МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\Rightarrow 4\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha \pm 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha \pm 4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

1) „+": $2\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \,\Big|\, \cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha + 4(1-\operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0$

$-3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 5 = 0 \Rightarrow 3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 5 = 0$

$(\operatorname{tg}\alpha+1)(3\operatorname{tg}\alpha-5) = 0 \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha = -1 ; \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}}$

2) „−": $2\sin\alpha\cos\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \,\Big|\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$

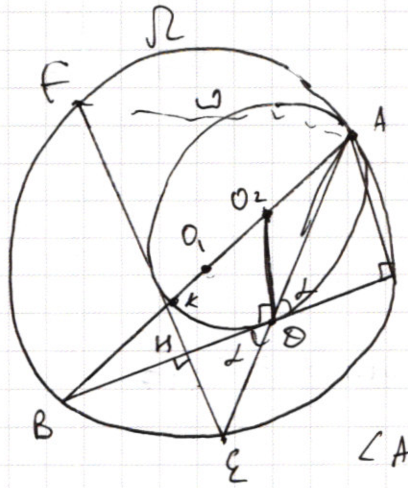
$\Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha - 4(1-\operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow 5\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$(\operatorname{tg}\alpha+1)(5\operatorname{tg}\alpha-3) = 0 \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} ; \operatorname{tg}\alpha = -1}$

Ответ: $\left\{-1 ; \frac{3}{5} ; \frac{5}{3}\right\}$

№4



O_1 – ц. Ω; O_2 – ц. ω

Пусть $O_1B = R$; $O_2A = r$.

$O_2 \in AB$, т.к. точка касания, центры двух касающихся окр-тей лежат на 1 прямой.

$\angle ACB = 90^\circ$ – опир на AB – диаметр

$O_2D \perp BC$, т.к. D – т. касания $\Rightarrow \angle O_2DB = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle O_2BD \sim \triangle ABC$ по 2 углам (общий + прямой)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{O_2D}{AC} = \dfrac{O_2B}{AB}$; $BD = 13$; $BC = 13+12 = 25$

$O_2D = r$; $O_2B = AB - AO_2 = 2R - r$;

$AB = 2R \Rightarrow \dfrac{13}{25} = \dfrac{2R-r}{2R}$; по т. о касат. и секущей из 1 точки:

$BD^2 = BK \cdot AB$, $K = AB \cap \omega$: $BK = 2R - 2r$ (AK – диаметр ω)

$\Rightarrow \begin{cases} 169 = (2R-2r)\cdot 2R \\ 13\cdot 2R = 25(2R-r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 169 = 4\cdot(R-r)\cdot R \\ 24R = 25r \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{25}{24}r \Rightarrow 169 = 4\cdot\dfrac{r}{24}\cdot\dfrac{25}{24}r \Rightarrow r^2 = \dfrac{13^2\cdot 24^2}{4\cdot 25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{r} = \dfrac{13\cdot 24}{2\cdot 5} = \underline{31{,}2}$; $\underline{R} = \dfrac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{24}}\cdot\dfrac{13\cdot\cancel{24}}{\cancel{10}_{2}} = \dfrac{65}{2} = \underline{32{,}5}$

$\Rightarrow O_2D = r = 31{,}2$; $AC = \dfrac{BC\cdot O_2D}{BD} = \dfrac{25\cdot 31{,}2}{13} = 60$, $DC = 12$

$\angle C = 90^\circ \Rightarrow$ по т. Пифагора: $AD^2 = 3600 + 144 = 3744 \Rightarrow AD = 12\sqrt{26}$

По т. о пересек. хордах: $AD \cdot DE = BD \cdot DC \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \dfrac{BD\cdot DC}{AD} = \dfrac{13\cdot\cancel{12}}{\cancel{12}\sqrt{26}} = \dfrac{13\sqrt{26}}{26} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$; $\alpha = \angle BDE = \angle ADC$ – вертик

$\cos\alpha = \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{\cancel{12}}{\cancel{12}\sqrt{26}} = \dfrac{DH}{DE} = \dfrac{DH}{\frac{\sqrt{26}}{2}}$; H – основание перпенд. к BC из E

