МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}.\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases} \Leftrightarrow 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{4}{5}. \quad \Big|:2.$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}\end{cases} \Big|\cdot(-\sqrt5)\neq0$$

$$\begin{cases}\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}.\end{cases}$$

По основному триг. тождеству:

$$\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=1 \Rightarrow \sin^2 2\beta=1-\cos^2 2\beta=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}.$$

Тогда $\sin2\beta=+\frac{1}{\sqrt5}$ или $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$. Рассмотрим оба варианта:

(I) $\begin{cases}\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5};\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}.\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5};\quad \sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$

$$\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big|\cdot\sqrt5\neq0$$

$$2\cdot2\sin\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$$

$$\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha;$$

$2\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=0$; $\cos\alpha=0$ или $\cos\alpha+2\sin\alpha=0.$

$\cos\alpha=0$

$\operatorname{tg}\alpha$ не существует; $\varnothing$

$\cos\alpha+2\sin\alpha=0.$

Если $\cos\alpha=0$: $0+2\sin\alpha=0$; $\sin\alpha=0.$

Тогда $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$ – Противоречие.

Значит, $\cos\alpha\neq0$. Разделим обе части на $\cos\alpha$:

Тогда $1+2\operatorname{tg}\alpha=0$; $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}}$

(II) $\begin{cases}\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5};\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}.\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5};\quad \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}.\end{cases}$

$$\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5.$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0$; $2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0.$

$\sin\alpha=0$ или $2\cos\alpha+\sin\alpha=0.$

Тогда $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=0}$ ~~или~~ Если $\cos\alpha=0$: $\sin\alpha=0$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$ – Противоречие.

Тогда $\cos\alpha \ne 0$. Разделим обе части ур-ние на $\cos\alpha$: $2+\operatorname{tg}\alpha=0$.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=-2}$$

Итак, мы получили 3 возможных значение для $\operatorname{tg}\alpha$: $0; -2; -\frac{1}{2}$. По условию этих значений не меньше трёх. Значит, каждое из полученных может быть достигнуто.

Ответ: $0; -2; -\frac{1}{2}$.

Задача 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}; \quad x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}; \quad x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}.$$

$$; \quad x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+13;$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25.$$

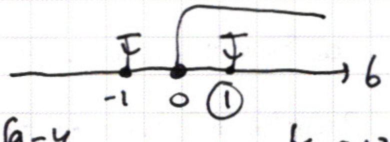
Получаем систему: $\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} x=a+2 \\ y=b+1. \end{cases}$ Система примет вид:

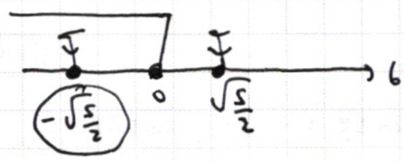
$$\begin{cases} a+2-2b-2=\sqrt{a\cdot b} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \iff \begin{cases} a-2b\ge 0 \\ ab\ge 0 \\ a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a\ge 2b \\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}; \quad D=25b^2-16b^2=9b^2. \text{ Тогда } a=\frac{5b\pm 3b}{2}=\left[\begin{array}{l} 4b \\ b. \end{array}\right.$$

I) $\begin{cases} a=4b \\ 4b\ge 2b \\ 16b^2+9b^2=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=4b \\ b\ge 0 \\ 25b^2=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=4b \\ b\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} x=a+2=6 \\ y=b+1=2 \end{cases}$; $\boxed{(6;2)}$.



II) $\begin{cases} a=b \\ b\ge 2b \\ b^2+9b^2=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=b \\ b\le 0 \\ b^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} a=b \\ b\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} b=+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \end{cases} \iff$



$\iff \begin{cases} a=b \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}; \quad \begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{5/2} \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x=a+2=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=b+1=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$; $\boxed{\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$.

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$$

Ограничение на log: $x^2+18x>0$. (*)

С учётом этого $|x^2+18x| = x^2+18x$. Получим:

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x) \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13}. \quad (1)$$

Докажем следующее св-во для положительных $a, b \neq 1$ и c:

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Прологарифмируем по основанию $b \neq 1$ обе части:

$\log_b(a^{\log_b c}) = \log_b(c^{\log_b a}) \Leftrightarrow \log_b c \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \log_b c.$

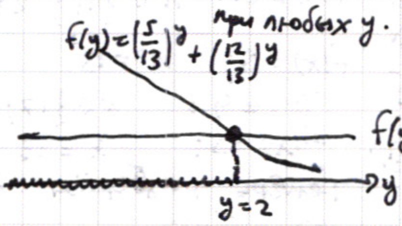
Последнее рав-во, очевидно, выполнено. Значит, для любых $a>0$, $\begin{cases} b>0 \\ b\neq 1\end{cases}$, $c>0$ выполнено тождество $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Применим его к нерав-ву (1), учитывая $(x^2+18x) = (x^2+18x)^{\log_{12}12}$.

