МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin((2\alpha+2\beta)-2\beta)=-\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)-$

$-\cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta)=-\frac{4}{5}=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$. По условию,

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt5} \Leftrightarrow \underline{\cos(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha$~~ ~~sin~~

~~$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)$~~ $=$

$\sin(2\alpha+2\beta-\cancel{\cos 2\beta})=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta-\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)=$

$=\sin 2\alpha$; $\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right)=\pm\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{2}{5}\pm\frac{2}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=0\\ \sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cancel{\alpha=\frac{\pi}{2}}\ \alpha=\frac{\pi}{2}k\\ tg 2\alpha=-\frac{4}{3}\\ tg 2\alpha=\frac{4}{3}\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\ \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=-\frac{4}{3}\\ \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\ 6tg\alpha=4tg^2\alpha-4\\ 6tg\alpha=-4tg^2\alpha+4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\ 2tg^2\alpha-3tg\alpha-2=0\\ 2tg^2\alpha+3tg\alpha-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\ tg\alpha=2\\ tg\alpha=-\frac{1}{2}\\ tg\alpha=\frac{1}{2}\\ tg\alpha=-2\end{array}\right.$

Проверим, возможны ли такие значения $tg\alpha$:

~~1) $\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta=\pm\frac{2}{5}$~~

~~1) $\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin(2\alpha)=-\frac{4}{5}$~~

$-\frac{2}{\sqrt5} = \cos(2\alpha+2\beta) = \cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \sin(2\alpha)\sin(2\beta) =$

$= -\frac{2}{\sqrt5} = \frac{2}{\sqrt5}\cos(2\alpha) + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow -1 = \cos(2\alpha) + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{7}{5}$ -

такая ситуация невозможна.

2) $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$ $\Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5} = \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha - \frac{4\cdot 1}{5\sqrt5} \Leftrightarrow 1 = \cos 2\alpha - \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos 2\alpha$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$ $\Rightarrow \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta = \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt5} =$

$= \frac{2}{\sqrt5} \Leftrightarrow \cos 2\alpha + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$

2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$ $\Rightarrow \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta = \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} =$

$= -\frac{2}{\sqrt5} \Leftrightarrow \cos 2\alpha - \frac{2}{5} = -1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$

3) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$ $\Rightarrow \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2}{\sqrt5}\cos(2\alpha) \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 0$

$\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha) = 0$

Таким образом, все полученные значение тангенса $\operatorname{tg}\alpha$ возможны и существуют

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = 2 \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Сделаем замену $x-2=a$; $y-1=b$. Получаем:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \\ ab\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \\ ab\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \{10b^2=25;\ a=b \\ \{25b^2=25;\ a=4b \end{array}\right. \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \{b=\sqrt{\frac{5}{2}};\ a=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \{b=-\sqrt{\frac{5}{2}};\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \{b=1;\ a=4 \\ \{b=-1;\ a=-4 \end{array}\right. \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (6;2);\ \left(2-\sqrt{\tfrac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)}$$

$t^{\log_{12} 13} =$

$\cos$

$\sin(2\alpha) = \frac{2}{5} \pm \frac{2}{5}$

$t^{\log_{12} 13} \le t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12}$

$5+4+3 = 12$

$\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$13^2 =$

$t^{2\log_{12} 13} \le t^{2\log_{12} 5} + \cancel{2 t \log_{12} 5 \log_1} \; 2 \cdot t^{\log_{12} 5 + \log_{12} 12} +$

$\cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta$

$t^{\log_{12}(12^2+5^2)} \le t^{\log_{12} 5^2} + 2$

$6 tg\alpha = 4 - tg^2\alpha$

$t^{\frac{1}{2}\log_{12}(12^2+5^2)} \le t^{\frac{1}{2}\log_{12} 5^2} + t^{\frac{1}{2}\log_{12} 12^2}$