$\Rightarrow DH = \dfrac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$x-1=a$; $y-6=b \Rightarrow b-6a=y-6x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6a-b)^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36a^2-12ab-ab+b^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36a^2-13ab+b^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-4a)(b-9a)=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ 9a^2+16a^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} b=9a \\ 9a^2+81a^2=90 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 25a^2=90 \\ 90a^2=90 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} a^2=\frac{90}{25} \Rightarrow a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \end{array}$$

т.к. $b-6a=\sqrt{ab} \Rightarrow b-6a\geq 0 \Rightarrow b\geq 6a$

1) $a=\pm 1 \Rightarrow b=\pm 9$; $-9 \ngeq -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1; -9)$ - не реш.

2) $a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$; $b\geq 6a$: $\frac{12\sqrt{10}}{5} \overset{?}{\geq} \frac{18\sqrt{10}}{5}$ - неверно

$-\frac{12\sqrt{10}}{5} \geq -\frac{18\sqrt{10}}{5}$ - верно $\Rightarrow \left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}; -\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

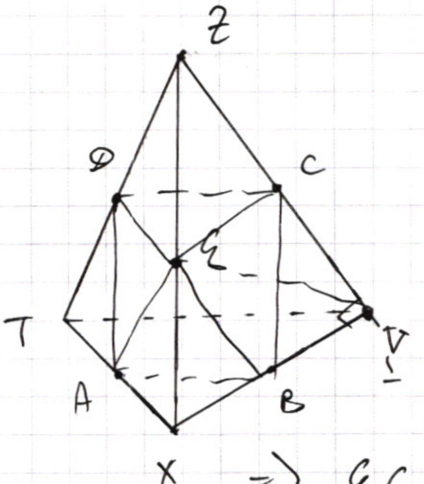
$x=a+1$; $y=b+6$. ; $y-6x\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}+1; -\frac{12\sqrt{10}}{5}+6\right)$; $(2; 15)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7



Середины – A, B, C, D, E;
Т.к. $E, B, C, Y \in$ сфере Ω,
$E, B, C, Y \in (XYZ) \Rightarrow E, B, C, Y \in$
$\in$ Окр-ти; EC; EB – ср. линии
$\Rightarrow EC \parallel XY$; $BE \parallel ZY \Rightarrow$
$\Rightarrow ECYB$ – парал-м; $ECYB$ – вписан
$\Rightarrow ECYB$ – прямоуг $\Rightarrow \angle ZYX = 90°$
Аналогично, $DCBA \in$ одной окр-ти, т.к. лежат в 1 пл-ти сечения ($CD \parallel TY$; $AB \parallel TY$) и;
$DC \parallel AB$; DA и BC – ср. линии $\Rightarrow ABCD$ – парал-м, вписан $\Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ – прямоуг. ~~$\Rightarrow DC = AD \Rightarrow TY = XZ = ...$~~
$\Rightarrow \angle DAB = 90°$;
$EABCDY$ – октаэдр, вписан в Ω, причем $E, B, C, Y \in (XYZ)$
$\Rightarrow EBCY$ – квадрат $\Rightarrow CY = BY = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ По т. Пифагора: $XZ = \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$. ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x^2-26x<0$

$x(x-26)<0$

$\Rightarrow$ ~~$x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)$~~

$x\in(0;26)$

$t=26x-x^2$:

$t^{\log_5 12}-13^{\log_5 t} \geq -t$, $t>0$

$t^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 t}-t$

$\log_5\left(t^{\log_5 12}\right) \geq \log_5\left(13^{\log_5 t}-t\right)$

$\log_5 12\cdot\log_5 t \geq \log_5\left(13^{\log_5 t}-t\right)$

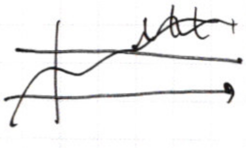
$\log_5 t \geq \dfrac{\log_5\left(13^{\log_5 t}-t\right)}{\log_5 12}=\log_{12}\left(13^{\log_5 t}-t\right)$

$\Leftrightarrow \log_5 t \geq \log_{12}\left(13^{\log_5 t}-t\right)$; $\log_5 t=a$

