1$
$b = y-6$

$$\begin{cases} \cancel{b+6-6a'-6 = \sqrt{ab}} \\ \cancel{9a'^2 + b^2 = 90} \end{cases}$$

$\cancel{-b = 2a}$

$\cancel{a = 3a' = 3x-3}$

$$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

I сл. $a \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 0$: $b - \sqrt{a}\sqrt{b} - 6a = 0$

$$(\sqrt{b} - 3\sqrt{a})\underbrace{(\sqrt{b} + 2\sqrt{a})}_{\geq 0} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ \sqrt{b} = 3\sqrt{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow b = 9a,\ a \geq 0$$ — подставим во 2-е ур:

$$9a^2 + 81a^2 = 90 \Rightarrow a^2 = \frac{90}{90} = 1 \xRightarrow{a\geq 0} \boxed{a = 1;\ b = 9}$$

II сл. $a < 0 \Leftrightarrow b < 0$: $b - \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} - 6a = 0$

$\cancel{(\sqrt{-b} - 3\sqrt{-a})}($ $\sqrt{-b} = b' \geq 0$

$\sqrt{-a} = a'$

$$-b'^2 - a'b' + 6a'^2 = 0$$

$$(b' + 3a')(-b' + 2a') = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} b' = -3a' \text{ (разные зн.) не бывает} \\ b' = 2a' \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{-b} = 2\sqrt{-a}$

$-b = 4(-a) \Rightarrow b = 4a$;

$9a^2 + 16a^2 = 30 \Rightarrow a^2 = \frac{30}{25} = \cancel{\frac{18}{5}} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}; b = \pm 4\sqrt{\frac{12}{5}}$

~~a, b<0~~ ~~a, b<0~~

$a<0$

$\Rightarrow a = -\frac{3\sqrt{10}}{5}; b = \frac{-12\sqrt{10}}{5}$.

$x = a+1 = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$; $x = 1+1 = 2$

$y = b+6 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$; $y = 9+6 = 15$

Ответ: $\{(2; 15), (1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}; 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5})\}$.

№3.

~~Замена $t = x^2 - 26x > 0$: т.к. логарифмируемое~~

~~$|t| = t$:~~

~~$t^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 12}$~~

Замена $t = 26x - x^2 > 0$ т.к. логарифмируемое.

$|t| = t$: $= |-t|$

$(+t)^{\log_5 12} + t = 13^{\log_5 t} = t^{\log_5 13}$; $t > 0$;

~~$t^{\log_5 12 - 1} + 1 = t^{\log_5 13 - 1}$~~

~~$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 = t^{\log_5 \frac{13}{5}}$~~

$t^{\log_5 12} + t = t^{\log_5 13}$

~~$t = 5$:~~ ~~корен~~ см. след. лист.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$13^{\log_5 t} - t - 12^{\log_5 t} = 0$$

$\log_5 t = a \Rightarrow t = 5^a$:

$$f(a) = 13^a - 5^a - 12^a = 0$$

$a = 2$: $13^2 = 169 = 25 + 144 = 5^2 + 12^2$ – корень.

$\cancel{f'(a) = \ln 13 \cdot 13^a}$

$\cancel{\frac{d(13^a)}{da} = \frac{d(e^{a\ln 13})}{d(a\ln 13)} \cdot \frac{d(a\ln 13)}{da} = e^{a\ln 13} \cdot \ln 13 = \ln 13 \cdot 13^a}$

$\cancel{f'(a) = \ln 13 \cdot 13^a - \ln 5 \cdot 5^a - \ln 12 \cdot 12^a}$

$$13^a = 12^a\left(1 + \left(\frac{5}{12}\right)^a\right)$$

$$\left(\frac{13}{12}\right)^a = 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^a$$

ЛЧ возрастает, ПЧ. убывает $\Rightarrow$ не более 1к

$\Rightarrow a = 2$ – ед. реш.

$\log_5 t = 2 \quad t = 25$

$26x - x^2 = 25$

$x^2 - 26x + 25 = 0$

$(x - 25)(x - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 25. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{1; 25\}$.

