ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)+|10x-x^2|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$.

$10x-x^2>0$ (существует $\log_3(10x-x^2)$). Пусть $10x-x^2=a$, тогда:

$\begin{cases} a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a} \\ a>0 \end{cases}$ Обе части положительные. Логарифмируем по основанию 5.

$\log_5(a+a^{\log_3 4})\geq \log_3 a$.

$\log_5(a+a^{\log_3 4})\geq \frac{1}{\log_5 3}\log_5 a$.

$\log_5(a+a^{\log_3 4})-\log_5 a^{\frac{1}{\log_5 3}}\geq 0$.

$\begin{cases} (5-1)(a+a^{\log_3 4}-a^{\frac{1}{\log_5 3}})\geq 0. \\ a>0. \end{cases}$

$a+a^{\log_3 4}-a^{\frac{1}{\log_5 3}}\geq 0.$ $\frac{1}{\log_5 3}>1$, $\log_3 4>1$.

Для ~~...~~: $0<a<1$ $a>a^{\frac{1}{\log_5 3}}\Rightarrow a+a^{\log_3 4}-a^{\frac{1}{\log_5 3}}>0$

$(a-a^{\frac{1}{\log_5 3}})>0$.

$f(b)=b+b^{\log_3 4}-b^{\frac{1}{\log_5 3}}$.

$f'(b)=1+$ ~~...~~ $\log_3 4\, b^{\log_3 4-1}-\frac{1}{\log_5 3}b^{\log_3 5-1}$.

$f'(b)=1+\log_3(4)\,b^{\log_3(4)-1}-\log_3 5\, b^{\log_3(5)-1}$.

При $a>1$ $a^{\log_3 5}>a^{\log_3 4}>a$, то есть знак $a+a^{\log_3 4}-a^{\log_3 5}$ однозначно определить нельзя. При больших x $f(a)$ $a+a^{\log_3 4}-a^{\log_3 5}$ убывает. Заметим, что при $a=3$ $f(a)\geq 0$, а при $a=9$ $f(a)=0\Rightarrow$ при $a>9$ $f(a)<0$ и нам подходит $a\in(1;9]$. $a=1$ тоже подходит

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Имеем $0<a\le 9$.

$0<10x-x^2\le 9$. $\begin{cases}10x-x^2\le 9\\ 10x-x^2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-10x<0\\ x^2-10x+9\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}0<x<10\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 9\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}0<x\le 1\\ 9\le x<10\end{array}\right.$

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

№1.

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}\end{cases}$ $\Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(4\alpha+4\beta)\cos 4\beta=4\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)\times$
$\times\cos 4\beta$

$4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\pm\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 4\beta=-\frac{2}{5}$.

$\pm\frac{8}{5}\cos 4\beta=-\frac{2}{5}$. $\cos 4\beta=\pm\frac14 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2\beta=\pm\sqrt{\frac{5}{8}}\\ \cos 2\beta=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2\beta=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\\ \cos 2\beta=\pm\sqrt{\frac{5}{8}}\end{cases}\end{array}\right.$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$.

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\cos 2\beta+\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$.

$2\operatorname{tg}\alpha\cos 2\beta+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}(\operatorname{tg}^2\alpha+1)$.

~~1) $\sin 2\beta=\sqrt{\frac{5}{8}}$, $\cos 2\beta=\sqrt{\frac{3}{8}}$. $2\operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{\frac38}+\sqrt{\frac58}-\sqrt{\frac58}\operatorname{tg}^2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{\sqrt5}{5}$.~~

$\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{\sqrt5}{5}-\sin 2\beta\right)+2\operatorname{tg}\alpha\cos 2\beta+\left(\sin 2\beta+\frac{1}{\sqrt5}\right)=0$.

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{-\cos 2\beta\pm\sqrt{\cos^2 2\beta-\left(\sin 2\beta+\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt5}-\sin 2\beta\right)}}{\frac{\sqrt5}{5}-\sin 2\beta}$.