$a \geq \log_{12}\left(13^a-5^a\right) \Rightarrow 12^a \geq 13^a-5^a$

$\Rightarrow 5^a+12^a \geq 13^a \quad \Big|\cdot\dfrac{1}{13^a}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$; $f(a)=\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \nearrow$



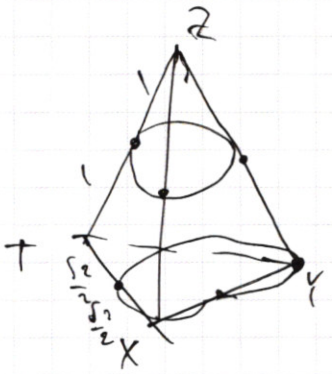
$\Rightarrow$ при $a \geq 2$ — верно

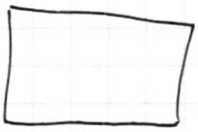
$\Rightarrow \log_5 t \geq 2 \Rightarrow t \geq 25 \Rightarrow 26x-x^2 \geq 25$

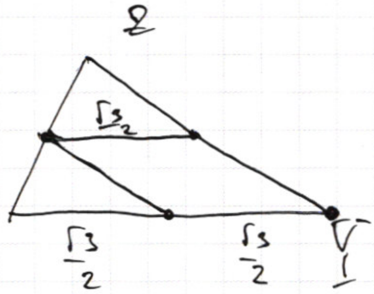
$\Rightarrow x^2-26x+25 \leq 0$

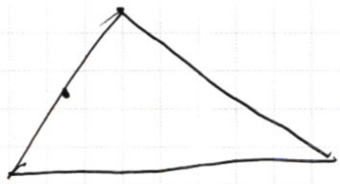
$(x-1)(x-25)\leq 0 \Rightarrow x\in[1;25]$,

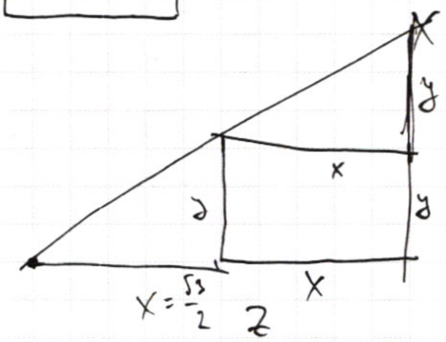
Ответ: $x\in[1;25]$

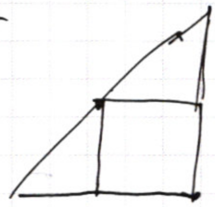


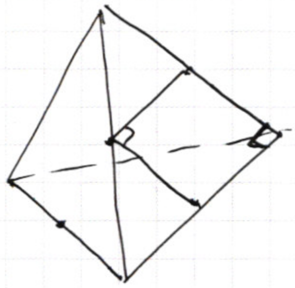


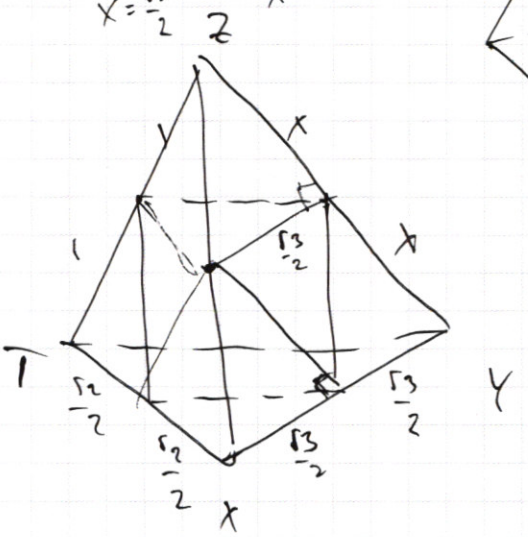












☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№4 (продолж.)