Получим: $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$.

Пусть $\log_{12}(x^2+18x) = y$. Получим: $5^y+12^y \geqslant 13^y \quad \Big| : 13^y > 0$ при любых y.

$\left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geqslant 1.$

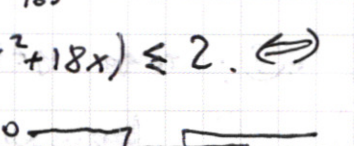


Функция в правой части постоянна, а функция в левой части монотонно убывает, поскольку основания степеней меньше 1. Тогда его решением является промежуток вида $y \in (-\infty; n]$, где при $y=n$ данное нерав-во обращается в рав-во.

Нетрудно убедиться, что $n=2$: $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}+\frac{144}{169} = \frac{169}{169} = 1.$

Итак, нерав-во (1) равносильно следующему: $\log_{12}(x^2+18x) \leqslant 2. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+18x \leqslant 144 \\ x^2+18x>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+18x-144 \leqslant 0 \\ x^2+18x>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-6)(x+24) \leqslant 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases}$



Получим (с учётом (*)) $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Задача 5.

Рассмотрим правило $f(ab) = f(a) + f(b)$ для $a=1$ и произвольного рационального $b>0$. Получим: $f(1\cdot b) = f(1) + f(b)$; $f(b) = f(1) + f(b)$;

Тогда $\boxed{f(1) = 0}$.

Теперь рассмотрим это правило для $a = x$ и $b = \frac{1}{x}$, где $x \in \mathbb{Q}$ и $x>0$.

Имеем: $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0$; т.е. $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$ для любых x из области определения f; $\boxed{\cancel{f(x) = (-f(\tfrac{1}{x}))}}$. $\boxed{f(\frac{1}{x}) = -f(x)}$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0; \quad f(x) < f(y).$$

Итак, требуется найти ~~все~~ кол-во пар $(x;y)$, $x,y \in \mathbb{N}$, $1 \le x \le 24$, $1 \le y \le 24$ таких, что $f(x) < f(y)$. Найдём $f(x)$ для любого $x \in \mathbb{N}$; $x \in [1;24]$:

$f(1)=0$; $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$; $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$; $f(4) = f(2)+f(2) = 0$; $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$; $f(6) = f(2)+f(3) = 0$;
$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$; $f(8) = f(2) + f(4) = 0$; $f(9) = f(3)+f(3) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$;
$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$; $f(12) = f(3) + f(4) = 0$. $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$; $f(14) = f(2)+f(7) = 1$; $f(15) = f(3)+f(5) = 1$;
$f(16) = f(2)+f(8) = 0$; $f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(18) = f(2)+f(9) = 0$; $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$;
$f(20) = f(2)+f(10) = 1$; $f(21) = f(7)+f(3) = 1$; $f(22) = f(2)+f(11) = 2$; $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$;
$f(24) = f(2) + f(12) = 0$.

Разобьём все числа 1, 2, .., 24 на 6 групп I – VI в зависимости от $f(x)$.

I $f(x)=0$: $x \in \{1;2;3;4;6;8;9;12;16;18;24\}$ – 11 чисел.

II $f(x)=1$: $x \in \{5;7;10;14;15;20;21\}$ – 7 чисел.

III $f(x)=2$: $x \in \{11;22\}$ – 2 числа.

IV $f(x)=3$; $x = 13$ – 1 число.

V $f(x)=4$: $x \in \{17;19\}$ – 2 числа

VI $f(x)=5$: $x=23$ – 1 число.

Теперь разберём все уд-условию $f(x)<f(y)$ варианты:

1) $x \in$ I; $y \notin$ I. Для x 11 вариантов; для y – 13. Всего $11\cdot 13 = 143$ пары.
2) $x \in$ II; $y \notin$ I и $y \notin$ II: Для x 7 вариантов, для y – 6. Всего $7\cdot 6 = 42$ пары.
3) $x \in$ III; $y \in$ IV или $y \in$ V ~~или~~ или $y \in$ VI: для x – 2 варианта; для y – 4 варианта. Всего $2\cdot 4 = 8$ пар.
4) $x \in$ IV; тогда $y \in$ V или $y \in$ VI: для x 1 вариант, для y – 3 варианта. Всего 3 пары.
5) $x \in$ V; тогда $y \in$ VI. для x: 2 вар-та; для y – 1 вариант. Всего 2 пары.
6) $x \in$ VI. Подходящих y нет. 0 пар.