№6

т.к. $x > \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 6x \geqslant (ax+b)(3x-2) = 3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b \\ ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28 \end{cases}$$

$3a x^2 + (3b - 2a)x$

см. след. лист

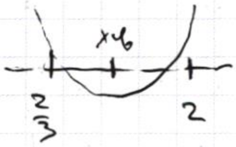
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3ax^2+(3b-2a+6)x-2b-8\le 0 \\ 18x^2-(51+a)x+28-b\le 0 \end{cases}$$

2-е у-е:



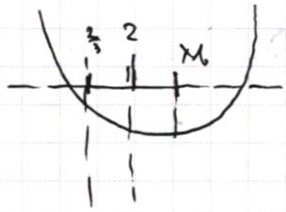


рис 1

$\frac{2}{3}\le x_в\le 2$

$f(x)\le 0 \iff \begin{cases} f(\frac{2}{3})\le 0 & \text{I} \\ f(2)\le 0 & \text{II} \end{cases}$

$\forall x\in[\frac{2}{3};2]$

I $9\cdot 2\cdot\frac{4}{9}-(17\cdot 3+a)\cdot\frac{2}{3}+28-b\le 0$

$\cancel{8/27}\ 8-34-\frac{2}{3}a+28-b\le 0$

$36-34\le\frac{2}{3}a+b$

$\frac{2}{3}a+b-2\ge 0$

II $18\cdot 4-(51+a)\cdot 2+28-b\le 0$

$72-102-2a+28-b\le 0$

$100-102\le 2a+b$

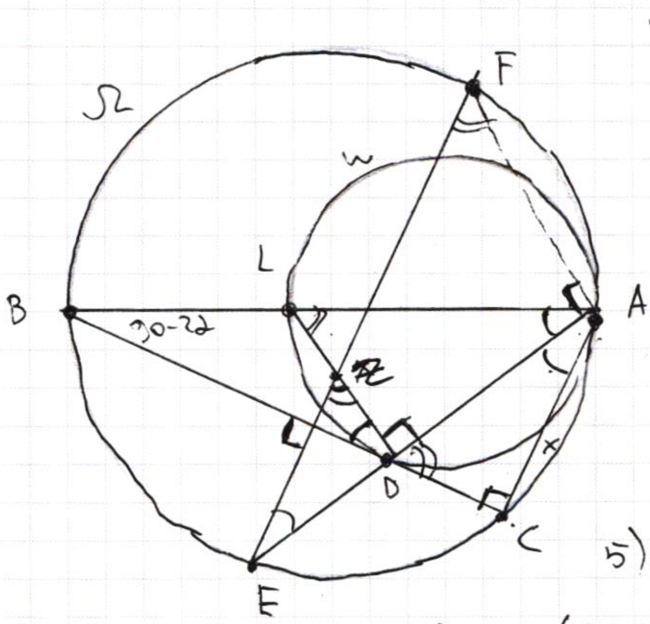
$2a+b\ge -2$

$2a+b+2\ge 0$

1-е у-е: $\iff\begin{cases} a\cdot f(\frac{2}{3})\le 0 \\ a\cdot f(2)\le 0 \end{cases}$ если $a<0$ то рис 1 перевернут.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4



1) Пусть $L = AB \cap \omega$

$\alpha = \angle LDB$

2) ~~∠LAB = α как угол, опир.~~

2) $\angle LAB = \angle LDB$ (кас/хорда)

3) $\angle LDA = 90^\circ$ – т.к. LA – диаметр

4) $\angle BCA = 90^\circ$ – т.к. AB – диам.

5) $\angle ADC = 180 - (\angle LDA + \angle LDB) =$

$= 180 - (90+\alpha) = 90-\alpha$ –

6) $90-\alpha = \angle DLA$ – т.к. прям. уг.

$\angle DCA = \alpha$;

7) Пусть $AC = x$: $DC = x\,tg\alpha = 12$

$BC = x\,tg(2\alpha) = BC = BD + DC = 12+13 = 25$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

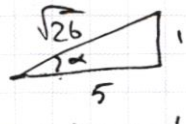
$\frac{25}{x} = \frac{2\cdot\frac{12}{x}}{1-\frac{144}{x^2}} = \frac{24x}{x^2-144} \Rightarrow 25x^2 - 144\cdot 25 = 24x^2$

$\Rightarrow x^2 = 144\cdot 25 \Rightarrow x = 12\cdot 5 = 60 \Rightarrow tg\alpha = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

8) $\angle AFE = \frac{1}{2}\smile EA = \frac{1}{2}\smile EC + \frac{1}{2}\smile CA = \alpha + \angle ABC =$

$= \alpha + (90-2\alpha) = 90^\circ - \alpha = \cancel{90 - arctg}\,\frac{1}{5}$

$\boxed{\angle AFE = arcctg\frac{1}{5}}$.