$\sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{60}{12\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{HE}{DE} \Rightarrow HE = \frac{5\,DE}{\sqrt{26}} = \frac{5\cdot\frac{\sqrt{26}}{2}}{\sqrt{26}} = \frac{5}{2}$

по т. о пересек. хордах: $EH \cdot FH = BH \cdot CH$

$\Rightarrow \frac{5}{2}\cdot FH = (BD - HD)\cdot(CD + HD)$; $HD = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BH = CH = \frac{25}{2} \Rightarrow FH = \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{25}{2} = \frac{125}{2}$

$\Rightarrow FE = FH + HE = \frac{125}{2} + \frac{5}{2} = 65 = 2R \Rightarrow FE$ – диаметр.

$\Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$; $\angle AFE$: $\sin\angle AFE = \frac{AE}{FE}$;

$AE = AD + DE = 12\sqrt{26} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{25}{2}\cdot\sqrt{26}$; $FE = 2R = 65$

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{\frac{25}{2}\cdot\sqrt{26}}{65} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF\cdot\sin\angle AEF = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot 65\cdot\frac{HD}{DE} =$

$= \frac{1}{4}\cdot 25\cancel{\sqrt{26}}\cdot 65\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{26}}{2}} = \frac{1}{4}\cdot 25\cdot 65 = 406{,}25$

Ответ: 31,2 ; 32,5 ; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$; $S = 406{,}25$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(3b+2a+12)^2 =$

$= \dots + 72b + 48a$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ для $\forall x \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$D = 51^2 - 4\cdot 18\cdot 28$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq 18x^2 - 51x + 28$

$= 9\cdot 17^2 - 4\cdot 9\cdot 2\cdot 4\cdot 7$

$289 - 224 = 65$ $\quad = 9(17^2 - 4\cdot 2\cdot 4\cdot 7)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad a, b \in R,\ a, b > 0$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x\cdot y^{-1}) = f(x) + f(y^{-1}) < 0$ $\quad f(x) < f(y^{-1})$

$5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;$ $\quad \frac{x}{y}$ $\quad 2a+b\ max = -1$

$f(5) = 1;\ f(7) = 1;\ f(4) = 2$ $\quad (5+2b)^2\ +48a$

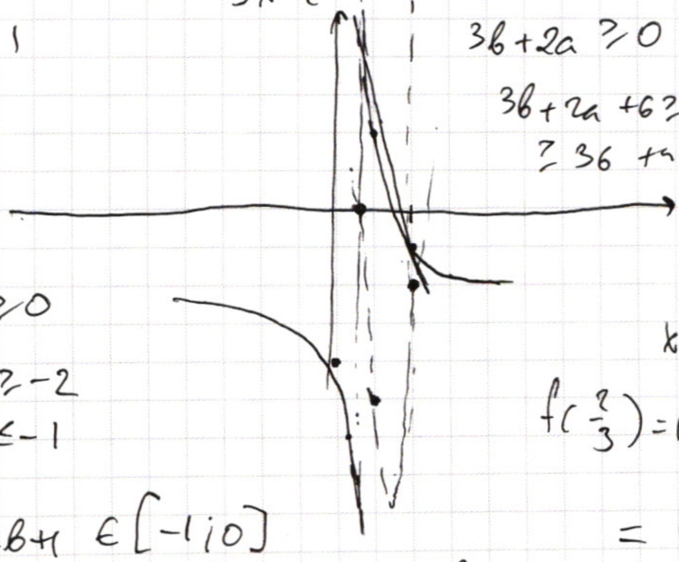
$\frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\left(\frac{6x-4}{3x-2} - \frac{4}{3x-2}\right) = -\left(2 - \frac{4}{3x-2}\right)$

$= \frac{4}{3x-2} - 2$ $\quad \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$ $\quad \frac{4}{7} - 2$

$\frac{x^2}{3x-2} = 2\ 1$

$2 = 3x-2$

$x = \frac{4}{3}$



$3b + 2a \geq 0$

$3b+2a+6 \geq 6$

$\geq 36 + 48a \leq 0$

$f(1) = 18+28-51$

$= 46 - 51 = -5$

$f(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28$

$= 72 + 28 - 102$

$= -2$

$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b \geq 0 \\ 2a+b \geq -2 \\ 2a+b \leq -1 \end{cases}$

$x_B = \frac{51}{36} = 1\frac{15}{36}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28$