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{-\cos 2\beta\pm\sqrt{\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta-\frac15}}{\frac{1}{\sqrt5}-\sin 2\beta}$.

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{-\cos 2\beta\pm\sqrt{\frac45}}{\frac{1}{\sqrt5}-\sin 2\beta}$ $\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{-\cos 2\beta\pm\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}-\sin 2\beta}$.

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{\frac38}\pm\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}\pm\sqrt{\frac58}}$ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\pm\sqrt{\frac58}\pm\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}\pm\sqrt{\frac38}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\dfrac{\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\sqrt{\frac{5}{8}}}$, $\dfrac{\pm\sqrt{\frac{5}{8}}\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\sqrt{\frac{3}{8}}}$.

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6. \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 12y \\ x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-26xy+169y^2)-25y^2+12y+x-6=0. \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9-90=0. \\ x\geq 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-13y)^2-25y^2+12y+x-6=0. \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x\geq 12y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-13y)^2-(25y^2+10y+1)+2y-5+x=0. \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x\geq 12y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-13y)^2-(5y-1)^2+2y-5+x=0. \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x\geq 12y \end{cases}$$

Продолжение на стр 7

№5.

Из условия

$f(2)=f(3)=0$
$f(5)=f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=f(19)=4.$
$f(23)=5.$

$\Rightarrow$

$f(1)=0.$
$f(4)=0$
$f(6)=0.$
$f(8)=0.$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(12)=0.$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0.$

$f(18)=0$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(24)=0$
$f(25)=2.$

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y}).$

$f(x)\geq 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y})<0.$

$f(\frac{1}{y})+f(y)=f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{y})=-f(y).$

Можем получить $f(x)=\left[\begin{array}{l}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\right.$

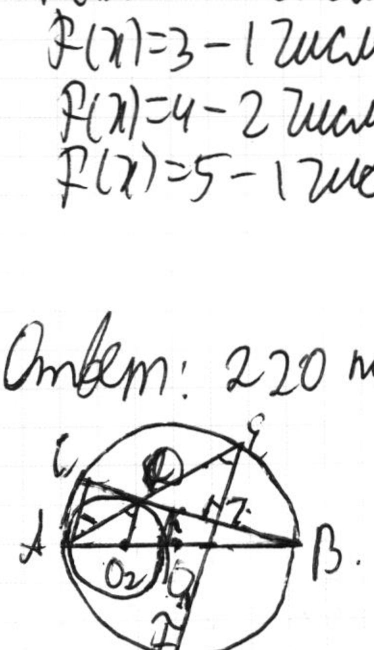
Нам подходят пары

$f(x)$ а	б	в	г	д
0–1	1–2	2–3	3–4	4–5.
0–2	1–3	2–4	3–5	
0–3	1–4	2–5		
0–4	1–5			
0–5				

$f(x)=0$ – 11 чисел
$f(x)=1$ – 7 чисел
$f(x)=2$ – 3 числа
$f(x)=3$ – 1 число
$f(x)=4$ – 2 числа
$f(x)=5$ – 1 число.

$n_д=2\cdot 1=2$ пары
$n_г=1\cdot 2+1\cdot 1=3$ - пары
$n_в=3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 1=12$ - пар.
$n_б=7(3+1+2+1)=49$ - пар
$n_а=11\cdot(\underset{10}{7+3}\underset{11}{+1}\underset{13}{+2}\underset{14}{+1})=154$ - пары.
$n_0=154+\underset{66}{49+12}\underset{17}{+3}\underset{5}{+2}=220$ пар.

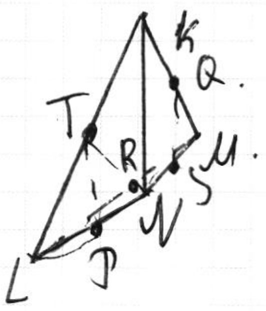
Ответ: 220 пар.



№4.