$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

9) ~~ΔLAD = ΔDAC (по катету + угол) ⇒ LA =~~

$LA = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{x}{\cos^2\alpha} = \frac{60}{(25/26)} = \frac{60\cdot 26}{5\cdot 5} =$

$= \frac{12\cdot 26}{5} = \frac{312}{5} = 2r_\omega$ (т.к. диаметр.) $\Rightarrow \boxed{r_\omega = \frac{156}{5}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10) $BA = \frac{x}{\cos 2\alpha} = \frac{x}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{60}{2\cdot\frac{25}{26} - 1} = \frac{60\cdot 26}{50-26} =$

$= \frac{\cancel{60}^{\,15}\cdot \cancel{26}^{\,13}}{\cancel{24}_{\,3}} = \frac{15\cdot 13}{3} = \frac{195}{3} = 5\cdot 13 = 65$

$R_\Omega = \frac{BA}{2} = \frac{195}{6} = \cancel{\frac{65}{2}}\ \frac{65}{2}$

11) $AD\cdot DE = DC\cdot DB \Rightarrow DE = \frac{12\cdot 13}{12\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{26}}$

$AD = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{60}{5}\cdot\sqrt{26} = 12\sqrt{26}$

(по св-ву впис. четырехуг.)

12) Пусть $Z = LD \cap EF \Rightarrow \angle EZD = 90 - \alpha = \angle EFA$

$\Rightarrow LD \parallel FA \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ = \angle LDE$

13) $S_{EFA} \cancel{= \frac{1}{2} EF \sin(90-\alpha)\ FA = \frac{1}{2}\cdot 2R_\Omega} \cdot \cos\alpha \cdot F$

$\cancel{FA}\ EF = 2R_\Omega$ (т.к. диаметр)

$\Rightarrow FA = 2R_\Omega \sin\alpha;\ EA = 2R_\Omega\cos\alpha$

$S_{EFA} = \frac{1}{2}\cdot EA\cdot FA = 2R_\Omega^2 \cos\alpha\sin\alpha =$

$\cancel{= 2\cdot\left(\frac{195}{6}\right)^2} = 2\cdot\frac{65^2}{4}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} =$

$= \cancel{2}\cdot 5\cdot 13^{\cancel{2}}\cdot 5^2\cdot\frac{1}{\cancel{13}\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5^3\cdot 13}{4} = \frac{125\cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$.

Ответ: $r_\omega = \frac{156}{5}$; $R_\Omega = \frac{65}{2}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arcctg} 5$;

$S_{AEF} = \frac{1625}{4}$.

№5 1 2 3

4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28

Кружком обозначены простые числа.

1) $x = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \ldots \Rightarrow f(x) = f(2^{\alpha}) + f(3^{\beta}) + \ldots =$

$= \alpha f(2) + \beta f(3) + \ldots$

2) $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

3) $f\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$

$\| \; f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -x.$

4) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$ – т.е. найти число таких пар.

5) $f(1)=0$; $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(4) = 2f(2) = 0$;

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$

Т.к. $f(2), f(3) = 0$, то в разложении на множ. (1) 2^{α} 3^{β} не играют роли, поэтому из каждого числа можно убрать эти степени

~~1 2 3 1 2 3 2 5 3 7 2 3 5~~ 11

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$; $f(8) = 0$; $f(9) = 0$; $f(10) = f(5) = 1$;

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$; $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$; $f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$; $f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$; $f(27) = \left[\frac{27}{4}\right] = 6$

1 - 0	6 - 0	11 - 2	16 - 0	21 - 1
2 - 0	7 - 1	12 - 0	17 - 4	22 - 2
3 - 0	8 - 0	13 - 3	18 - 0	23 - 5
$\boxed{4 - 0}$	9 - 0	14 - 1	19 - 4	24 - 0
5 - 1	10 - 1	15 - 1	20 - 1	

– по аналогии и с ост.

"0": 11 шт − 3 = 8 "2": 2 шт "4": 2 шт

"1": 7 шт "3": 1 шт "5": 1 шт

~~Всего: 18 + 6 =~~ 24

См. след. лист.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) пар: $f(x) < f(y)$:

I $f(x) = 0$ — 8 способов

$f(y) > 0$: ~~24 − 11 = 13 спос.~~ $(7+2+2+1+1) = 11$ сп.