$2a+b+1 \in [-1; 0]$ $\quad = 8 - 34 + 28 = 0$

$(3b+2a)^2 = \left(\left(b+\frac{2}{3}a\right)\cdot 3\right)^2$ $\quad b \geq -\frac{2}{3}a$

$(3b+2a+6)^2 = 9b^2 + 4a^2 + 36 + 12ab + 24a + 36b$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

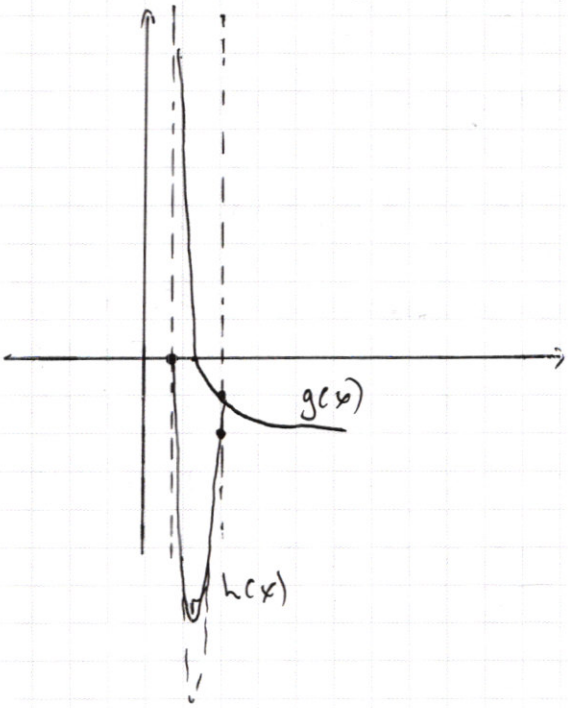
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ для $\forall x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$f(x) = ax+b$; $g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$; $h(x) = 18x^2-51x+28$



$g(2) = -1$; $g\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

$h\left(\frac{2}{3}\right) = 0$; $h(2) = -2$

$f(x)$ — прямая, должна лежать выше $h(x)$ и ниже $g(x)$ на $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 \\ f(2) \in [-2; -1] \\ \cancel{f(x) \ldots ax+b}, \cancel{x_0 \ldots \text{касание}} \end{cases}$$

$f(x) = g(x)$ максимум $\cancel{f(x) \ldots g(x)}$ в 1 т.

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot \frac{2}{3} + b \geq 0 \\ 2a+b \in [-2; -1] \\ ax+b = \frac{8-6x}{3x-2} \text{ — максимум 1 реш. } (*): \end{cases}$$