Дано: $\Omega(O_1;R)$, $\omega(O_2;r)$
BD - касательная
$EF\perp BC$, $BD=\frac{17}{2}$ $CD=\frac{15}{2}$.

Найти: R, r, $\angle AFE$.



Дано: $KL=3$ $KM=1$, $MN=\sqrt{3}$.
R, P, S, T, Q - середины боковых рёбер.
N, R, P, S, T, Q лежат на одной сфере.

Найти: $\angle M$.

Решение.

$QR = KL \cdot 0,5 = 1,5$ $TR = KM \cdot 0,5 = 0,5$ $TQ = LN \cdot 0,5$.

PQ - средняя линия и $PRSN$ - параллелограмм по признаку, $PRSN$ - вписан в окружность $\Rightarrow$ $PRSN$ - прямоугольник $\Rightarrow \angle LNM = 90°$.

Аналогично $TQSP$ - прямоугольник

$\angle TPS = 90° \Rightarrow TP \perp PS$.

$\angle RP\cancel{S}N = 90° \Rightarrow PR \perp PN$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение.

1) $K \in AB$ и AK - диаметр окружности ω, тогда:

$BD^2 = BK \cdot AB$. $BD^2 = 2R(2R-2r)$.

$\angle ACB = 90°$ (AB - диаметр) $\Rightarrow AC \parallel DO_2 \Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R}$. $2BD \cdot R = BC \cdot 2R - BC \cdot r$.

$2R(BC-BD) = BC \cdot r$ $r = \frac{2R(BC-BD)}{BC}$

$r = \frac{2R \cdot \frac{15}{2}}{16} = \frac{15}{16}R$. $\frac{17^2}{4} = 4R(R - \frac{15}{16}R)$.

$\cancel{17^2 = 16R^2 - 15R}$. $\cancel{16R^2 - 15R - 17^2 = 0}$.

$\cancel{R = \frac{15 \pm \sqrt{225+4 \cdot 17^2 16}}{64} = \frac{15 \pm \sqrt{18721}}{64}}$

$\frac{17^2}{4} = 4R \cdot \frac{R}{16}$. $\frac{R^2}{4} = \frac{17^2}{4} \Rightarrow \boxed{R = 17}$

$\boxed{r = \frac{15}{16} \cdot 17 = \frac{255}{16} = 15\frac{15}{16}}$

2) $\angle AEF = \angle ADO_2$ (соответственные при $EF \parallel DO_2$ секущей AD).

$\angle ADO_2 = \angle CAD$ (накрест лежащие при $AC \parallel DO_2$).

3) По т. Пифагора в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$).

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$ $AC = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{100 \cdot 9} = 30$.

~~$\cos CAD = \frac{CD}{}$~~

$\operatorname{tg} CAD = \frac{CD}{AC}$ ($\triangle ACD$) $\operatorname{tg} CAD = \frac{15}{2 \cdot 30} = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle CAD = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Ответ: $R = 17$, $r = 15\frac{15}{16}$, $\angle AEF = \operatorname{arctg} 0{,}25$.

№7.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

прод №2.

$$\begin{cases} (x-18y+1)(x-8y-1)+2y+x-5=0 \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=96 \\ x \geq 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 12y \\ 36y^2+26xy-12x-144y^2+36y-45-12y-x+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 12y \\ -108y^2+26xy-13x-48y-39=0 \end{cases}$$

$13x(2y-1)$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

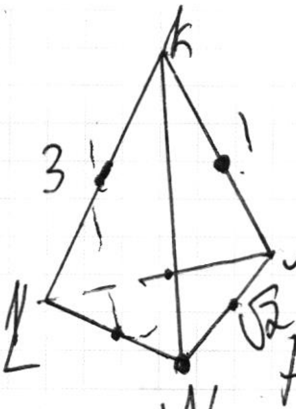
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