$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha$

41

$t^{\log_{12} 5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{t^{\frac{1}{2}\log_{12} 60}}$

$9+8 = 17$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha \end{cases}$

$\frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{4}{3}$

$\frac{2}{1-1} = \infty$

$\cos(2\alpha+2\beta)$

17

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta-2\beta) = -\frac{4}{5}$

$4 \cdot 4 = 16$

$9+8^2$

25

$\sin(x) + \sin(y)$

s

$\sin(w+x) + \sin(w-x) = \sin w \cos x + \sin x \cos w + \sin w \cos x - \sin$

$\frac{w+x}{2}$

$2 \sin w \cos x$

$\frac{3+5}{4}$

$\frac{3-5}{4}$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$2 \sin(2\alpha+2\beta) \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$+\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\alpha) - \frac{4}{5}\cos(2\beta)$

$\frac{3+5}{4}$ $\frac{3-5}{4}$

$9+16 = 25$

$\cos(2\alpha) = -\frac{3}{5}$

$\frac{-3+5}{4}$ $\frac{-3-5}{4}$

2 $-\frac{1}{2}$

$\cos(2\alpha)\cos(2\beta)$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) -$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\alpha)$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) + \quad f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(a^2) = 2f(a) \quad f(a^2) = 0$

$f(1) = 0$

$f(ab) = \left[\frac{a}{4}\right] = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$

$2f\left(\frac{1}{a}\right)^2 \quad f\left(\frac{1}{a}\right)^0$

$f(1) = 0 \quad f(1) \ne 2 \quad f(1)^2 = 2f(1)$

$f(x^2) = 2f(x)$

$f(2) = f(1) + f(2) \quad f(1) = 0$

$\cos(2\alpha)$

$\cos(2\alpha)$

$\cos(2\alpha)$

$\cos(2\alpha) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$

$2\cos(2\alpha) + \frac{4}{5} - 2 \quad 2\cos(2\alpha) - 4 = -2$

$\cos(2\alpha) + \frac{2}{5} = -\frac{1}{5}\cos(2\beta)$

$\cos(2\alpha)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x. \Leftrightarrow$

~~Во-первых, заметим, что ОДЗ является равна решению.~~

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

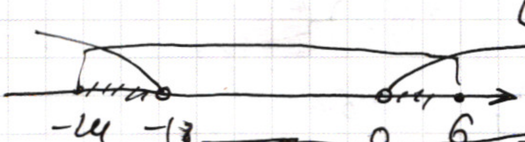
Сделаем замену: $x^2+18x = t$. Получаем:

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13} \Leftrightarrow 5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t} \geq 1$. В левой части неравенства убывающая функция, определенная при $t>0$. Справа стоит число, и, поскольку слева убывающая функция, то решение у уравнения $\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} + \frac{12}{13}^{\log_{12}t} = 1$ ~~только~~ одно (или отсутствует), а решением нер-ва является промежуток $(0; t_0]$, ~~(если~~ где t_0 — решение уравнения (в случае, если t_0 сущ.). В нашем случае t_0 существует и равен $t_0 = 12^2 = 144 \Rightarrow$ решением исходного неравенства является $t \in (0; 144]$.

Переходя от t к x^2+18x получаем, что

$0 < x^2+18x \leq 144 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+18)>0 \\ x^2+18x-144 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases} \Rightarrow$



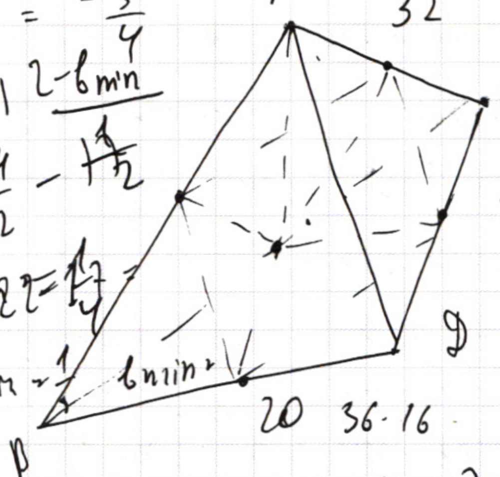
$\Leftrightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in [-24; -18) \cup (0; 6]}$