$(*)$: $(ax+b)(3x-2) = 8-6x$

$3ax^2 + x(3b-2a+6) - 2b - 8 = 0$

$D \leq 0$: $D = (3b-2a+6)^2 + 4(2b+8) \cdot 3a \leq 0$

$\Leftrightarrow 9b^2+4a^2+36-12ab-24a+36b+24ab+96a \leq 0$

$(9b^2+4a^2+12ab+72a+36b+36) \leq 0$

$\cancel{(3b+2a)^2 + 36(2a+b+1) \leq 0}$

$(3b+2a+6)^2 + 48a \leq 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

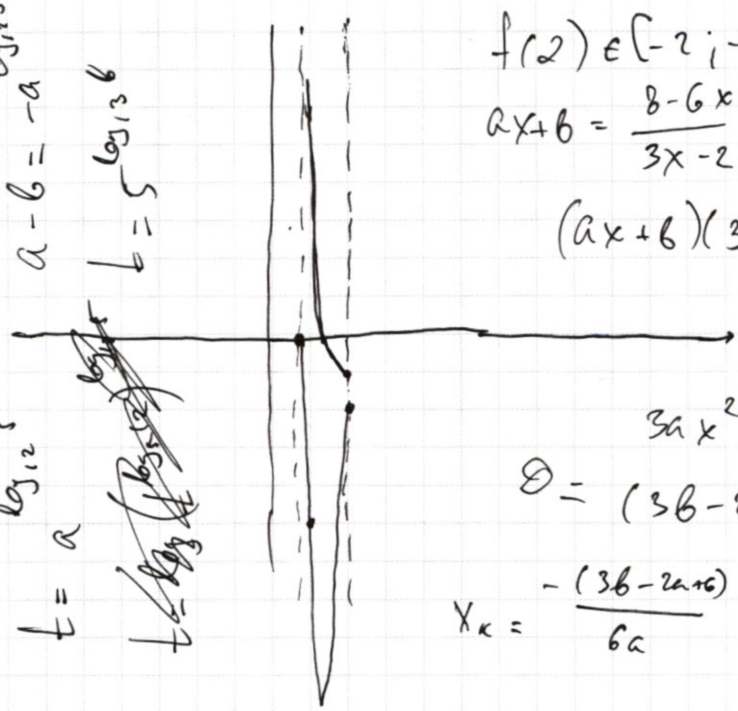
$t^{\log_5 12} - 13^{\log_5 t} \geq -t$

$t^{\log_5 12} = a \qquad \log_5 12 = \log_t a$

$13^{\log_5 t} = b \qquad \log_5 t = \log_{13} b$

$t = a^{\log_{12} 5} \qquad a - b = -a^{\log_{12} 5}$

$t = 5^{\log_{13} b}$



$f(2) \in [-2; -1]$

$ax + b = \dfrac{8-6x}{3x-2}$ 1 реш.

$(ax+b)(3x-2) = 8-6x$

$3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b = 8 - 6x$

$3ax^2 + 3bx - 2ax + 6x - 2b - 8 = 0$

$D = (3b - 2a + 6)^2 + 4(2b+8)3 = 0$

$x_k = \dfrac{-(3b-2a+6)}{6a} = 0$

$\Rightarrow 9b^2 + 4a^2 + 36 - 12ab - 24a + 36b + 24b + 96 = 0$

$9b^2 + 4a^2 - 12ab + 60b - 24a + 132 = 0$

$\left(\dfrac{8-6x}{3x-2}\right)' = \dfrac{-6(3x-2) - (8-6x)\cdot 3}{(3x-2)^2} = a = \dfrac{-\cancel{18x} + 12 - 24 + \cancel{18x}}{(3x-2)^2} = \dfrac{-12}{(3x-2)^2} = a$

$a = \dfrac{-12}{(3x_0-2)^2} \qquad f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 \qquad f(x_0) \geq ax + b$

$13^{\log_5 t}$

$\log_5 12 = \dfrac{\log_{13} 12}{\log_{13} 5}$

$(3b + 2a + \alpha)^2 = 9b^2 + 4a^2 + \alpha^2 + 6\alpha b + 4a\alpha + 12ab$

$72a ; 36b \qquad \cancel{6\alpha b = 2a\alpha}$

$72a - 4a\alpha = 2(36b - 6\alpha b)$

$18 - \alpha = 18 - 3\alpha \Rightarrow$

$\log_5 t \geq \log_{12}(13^{\log_5 t} - t)$

$t^{\log_5 12} - 13^{\log_5 t} \geq -t$

$\log_5 12 = \dfrac{\log_t 12}{\log_t 5} = \log_t 12 \cdot \log_5 t$

$\log_5 t = \dfrac{\log_{12} t}{\log_{12} 5}$

$= \log_{12} t \cdot \log_5 12$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$= \sin(2\alpha+2\beta+2\beta) =$

$= \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) \overset{+\sin 2\alpha}{=} -\frac{2}{17}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{17}$; $\cos^2(2\alpha+2\beta) = \frac{16}{17} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha+\sin\beta =$ $\quad + \begin{cases}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\end{cases}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ $\quad \alpha+\beta = x$ $\quad \frac{x+y}{2} = \alpha$

$\sin x+\sin\alpha = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ $\quad \alpha-\beta = y$ $\quad \frac{x-y}{2} = \beta$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$ $\mid$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)+\cos 2\beta = 0 \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0\end{cases}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos^2\beta = \frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \quad \begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \Rightarrow (y-6x)^2=(x-1)(y-6)$$