Значит, всего будет $143+42+8+3+2 = 198$ пар.

Ответ: 198 пар.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

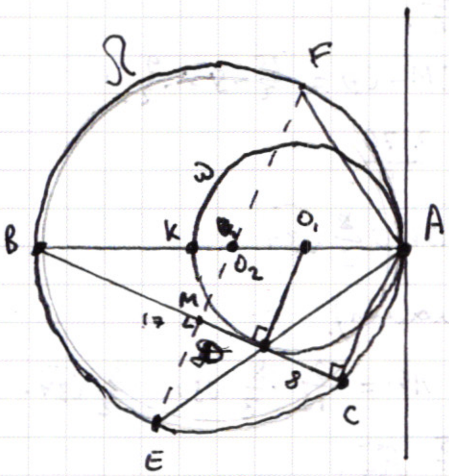
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Пусть O_1 — центр окружности ω ($O_1 \in AB$).

$O_1D \perp BC$ (как радиус к точке касания).

$\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр AB).

Пусть r — радиус ω; R — радиус Ω.

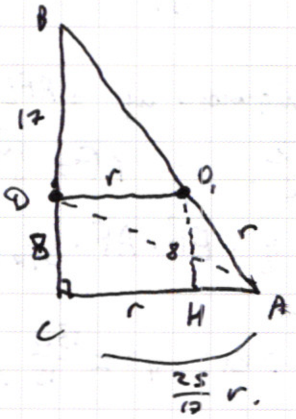
Отмечу, что $O_1D = O_1A = r$.

Рассмотрим $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$.

Они подобны (прямоугольные, общий острый угол $\angle B$).

Тогда $\frac{AC}{O_1D} = \frac{BC}{BD} = \frac{25}{17}$. $AC = \frac{25}{17}\cdot O_1D = \frac{25}{17}r$.

Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1H на AC ($H \in AC$).



O_1DCH — прямоугольник. Тогда $O_1H = CD = 8$;

$CH = O_1D = r$. Тогда $AH = AC - CH = \frac{25}{17}r - r = \frac{8}{17}r$.

По т. Пифагора для $\triangle AO_1H$: $O_1H^2 + AH^2 = O_1A^2$.

$64 + \frac{64}{289}r^2 = r^2$; $\frac{225}{289}r^2 = 64$

$r^2 = \frac{64\cdot 289}{225}$. Учитывая $r>0$, получим:

$\boxed{r = \frac{8\cdot 17}{15} = \frac{136}{15}}$ Тогда $AC = \frac{25}{17}r = \frac{25}{17}\cdot\frac{8\cdot 17}{15} = \frac{40}{3}$.

В $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$): $AB = 2R$; $AC = \frac{40}{3}$; $BC = 25$

По т. Пифагора: $625 + \frac{1600}{9} = 4R^2$. $4R^2 = \frac{7225}{9}$.

Учитывая $R>0$, получим: $\boxed{R = \sqrt{\frac{7225}{9\cdot 4}} = \frac{85}{3\cdot 2} = \frac{85}{6}}$.

Вернёмся к $\triangle ABC$. $AC = \frac{40}{3}$; $AB = 2R = \frac{85}{3}$;

Заметим, что $\frac{AB}{AC} = \frac{85/3}{40/3} = \frac{17}{8} = \frac{BD}{CD}$. По теореме, обратной теореме о биссектрисе получим, что <u>AE — биссектриса $\angle BAC$</u>.

Заметим, что тогда $\angle BAE = \angle CAE$. На хорды BE и EC окр. Ω опираются равные углы $\angle BAE = \angle CAE$. Тогда равны эти хорды: <u>$EB = EC$</u>.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда EF – сер. пер-ляр к ~~отр~~ хорде BC окружности Ω.

Тогда ~~$CD = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2}$~~ хорда EF делит перпендикулярную ей хорду BC пополам. Значит, EF – диаметр окр. Ω.

$EF = 2R = \frac{85}{3}$.

Центр O_2 окружности Ω лежит на пересечении двух диаметров AB и EF. $AB \cap EF = O_2$. $EO_2 = FO_2 = AO_2 = R = \frac{85}{6}$.