$f(1)=0$
$f(2)=0$ $f(11)=2$ $f(19)=4$ $f(\frac{1}{2})=0$
$f(3)=0$ $f(13)=3$ $f(23)=5$ $f(\frac{1}{4})=0$
$f(5)=1$ $f(17)=4$
$f(7)=1$
$f(x)+f(\frac{1}{y})$
$f(4)=0$
$f(\frac{1}{y})=$
$f(6)=0$
$f(\frac{1}{4})=2f(\frac{1}{2})$
$f(8)=0$
$f(\frac{1}{2})=$ $f(2^{-1})$ $f(\frac{1}{9})+f(3)=f(\frac{1}{3})$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(\frac{1}{4})+f(2)=f(\frac{1}{2})$ $2f(\frac{1}{3})+f(3)$
$f(12)=$
$2f(\frac{1}{2})+f(2)=f(\frac{1}{2})$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{8}{4}=-2$

$f(\frac{1}{x^2})+f(x)=f(\frac{1}{x})$ $-7+3-$ $q=$ 2-6min
$y>x$ $\frac{-8\cdot 225}{64}+\frac{15\cdot 15}{4}-$
$2f(\frac{1}{x})=f$
1 2 3 1
$f(\frac{1}{x})=-f(x)$ -17
$f(\frac{1}{x^2})+f(x)=f(\frac{1}{x})$ $f(\frac{1}{x})=-f(x)$ $\times\frac{17}{8}$ 136
$2f(\frac{1}{x})+f(x)=f(\frac{1}{x})$ $-\frac{225}{8}+\frac{225}{4}-17$ $\frac{1}{4}$
$f(x)=-f(\frac{1}{x})$ $(5+3)-2$
$\frac{30}{-16}$

$\frac{-40}{32}=-\frac{5}{4}$ $\frac{-16-24}{32}$ $-\frac{15}{8}=2\frac{1}{8}$
$\frac{225}{8}-$ $-1\frac{7}{8}$
$1\ \frac{2-6min}{4}$
$\frac{44}{2}-1\frac{1}{2}$ 24 $\frac{-6}{24}=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$
4-26min z = $\frac{17}{4}$
$\frac{-225}{136}$ $\frac{89}{8}=11\frac{3}{8}$
2-6min = 1 6min =
89 $-32+60-17$
20 36·16



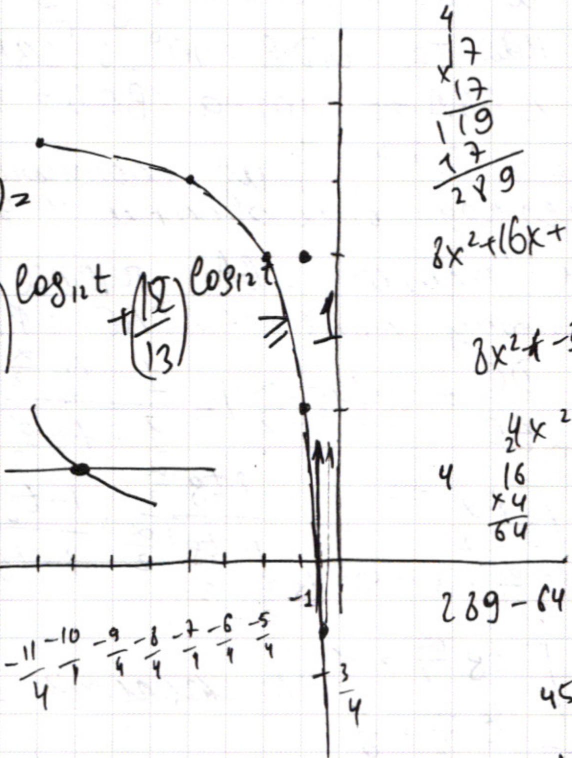
$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot 11}{4}-17$ $72+90-17$ $-8+30-17$ $-89+60$
$-\frac{121}{2}+\frac{15\cdot 11}{2}-17$ $-8\cdot 4$ 256+ 11