~~$11 \cdot 13 = 143$~~ $8 \cdot 11 = 88$

II $f(x) = 1$: $f(y) > 1$:

$7 \cdot (2+2+1+1) = 7 \cdot 6 = 42$

Аналог:

$2 \cdot (1+2+1) = 2 \cdot 4 = 8$; $1 \cdot (2+1) = 3$; $2 \cdot 1 = 2$.

$\Sigma = \overset{88}{\cancel{143}} + 8 + 42 + 3 + 2 = 50 + 148 = 198$.

Ответ: 198.

1 − 0	6 − 0	11 − 2	16 − 0	21 − 1	26 − 3
2 − 0	7 − 1	12 − 0	17 − 4	22 − 2	27 − 6
3 − 0	8 − 0	13 − 3	18 − 0	23 − 5	28 − 1
4 − 0	9 − 0	14 − 1	19 − 4	24 − 0	
5 − 1	10 − 1	15 − 1	20 − 1	25 − 2	

0 : 8
1 : 8
2 : 3
3 : 2
4 : 2
5 : 1
6 : 1

Способов: $f(x) = 0$; $f(y) > 0$:

$8 \cdot (8+3+2+2+1+1) = 8 \cdot 17 = \underline{136}$.

Аналог. с другими:

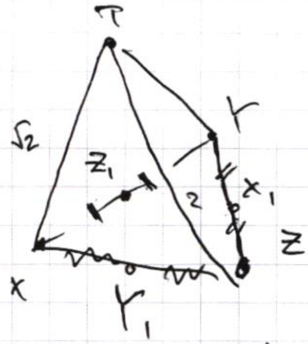
$8 \cdot (3+2+2+1+1) = 8 \cdot 9 = \underline{72}$

~~8~~ $3 \cdot 6 = \underline{18}$; $2 \cdot 4 = \underline{8}$; $2 \cdot 2 = \underline{4}$; $1 \cdot 1 = \underline{1}$

$\Sigma: 136 + 72 \overset{30}{+} 18 + 8 \overset{12}{+} 4 \overset{13}{+} 1 = 136 + 103 = 239$

Ответ: 239 ~~способа~~. пары

1)



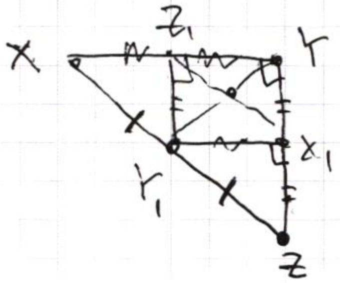
. $Y_1 X_1 Y Z_1$ - вписанный четырехуг.

$YX_1 // Z_1 Y_1$ как средние линии

аналог: $Y_1 X_1 // XY$ =>

Это вписанный параллелограмм

=> прямоугольник. ; $\angle Y = 90°$.



2) центр сферы лежит на ⊥ к центру прямоуг.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

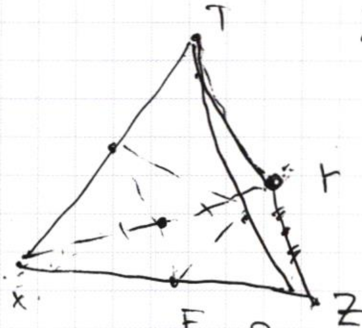
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

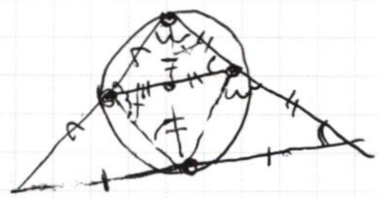
ШИФР

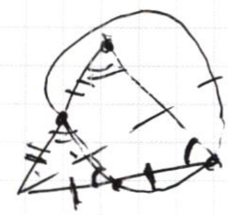
(заполняется секретарём)

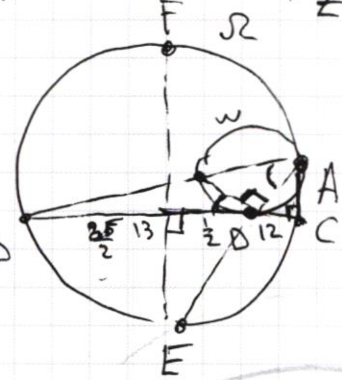
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$XY=\sqrt{3}$; $TX=\sqrt{2}$; $TZ=2$ $\quad XZ$?