Пусть M – середина BC. $CM = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2}$. $MD = CM - CD = \frac{25}{2} - 8 = \frac{9}{2}$.

Из $\triangle ADC$ ($\angle ACD = 90°$): $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 64 + \frac{1600}{9} = \frac{576+1600}{9} = \frac{2176}{9}$.

$AD = \sqrt{\frac{2176}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{544} = \frac{4}{3}\sqrt{136} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$.

$\triangle ADC \sim \triangle EDM$ (прямоугольные, с равными острыми углами).

Из подобия: $\frac{ED}{AD} = \frac{MD}{CD} = \frac{9/2}{8} = \frac{9}{16}$; $ED = \frac{9}{16}AD = \frac{9}{16}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{34} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$.

$AE = ED + AD = \frac{3}{2}\sqrt{34} + \frac{8}{3}\sqrt{34} = \frac{9+16}{6}\sqrt{34} = \frac{25}{6}\sqrt{34}$.

Рассмотрим $\triangle AFE$ ($\angle FAE = 90°$): $\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{\frac{25}{6}\sqrt{34}}{85/3} = \frac{25\cdot 3}{85\cdot 6}\sqrt{34} =$

$= \frac{5}{34}\sqrt{34} = \frac{5}{\sqrt{34}}$. $\boxed{\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}}$.

По т. Пифагора из $\triangle AFE$: $AF^2 = EF^2 - AE^2 = \frac{7225}{9}^{1\cdot 4} - \frac{625}{36}\cdot 34 = \frac{7650}{36} = \frac{3825}{18} =$

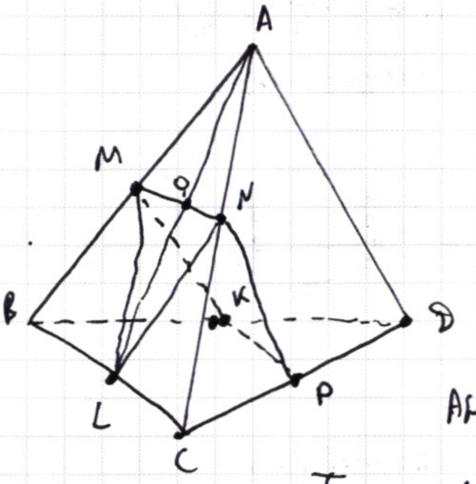
$= \frac{425}{2}$; $AF = \sqrt{\frac{425}{2}} = 5\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{34}$.

$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot EF\cdot AF\cdot\sin\angle AFE = \frac{1}{2}\cdot\frac{85}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{34}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{85\cdot 25}{3\cdot 2} = \frac{2125}{12}$.

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{AFE} = \frac{2125}{12}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.



Пусть M, N, K, P, L – середины рёбер AB, AC; BD; CD; BC соответственно.

Тогда точки A, M, N, K, P, L по условию лежат на одной сфере.

$MN = \frac{1}{2}BC$ и $MN \parallel BC$ (ср. линия в $\triangle ABC$)

Аналогично $KP \parallel BC$ и $KP = \frac{1}{2}BC$.

Тогда $MN \parallel KP$ и $MN = KP = \frac{1}{2}BC$.

Аналогично можно показать, что $MK \parallel$ ~~KP~~ NP и $MK = NP = \frac{AD}{2}$.

Тогда MNKP – ~~ромб~~ параллелограмм, все вершины которого лежат на одной сфере. Отмечу, что сечением описанной сферы плоскостью MNPK является окружность, поэтому все четыре вершины ~~ромба~~ парал-ма MNKP лежат на одной окружности. Это возможно только тогда, когда MN~~P~~K – прямоугольник.

~~Также отмечу, что 4 точки~~ Рассмотрим AMLN. Это параллелограмм, т.к. ~~MN∥BC~~ $LN \parallel AB$ и $ML \parallel AC$ как средние линии. Его четыре вершины также лежат на данной сфере по условию. Тогда AMLN – прямоугольник (т.к. A, M, L, N должны лежать на одной окружности – сечении сферы плоскостью). $\angle BAC = 90°$

Центр окружности, описанной около прямоугольника, лежит на пересечении его диагоналей. Пусть $AL \cap MN = O_1$; O – центр сферы.

Тогда $OO_1 \perp (ABC)$. Аналогично, если $NK \cap MP = O_2$, то $OO_2 \perp (MNK)$.

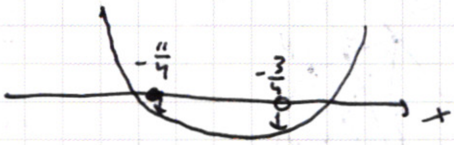
Задача 6.