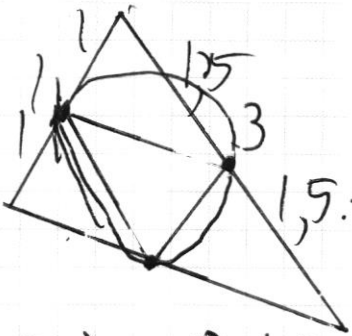
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

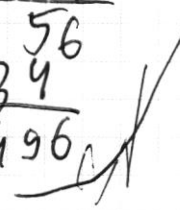




$\times\begin{array}{r}289\\64\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}1156\\+1734\\\hline 18496\end{array}$ $\quad 1{,}5\cdot$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\+17\\\hline 289\end{array} = \boxed{18721}$ $\quad 15^2 + 8^2\cdot 17^2 =$

$\times\begin{array}{r}18496\\225\\\hline 18721\end{array}$



$f(1)=f(2)=f(3)=0$ $\quad f(17)=f(19)=4$ $\quad f(2)\in[2;7]$

$f(5)=f(7)=1$ $\quad f(23)=5.$ $\quad f(3)\in[3;4)$

$f(1)=f(5)-f(5)=0.$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(5)\in[5;6).$ $\quad f(7)\in[7;8).$

$f(13)=3$

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y}).$ $\quad f(2)+f(3)\in$

$a^{\log_3 4-1}-a^{\log_3 5-1}+1\geq 0.$ $\quad \times\begin{array}{r}39\\19\end{array}$

$x^2-10x.$ $\quad BD\cdot 4$

$\frac{10}{2}=5.$ $\quad 5^2-50=-25.$

$a_{max}=25.$

BD^2 $\quad BD^2=(2R-r)^2-r^2=$
$=4R^2-4Rr+r^2-r^2=$
$=4R(R-r).$

$$\begin{cases}(x-13y)^2-25y^2+12y+x-6=0\\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0.\end{cases}$$

$\begin{array}{r}45\\+36\\\hline 81\end{array}$

$(x-13y)^2-25y^2+12y+x-6=0$

$\cancel{(x^2-12x+36)+36y^2-12y+1}$

$24y^2+2y-1$

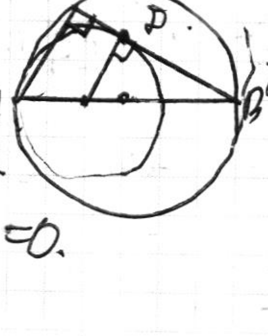
$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{24}=\frac{-1\pm 5}{24}.$

$(x-13y)^2-25y^2+12y+x-6=0$

$(x-6)^2-36y+36y^2-81=0.$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0.$

$x^2-(26y-1)x+144y^2+12y-6=0.$



$26^2-24^2=$
$=2\cdot 50$

$x^2-(26y-1)x+6(24y^2+2y-1)=0.$

$x^2-(26y-1)x+6\cdot 24(y+\frac{1}{4})(y-\frac{1}{6})=0.$

$x^2-(26y-1)x+6$

$D=26^2y^2-52y+1-4\cdot 144y^2-148y+4=100y^2-100y+5.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

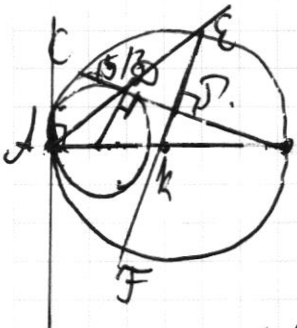
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

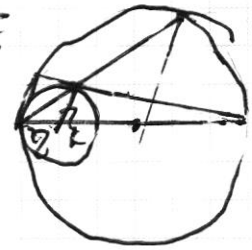
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AD : AE =$

$= AO : Ak$



$2R-2$

$$\begin{array}{r} 139 \\ \times 139 \\ \hline 1251 \\ +417 \\ 139 \\ \hline 19321 \end{array}$$