$\frac{13+12}{2}=\frac{25}{2}$

$\frac{25}{2}-13=\frac{25}{2}-\frac{26}{2}=-\frac{1}{2}$

4 5 6 7 8 9 10

11 12 13 14 15 16 17 18

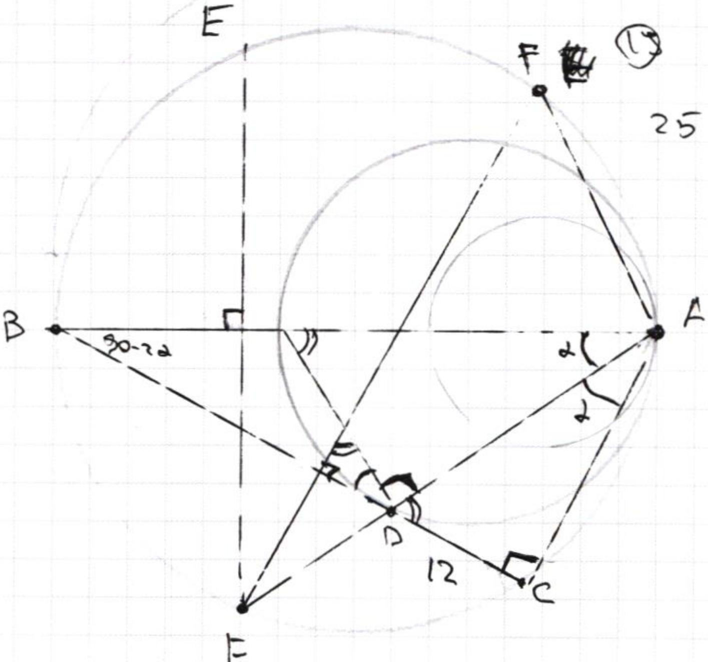
19 20 21 22 23 24

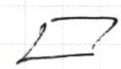
25 26 27 28

$f(5)=1$

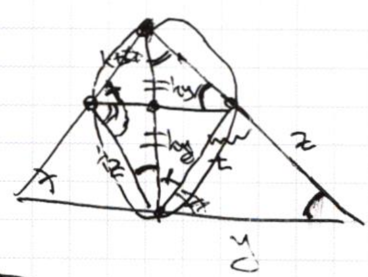
$f(7)=1$

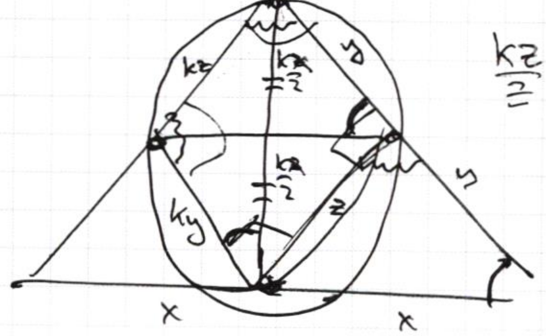
$f(11)=$





BD=13





$\frac{kz}{2}=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{2(2-3x)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$51 : 3 = 17$

$f(x) = 18x^2 - 51x + 28 = \cancel{3(6x^2} - 17x +$

$72 + 28 = 100$

$D = 51^2 - 4\cdot 18 \cdot 28 = 9(17^2 - 4\cdot 2\cdot 28)$ $\quad 51 = 3\cdot 17$

$= \cancel{3(3\cdot} 17^2 - 4\cdot$

$9(289-224) = 9\cdot 65$

$17^2 = 289$; $15 \cdot 13 = 195$

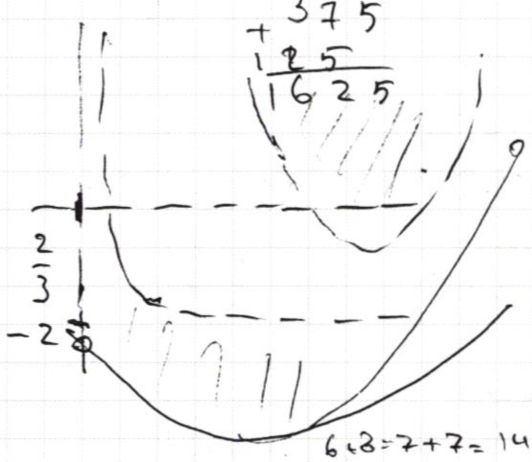
$x_b = \frac{51}{2\cdot 18} = \frac{3\cdot 17}{2\cdot 9\cdot 2} = \frac{17}{2\cdot 3\cdot 2} = \frac{17}{12}$