Нерав-во $ax+b \le -8x^2-30x-17$ при всех $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$.

$$\underbrace{8x^2+(30+a)x+b+17}_{f(x)} \le 0 \quad \text{при} \quad x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$$

График $f(x)$ — парабола с ветвями ~~вверх~~. Для выполнения условия $f(x)\le 0$ при всех $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ необходимо и достаточно выполнение системы:

$$\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \le 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 8\cdot\frac{121}{16} + (30+a)\cdot(-\frac{11}{4}) + b+17 \le 0 & |\cdot 4 \\ 8\cdot\frac{9}{16} - \frac{3}{4}(30+a) + b+17 \le 0 & |\cdot 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 242 - 11(30+a) + 4b + 68 \le 0 \\ 18 - 3(30+a) + 4b + 68 \le 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 242 - 330 - 11a + 4b + 68 \le 0 \\ 18 - 90 - 3a + 4b + 68 \le 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4b - 11a \overset{-20}{\cancel{+80}} \le 0 \\ 4b - 3a - 4 \le 0 \end{cases} \quad (*)$$

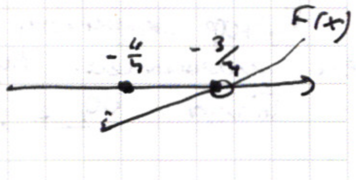
$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \quad |\cdot(4x+3) < 0 \quad \text{при} \quad x < -\frac{3}{4}.$$

Получим: $(ax+b)(4x+3) \le 12x+11$.

$$\overbrace{4ax^2 + (3a+4b-12)x + 3b-11}^{f(x)} \le 0 \quad - \text{при всех } x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}).$$

Рассмотрим несколько случаев:

I Если $a=0$: График левой части — прямая: Для выполнение $f(x)\le 0$ при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ необх. и достаточно выполнение системы: $\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \le 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} 0 + (4b-12)\cdot(-\frac{11}{4}) + 3b-11 \le 0 \\ 0 + (4b-12)\cdot(-\frac{3}{4}) + 3b-11 \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -11(b-3) + 3b-11 \le 0 \\ -3(b-3) + 3b-11 \le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -11b + 33 + 3b - 11 \le 0 \\ -3b + 9 + 3b - 11 \le 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b \ge \frac{22}{8} = \frac{11}{4}. \\ \cancel{b} - 2 \le 0 \end{cases}$$

~~При $\begin{cases} a=0 \\ b \ge \frac{11}{4} \end{cases}$ условие выполнено~~

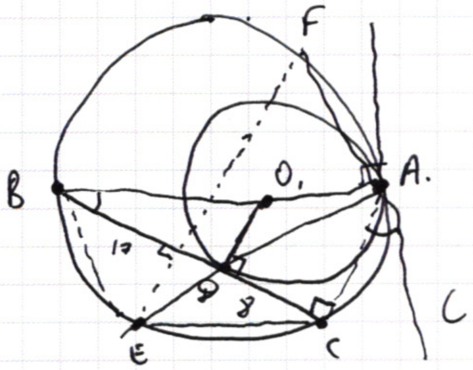
Проверим $(*)$ при $a=0$: $\begin{cases} 4b - 20 \le 0 \\ 4b - 4 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b \ge \frac{11}{4} \\ b \le 5 \\ b \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \in \varnothing \end{cases}$ усл. выполнена

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$625 \cdot 34$: 2500, 1875, 21250



$2176 : 64 = 34$: 192, 256, 256, 0.

S

$\frac{25}{17} \cdot \frac{8 \cdot 17}{85} = \frac{40}{3}$

$7225 \cdot 4 = 28900$; $28900 - 21250 = 7650$

$\frac{17}{25} = \frac{r}{x}$

$x = \frac{25}{17} r$

$17^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$.

$85 \cdot 25$: 425, 170, 2125

$289 - 64 = 225$

$$\begin{cases} 625 + \frac{625}{289} r^2 = 4R^2 \\ 289 = 2R \cdot (2R - 2r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 625 \cdot 289 + 625 r^2 = 289 \cdot 4R^2 \\ 289 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$425 \mid 25$

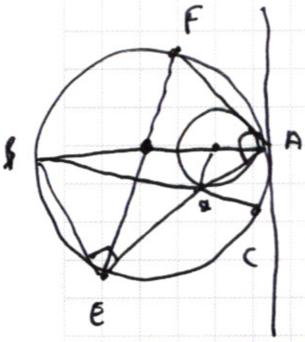
$r^2 = 64 + \frac{64 r^2}{289}$.