$\dfrac{2R-2}{2R} = \dfrac{17}{2\cdot 16} = \dfrac{17}{32}$

$34R = 64R - 32z$

$30R = 32z$

$z = \frac{15}{16}R$

$BD \cdot CD = AD \cdot DE$

$BD^2 = Bz \cdot BA$

$\cancel{BD^2 = (R-z)R}$. $BD^2 = 2R(2R-2z)$

$\cancel{R^2 + Rz - \frac{17^2}{6} = 0}$. 17^2

$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$\cancel{R = \frac{z}{2} \pm \sqrt{8z^2}}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ +15 \\ \hline 255 \end{array}$$

$\dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$

$\frac{1}{2}: -\frac{32}{4} + \frac{36}{2} - 3$

$= -8+18-3 = 7$

$\dfrac{16x-20+4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$

$-\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 =$

$= -2+9-3 = 4.$

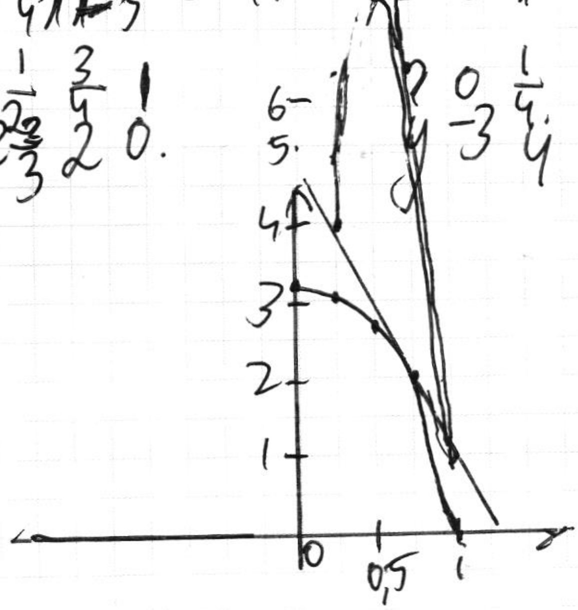
$4 + \dfrac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$

$\frac{3}{4}: -\frac{32 \cdot 9}{16} + \frac{36 \cdot 3}{4} - 3$

$= -18+27-3 = 6.$

$1 = 1.$

x	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	3,2	3	$2\frac{2}{3}$	2	0.



x	0	$\frac{1}{4}$
y	-3	4

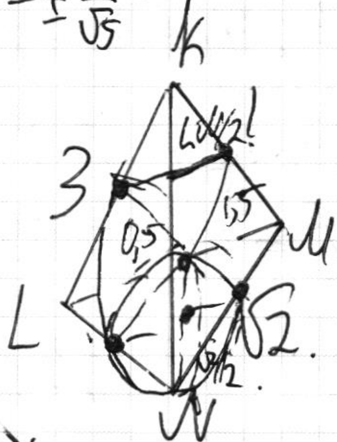
$\dfrac{36^9}{64_{16}} = \dfrac{9}{16}.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$.

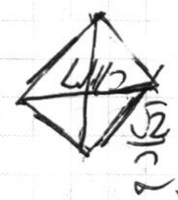


$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(4\alpha+4\beta)\cos(4\beta) = -\frac{2}{5}$.

$\cancel{2}4\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)\cos4\beta = -\frac{2}{5}$.

$4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)\cos4\beta = -\frac{2}{5}$.



$\cos(2\alpha+2\beta)\cos4\beta = \frac{\sqrt5}{10}$

$\cos4\beta = \frac{\sqrt5}{\cos(2\alpha+2\beta)\cdot 10}$

$\cos4\beta = \pm\frac{\sqrt5\cdot\sqrt5}{10\cdot 2}$ $\boxed{\cos4\beta = \pm\frac{1}{4}}$

$1-2\sin^2 2\beta = \pm\frac{1}{4}$.

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$.

$tg2\alpha$

$tg\alpha$ опр.

$\cos\alpha \neq 0$.