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2\alpha+2\beta)=$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t}$



$9ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11\equiv 0$

$8x^2+(10+a)x-17+b\leq 0$

$96\frac{16}{6}$

$9a^2+16b^2+144+24ab-72a-96b$

$\ln a\cdot a^{\log_{12}t}$

$4 \cdot 17=$ $\times 17$; $17\cdot17=119$... 289

$\frac{2}{4x+3}+3$

$8x^2+16x+8=50x$

$\frac{8}{25}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2x}{(1-x)(1+x)}$

$\frac{2}{5}=0{,}4$

$8x^2-34x+8\leq0$

$4x^2-17x+4\leq0$

$16\cdot 4=64$

$\frac{8}{AC}=\frac{1-tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-x}{1+x}$

$\frac{AC}{25}=\frac{2x}{1-x^2}$

$289-64=225$

$15\cdot15=225$

$45-\frac{\alpha}{2}$

$\frac{8}{AC}=tg\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$

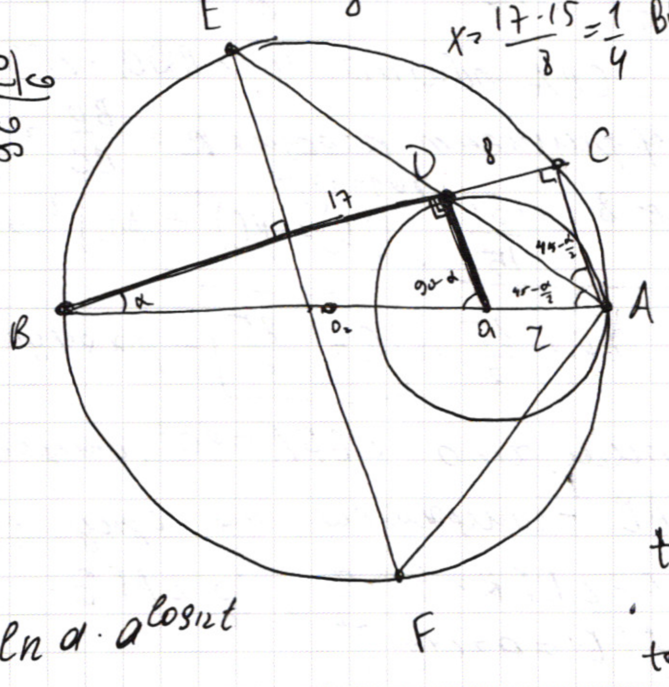
$tg\alpha=\frac{AC}{25}$

$x=\frac{17+15}{8}=4$

$x=\frac{17-15}{8}=\frac{1}{4}$

BO_1+r

$(a^{\log_{12}t})'$



$\frac{2R-r}{17}=\frac{2R}{25}$

$a^x=\ln a\cdot a^x$

$50R-25r=34R$

$16R=25r$

$(\log_{12}t)'$

$\boxed{r=\frac{16}{25}R}$

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$

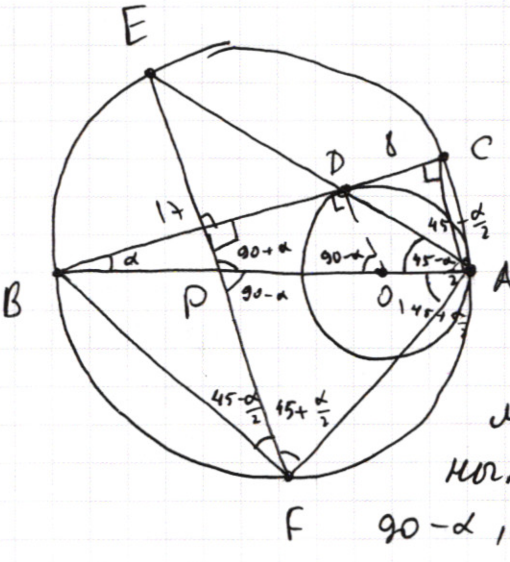
$tg\alpha=\frac{\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}=\frac{AC}{25}$