$289 - 64 = 225$

$\frac{225}{289} r^2 = 64$.

$r^2 = \frac{64 \cdot 289}{225}$, $\boxed{r = \frac{8 \cdot 17}{15}}$.

$17 \cdot 8 = 136$



$625 \cdot 9 = 5625$; $5625 + 1600 = 7225$

$625 \cdot 9 = 5625$; $5625 + 1600 = 7225$

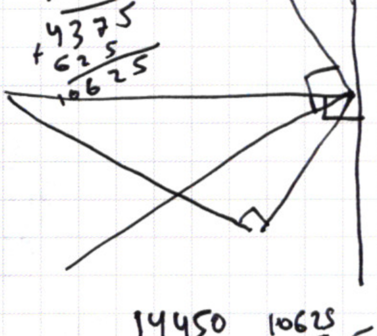
$85 \cdot 85$: 425, 680, 7225

$544 : 4 = 136$; $136 : 4 = 34$

$AC = \frac{40}{3}$.

$7225 \cdot 4 = 28900$

$625 \cdot 17$: 4375, 625, 10625



$AB = \frac{85}{3}$. $\frac{85}{40} = \frac{17}{8}$.

$\angle FAB = \alpha$.

$\angle EO_2C = 2\alpha$;

$\angle EAC = \alpha$.

$625 \cdot 34$: 2500, 1875, 21050

$28900 - 21050 = 7850$

$14450 - 625 = 3825$

$\frac{14450}{18} - \frac{10625}{18} =$

$= \frac{14450 - 10625}{18} = \frac{3825}{18}$

$3825 : 9 = 425$: 36, 22, 18, 45

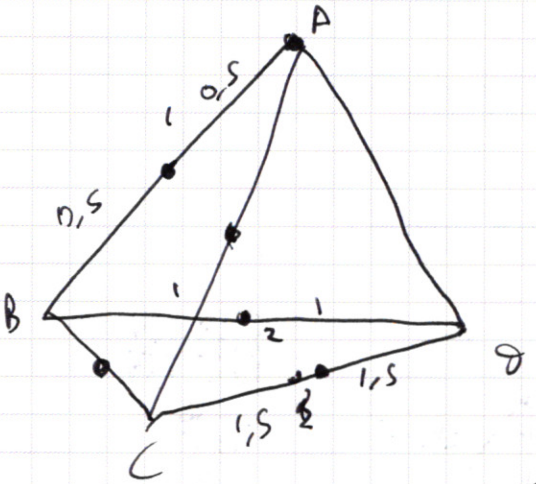
$64 \cdot 9 = 576$; $576 + 1600 = 2176$

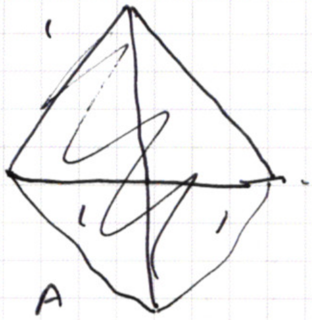
$2176 : 4 = 544$: 20, 17, 16, 16

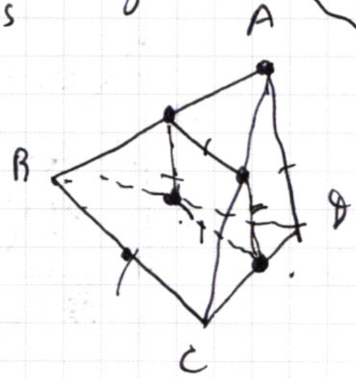
$2176 : 3$; $\cancel{2176}$, 07, 6, 16

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

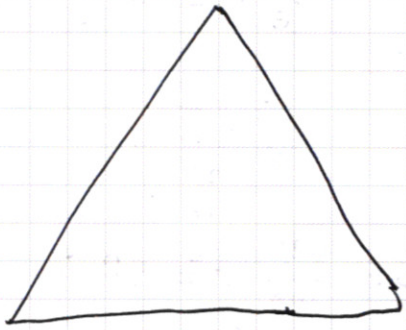
Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

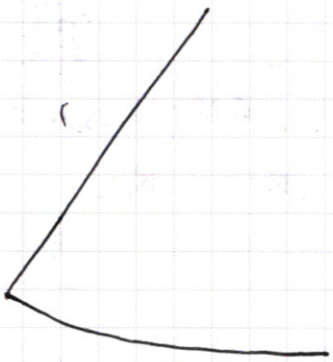




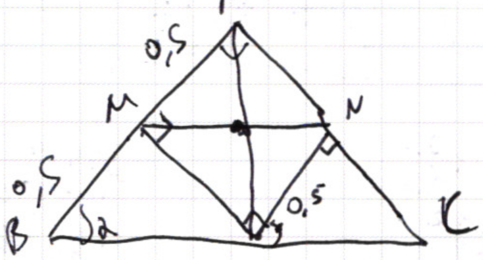


BC = AD.