$17 \cdot 8 = 136$; $28 \cdot 8 = 224$; $16+6=22$

$9 \cdot 65$

$f(x_b)$

$125 \cdot 13 = 1625$



$f\left(\frac{2}{3}\right) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 =$

$= 8 - 34 + 28 = 36 - 34 = 2$

$f(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 =$

$= 2(36 - 51 + 14) = 2(50-51) =$

$= -2 \cdot$

$25 \cdot 5 = 125$

$6+8 = 7+7 = 14$

$x_b = \frac{51}{2\cdot 18} = \frac{17\cdot 3}{2\cdot 9\cdot 2} = \frac{17}{4\cdot 3} = \frac{17}{12}$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = -2 + \frac{4}{2-2} = +\infty$

$f\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$26 \cdot 12 = 312$

$g(2) = -2 + \frac{4}{6-2} = -2 + 1 = -1$

$\frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$

$18\cdot\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 51\cdot\frac{17}{12} + 28 =$

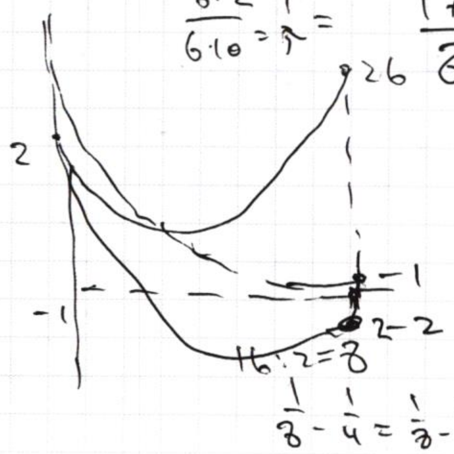
$\frac{8-6}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$

$= \cancel{9}\cdot 2\cdot\frac{17^2}{\cancel{9}\cdot 4^2} - \cancel{51}\, 17\cdot\cancel{3}\cdot\frac{17}{\cancel{12}} + 28$

$\frac{6\cdot 2}{6\cdot 10} = \frac{1}{5} =$

$\frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 = -\frac{17^2}{8} + 28$

$125 \cdot 13 = 1625$



$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 =$

$\frac{51}{2\cdot 18} = \frac{17\cdot 3}{2\cdot 9\cdot 2} = \frac{17}{2\cdot 3\cdot 2} = \frac{17}{12}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$16:2 = 8$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{8}$

$6+3=9$ $\quad 9+8=17$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$\cancel{\cos} 2\alpha \quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad \frac{-1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \qquad 26x - x^2 = x(26-x) \le 13^2 = 169$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-2}{17}$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 - 9 - 36 = 45$ $\quad -45 \quad$ $5\ 12\ 13$

$25+144=169$

$3(3x-6)^2 + (y-6)^2 = 90$

$13 \times 13 = 39 + 13 = 169$

$y - 6x = \sqrt{y(x-1) + 6(1-x)} = \sqrt{(6-y)(x-1)}$

$a = x-1, \quad b = y-6; \quad b+6 = y; \quad a+1 = x; \quad \cancel{y-6a}$

$b + \cancel{6} - 6a - \cancel{6} = \sqrt{ab}$

$b - \sqrt{b}(\sqrt{a}) - 6a = 0 \qquad 4a - 6a = -2a = \sqrt{4a^2}$

$b = 9a: \qquad 9a - 3a - 6a = 0 \qquad a = -\sqrt{a^2} = -|a|$

$12 \times 12 = 24 + 12 = 144$

$\cancel{(b-9a)}(1 - \quad 12^a(1+(\frac{5}{12})^a)$

$(\sqrt{b} - 3\sqrt{a})(\sqrt{b} + 2\sqrt{a}) = 0 \qquad a<0$

$t(t+1)=0$

$t=0$

$t=-1$

$b' = \quad \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-9a} = -3a$

$4a - 6a$

$\sqrt{-9a} = 3\sqrt{-a} \qquad 9a^2 + 16a^2 = 25a^2 = 90$

$-9 = 3 \quad -9+3+6 \qquad a^{\log_b c} = \frac{\log_a c}{\log_a b} \qquad a = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\log_5 t = a$

$t = 5^a$

$\log_b c = \log_a b \cdot \log_a c$

$12^a + 5^a = 13^a$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}; \quad \log_b c = \log_a c \cdot \log_b a = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$13^a = 5^a + 12^a$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)