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \end{cases} \quad y-6=a \quad x-1=b \quad 6b=6x-6 \quad a=y-6 \quad a-6b=y-6x$$

$$\begin{cases} 9b^2+a^2=90 \\ (a-6b)^2=ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9b^2+a^2=90 \\ a^2-12ab+36b^2=ab \end{cases} \Rightarrow$$

$$\times\begin{array}{r} 81 \\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9b^2+a^2=90 \\ a^2-13ab+36b^2=0 \end{cases} \quad (a-9b)(a-4b)=0 \qquad \frac{90}{145}=\frac{18}{29}$$

$$\sin\beta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{26}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{26}} \qquad \frac{3}{\sqrt{73}}= \qquad 29 \qquad \frac{90}{730}=\frac{9}{73}$$

$$=\cos(90^\circ-\beta)=\frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin(90^\circ-\beta)=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$=\frac{3\sqrt{58}}{29} \quad 6b-a=2b>0 \quad \sqrt{\frac{18}{29}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq x^2-6x \qquad x^2-26x=t$$

$$\log_5\left(|x^2-26x|^{\log_5 12}-13^{\log_5(26x-x^2)}\right)=\log_5(x^2-26x)$$

$$|t|^{\log_5 12}-13^{\log_5(-t)} \geq +t \qquad -t>0 \quad -t=b>0 \quad t<0$$

$$|t|^{\log_5 12}-13^{\log_5 t} \geq t \qquad \log_5 b=\log_{13} a$$

$$b^{\log_5 12}-13^{\log_5 b} \geq -b \qquad 13^{\log_5 b}=a$$

$$b^{\log_5 12}+b \geq 13^{\log_5 b} \qquad \log_5\left(b\left(b^{\log_5 12-1}+1\right)\right) \geq \log_5 b\cdot\log_5 13$$

$$b\left(b^{\log_5 12-1}+1\right) \geq 13^{\log_5 b} \qquad \log_5 b+\log_5\left(b^{\log_5 12-1}+1\right) \geq \log_5 b\cdot\log_5 13$$

$$\times\begin{array}{r} 625 \\ 65 \\ \hline 3125 \\ 3750 \\ \hline 40625 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 65 \\ 25 \\ \hline 325 \\ 130 \\ \hline 1625 \end{array} \qquad 1625 : 4 = 406{,}25$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

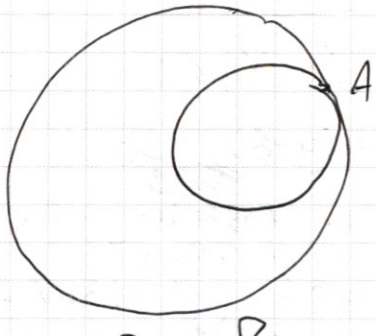
$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

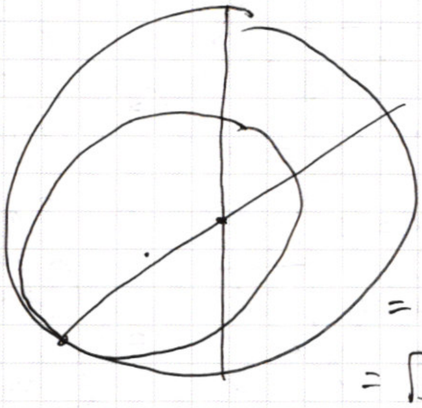
$2\cancel{\sin\alpha\cos\beta + 4(2\cos^2\alpha - 1)}$ $\quad 2\sin\alpha\cos\beta + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}$

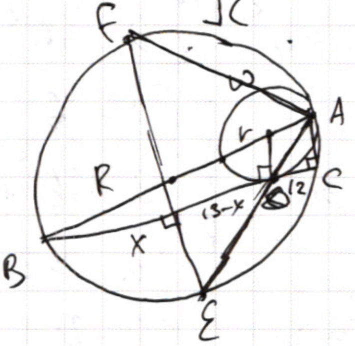
$2\operatorname{tg}\alpha + 4(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}^2\alpha\ 4 = 0$