B



KP =   LP = 1   LK = 1,5.

$$\begin{array}{r} 242 \\ +\ 68 \\ \hline 310 \\ -330 \\ \hline \cancel{80} \\ -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ +\ 18 \\ \hline 86 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$. $\quad f(1\cdot b) = f(1) + f(b) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$. $\quad f(2k) = f(2) + f(k) = f(k)$.

$f(3) = 0$. $\quad f(3k) = f(k)$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$. $\quad f(5n) = 1 + f(n)$;

$f(10) = f(2) + f(5) = 0 + 1 = 1$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$; $\quad f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$.

$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$.

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$ $\quad f(x) < -f(y)$.

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$. $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$; $f(8)=f(4)+f(2)=0$; $f(9)=f(3)+f(3)=0$; $f(10)=f(5)+f(2)=1$; $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$; $f(12)=f(3)+f(4)=0$; $f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$; $f(14)=f(2)+f(7)=1$. $f(15)=f(5)+f(3)=1$; $f(16)=0$; $f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$; $f(18)=f(2)+f(9)=0$; $f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$; $f(20)=f(2)+f(10)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$; $f(22)=2$; $f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$; $f(24)=0$.

$f(1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24)=0$. — 11 шт.
$f(5,7,10,14,15,20,21)=1$. — 7 шт.
$f(11,22)=2$ — 2 шт.
$f(13)=3$ — 1 шт.
$f(17;19)=4$ — 2 шт.
$f(23)=5$. — 1 шт.

$x \in I$ $\quad$ 11 · 13.
$y \in II - V$.
$x \in II$; $y \in III - V$. $\quad 7 \cdot 6$.
$x \in III$:

$f(1\cdot b) = f(b) + f(1)$ $\quad \underline{f(1)=0}$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; $\quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$. $\quad f(x) < f(y)$.

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$. $f'(x) = 2\cdot\left(-\frac{1}{(4x+3)^2}\right)\cdot 4 = -\frac{8}{(4x+3)^2}$.

$x \neq -\frac{3}{4}$. ↘.

$\frac{12x+11}{4x+3}$

↘.

$\frac{30}{-8} = -\frac{15}{4}$. $f'(x) = -16x - 30 \overset{?}{<} 0$.

$16x > -30;$ $x > -\frac{15}{8}$.

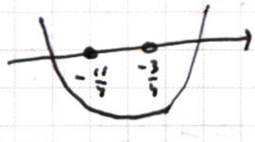
$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$. $|\cdot(4x+3) < 0$. $x \cdot \epsilon\left(-\frac{3}{4}\right)$

$12x+11 \geq (ax+b)(4x+3)$ для всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

$12x+11 \geq 4ax^2 + \cancel{(3a+4b)}\,(3a+4b)x + 3b$.

$4ax^2 + (3a+4b-12)x + 3b - 11 \le 0$. для всех $x \in \left(-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

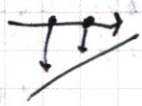
I $4a > 0$. Ветви вверх.



Необходимо и дост:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a\cdot\frac{121}{16} - \frac{11}{4}(3a+4b-12) + 3b - 11 \le 0 \\ \ldots \end{cases}$$

II $a = 0$. $(4b-12)x + 3b - 11 \le 0$ при всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.



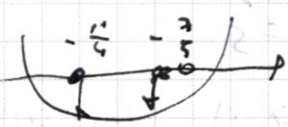
$$\begin{cases} a = 0 \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0 \end{cases}$$

III $a < 0$ Ветви вниз

I $-\frac{3a+4b-12}{8a}$ б ② ⊘

$ax+b \le -8x^2 - 30x - 17$.

$8x^2 + (30+a)x + b + 17 \le 0$



$$\begin{cases} \overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{121}{\cancel{16}_4} - \frac{11}{4}(30+a) + b + 17 \le 0 \\ \overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_4} - \frac{3}{4}(30+a) + b + 17 \le 0 \end{cases}$$

$242 - 330 - 11a + 4b +$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\overbrace{2\alpha+2\beta}^{x}) = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin(\underbrace{2\alpha+2\beta}_{x} + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin x \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos x + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt5}$; $|\cos x| = \sqrt{1-\frac15} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos x = +\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos x = -\frac{2}{\sqrt5}$.