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$\left[\begin{array}{l} -2\sin^2 2\beta = -\frac{5}{4} \\ -2\sin^2 2\beta = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin^2 2\beta = \frac{5}{8} \\ \sin^2 2\beta = \frac{3}{8} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin2\beta = \pm\frac{\sqrt5}{2\sqrt2} \quad \cos2\beta = \pm\frac{\sqrt3}{2\sqrt2} \\ \sin2\beta = \pm\frac{\sqrt3}{2\sqrt2} \Rightarrow \cos2\beta = \pm\frac{\sqrt5}{2\sqrt2} \end{array}\right.$

а) $\pm\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\sin2\alpha \pm\frac{\sqrt5}{2\sqrt2}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$.

$\pm\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt2}\sin2\alpha \pm\frac{5}{2\sqrt2}\cos2\alpha = -1$.

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2tg\alpha\cos^2\alpha = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$.

$tg^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha(1-tg^2\alpha) = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$

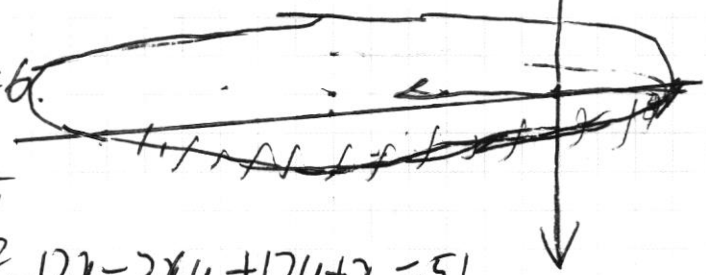
$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x\geq 12y \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

$a+a^{\log_3 4}-a^{\log_3 5}\geq 0.$

$a+a^{\log_3 4}=a^{\log_3 5}.$

$$\begin{cases} x^2-26xy+12y+x+144y^2=6 \\ x\geq 12y \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x^2-26xy+169y^2+11y^2-12x-36y+12y+x=51. \\ x\geq 12y \end{cases}$$

$3+3^4-3^5.$

$(x-13y)^2+x^2-11x+11y^2-24y=51.$

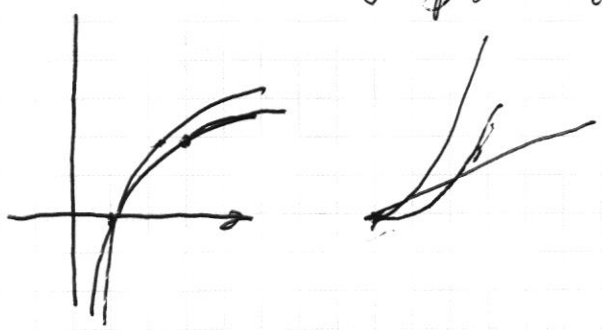
$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ $10x>x^2.$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}.$

$9\ \cancel{3}\ 5^2\geq 4^2+3^2$

$a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}.$

$a(1+a^{\log_3(4)-1})\geq 5^{\log_3 a}.$



$\log_5(a+a^{\log_3 4})\geq \log_3 a.$

$\log_5(a+a^{\log_3 4})\geq \frac{\log_5 a}{\log_5 3}.$

$a+a^{\log_3 4}\geq a.$ При $x>1$ $\log_5 x<\log_3 x,$ то есть:

$\log_5(a+a^{\log_3 4})-\frac{1}{\log_5 3}\log_5 a\geq 0.$ $f(b)=b+b^{\log_3 4}-b^{\log_3 5}.$

$b^{\log_3 5}=b+b^{\log_3 4}.$

$\log_5(a+a^{\log_3 4})-\log_5 a^{\frac{1}{\log_5 3}}\geq 0.$

f $(a+a^{\log_3 4}-a^{\frac{1}{\log_5 3}})\geq 0.$

$f'=1+\ln(\log_3 4)+\ln(\log_5 3)a=0.$

$a+a^{\log_3 4}-a^{\frac{1}{\log_5 3}}\geq 0$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)