$AO \cdot OE = 13 \cdot 12$

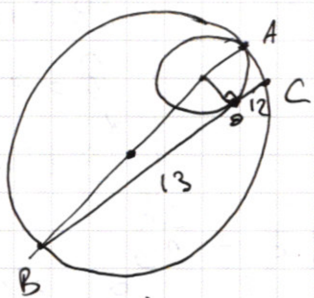


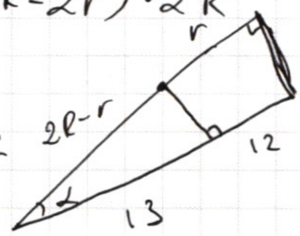


$\sqrt{3600+144} =$
$= \sqrt{36(100+4)} =$
$= \sqrt{36 \cdot 4(25+1)} = 12\sqrt{26}$



$BO^2 = 169 = (2R - 2r) \cdot 2R$





$\cos\alpha = \frac{13}{2R-r} = \frac{2R}{25}$

$\frac{\cancel{13} \cdot \cancel{24}^{12}}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{13}}$

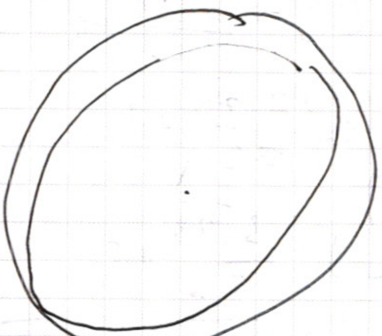
$169 = 4R(R-r)$

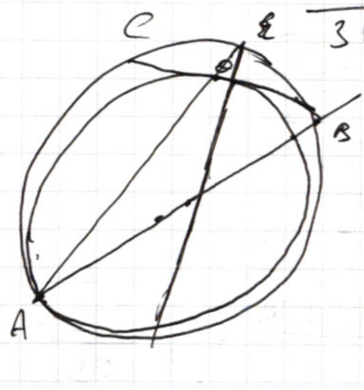
$R = \frac{25}{24} r \qquad 24(r-R) = -r \Rightarrow 24(R-r) = r$

$169 = 4\left(\frac{25}{24}r - r\right) \cdot \frac{25}{24} r \Rightarrow 169 = 4 \cdot \frac{r}{24} \cdot \frac{25}{24} r$

$r^2 = \frac{169 \cdot 24^2}{4 \cdot 25} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 24}{2 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 24}{10}$

$\times\ 13$
$\ \ 24$
$+\ 52$
26
312





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$+\log_5 12 \geq 13^{\log_5 6} - t$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Замена: $x-1=a$; $y-6=b$. Замечу, что $b-6a=y-6x$

Тогда: $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6a-b)^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-9b)=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 9\cdot 16b^2+b^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 9\cdot 81b^2+b^2=90 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 145b^2=90 \\ 730b^2=90 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=\frac{18}{29} \\ b^2=\frac{9}{73} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\pm\frac{3\sqrt{58}}{29} \\ b=\pm\frac{3\sqrt{73}}{73} \end{array}\right.$$

Т.к. $6b-a=\sqrt{ab}$, то $6b-a\geq 0$, $a=4b \Rightarrow 2b\geq 0 \Rightarrow b\geq 0$

$\Rightarrow b=-\frac{3\sqrt{58}}{29}$, $b=-\frac{3\sqrt{73}}{73}$ – не подходят

$\Rightarrow \begin{cases} a=4\cdot\frac{3\sqrt{58}}{29} \\ b=\frac{3\sqrt{58}}{29} \end{cases}$; $\begin{array}{l} x=a+1 \\ y=b+6 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{12\sqrt{58}}{29}+1 \\ y=\frac{3\sqrt{58}}{29}+6 \end{cases}$

$\begin{cases} a=9\cdot\frac{3\sqrt{73}}{73} \\ b=\frac{3\sqrt{73}}{73} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=\frac{27\sqrt{73}}{73}+1 \\ y=\frac{3\sqrt{73}}{73}+6 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{12\sqrt{58}}{29}+1;\ \frac{3\sqrt{58}}{29}+6\right)$; $\left(\frac{27\sqrt{73}}{73}+1;\ \frac{3\sqrt{73}}{73}+6\right)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)