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

$\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt5}$; $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$.

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha = -\frac12$.

$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac45 + \frac{1}{\sqrt5}$.

$$\begin{cases} 2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) + \sin 2\alpha = -\frac45 + \frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha = -\frac45 - \frac{1}{\sqrt5}. \end{cases}$$

$\cancel{2\left(\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) + \sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta\right) = \ldots}$

$2\,\cancel{\sin(2\alpha-4\beta)} =$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}}$.

$2\left(\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) - \sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta\right) = \frac{2}{\sqrt5}$.

$\cancel{2}\sin(\beta - 2\alpha - 3\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$.

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}}$.

$|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac45} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\sin(2\alpha+4\beta) + 2\sin 2\alpha = -\frac85}$.

$\cancel{2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1}$.

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta) + 2\sin(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta) = -\frac45 + \frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta) + 2\sin(2\alpha+\beta)\cos\beta = -\frac45 - \frac{1}{\sqrt5}}$.

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot 2 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$..

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\quad$ $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$

$tg\,\alpha = 0$. $\quad$ $tg\,\alpha = -2$.

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos 2\beta = -\frac45$.

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac25$.

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac25$

$8 \cdot 198 = 5 + 50 + 54 + 45 + 104 + 42 + 4 + 8 + 24 + 5 = 198$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x+18y=12 \end{cases} ; \quad x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25.$$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2.$$

$$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}.$$

$$x-2y=\sqrt{\underbrace{(x-2)}_{a}\underbrace{(y-1)}_{b}}. \quad \begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases} \quad \begin{cases} x=a+2 \\ y=b+1 \end{cases} \quad a+2-2b-2=\sqrt{ab}.$$

$$\begin{cases} x\geq 2y. \\ x^2-4xy+4y^2=(x-2)(y-1). \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}. \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\geq 2b. \\ a^2-4ab+4b^2=ab. \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} ; \quad \begin{cases} a\geq 2b \\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad D=25b^2-16b^2=9b^2.$$

$$a=\frac{5b\pm 3b}{2}=\left[\begin{matrix}4b \\ b.\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} a\geq 2b \\ a=4b \end{cases} \quad \begin{cases} a=b \\ b\geq 2b \\ b^2+9b^2=25. \end{cases} ; \quad \begin{cases} a=b \\ b\leq 0 \\ b^2=\frac{5}{2} \end{cases} ; \quad \boxed{b=-\sqrt{\frac{5}{2}}} \quad \boxed{a=-\sqrt{\frac{5}{2}}}.$$

$$\begin{cases} a=4b \\ 4b\geq 2b \\ 16b^2+9b^2=25 \end{cases} ; \quad b\geq 0 \quad b=1 ; \ a=4$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x>0$. из ОДЗ

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}. \qquad \log_{12}(x^2+18x)\leq 2.$$

$$5^{\log_{12}y}+y\geq y^{\log_{12}13} \qquad \begin{cases} x^2+18x\leq 144. \\ x^2+18x>0. \end{cases}$$

$$\cancel{y^{\log_{12}13}-y\leq 5^{\log_{12}y}.} \qquad a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

$$\cancel{y(y^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1)\leq 5^{\log_{12}y}}. \qquad \log_b a\log_b c=\log_b c\cdot\log_b a.$$

$$13^{\log_{12}y}$$

$$y^{\log_{12}5}+y\geq y^{\log_{12}13}. \qquad x^3-x^2\cdot x^3\geq 0$$

$$y^{\log_{12}5}+y^{\log_{12}12}-y^{\log_{12}13}\geq 0 \ ; \ y>0. \qquad \boxed{\log_{12}y\leq 2}.$$

$$5^n+12^n\geq 13^n. \quad |:13^n\geq 0$$

$$5^{\log_{12}y}+12^{\log_{12}y}\geq 13^{\log_{12}y}. \quad \left(\frac{5}{13}\right)^n+\left(\frac{12}{13}\right)^n\geq 1. \quad \boxed{n\leq 2}$$

$$n=2: \ \frac{25}{169}+\frac{144}{169}=1.$$

$$x^2+18x-144\leq 0 \quad -6 ; 24. ; \quad 24\cdot(-6)=-144.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)