$\frac{40}{3}=AC$

$\frac{r}{AC}=\frac{17}{25}$

$r=\frac{17}{25}\cdot\frac{40}{3}$ $\frac{136}{15}$

№4



Т.к. AB – диаметр, то $\angle BCA = 90°$.

Пусть O_1 – центр окружности ω, тогда, поскольку BC – касательная, то $O_1DB = 90°$. Обозначим $\angle CBA = \alpha$, тогда $\angle BO_1D = 90-\alpha$ и $\angle O_1AD = 45-\frac{\alpha}{2}$ из соотношения между вписанным и центральным углами. $\angle BAC$ тоже равен $90-\alpha$, поэтому ~~$\angle BAC =$~~ $\angle DAC = \angle BAC - \angle O_1AD = 45 - \frac{\alpha}{2}$. Заметим, что: $\frac{DC}{AC} = tg(45-\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{8}{AC}$

и $tg\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{25} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{8}{25} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1-tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{(1+tg\frac{\alpha}{2})^2} \Leftrightarrow 8tg^2\frac{\alpha}{2} + 16tg\frac{\alpha}{2} + 8 = 50tg\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 4tg^2\frac{\alpha}{2} - 17tg\frac{\alpha}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\frac{\alpha}{2} = 4 \\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$. Поскольку $\alpha < 90°$, то

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15} = \frac{AC}{25} \Rightarrow AC = \frac{40}{3}$

В $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$ $\angle CBA$ – общий и $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$. Коэффициент подобия $k = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1D}{AC} =$

$= \frac{17}{25} \Rightarrow \underbrace{O_1D = r_\omega = \frac{17}{\cancel{255}} \cdot \frac{\cancel{40}\ 8}{3} = \frac{136}{15}}$, радиус ω. $(2R)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 =$

$= 625 + \frac{1600}{9} = \left(\frac{85}{3}\right)^2 \Rightarrow 2R = \frac{85}{3} \Rightarrow \boxed{R = \frac{85}{6}}$ – радиус Ω

Теперь заметим, что $\angle BFA = 90°$ (опирается на диаметр), а $\angle EFB = \angle EAB$ – опираются на одну дугу, поэтому $\angle AFE = \angle BFA - \angle BFB = 45 + \frac{\alpha}{2}$; $tg \angle AFE =$

$= \frac{1+tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \underbrace{\angle AFE = arctg\frac{5}{3}}$

Т.к. $O_1D \perp BC$ и $EF \perp BC$, то $O_1D \parallel EF \Rightarrow \angle APF =$

$= \angle PO_1D$ $(P = EF \cap AB) = 90-\alpha \Rightarrow BAF = 180 - \angle APF - \angle AFE =$

$= 45 - \frac{\alpha}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Значит, $\angle EAF = \angle BAD + \angle BAF = 45 - \frac{\alpha}{2} + 45 + \frac{\alpha}{2} = 90^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow EF$ – диаметр ($\angle EAF$ опир. на $\cup EF$); Как было выяснено ранее $EF = 2R = \frac{85}{3}$; $S_{AEF} = \frac{EF \cdot AF}{2} \cdot \sin(45 + \frac{\alpha}{2}) =$
$= \frac{EF \cdot EF\cos(45+\frac{\alpha}{2})}{2} \sin(45+\frac{\alpha}{2}) = \frac{EF^2}{4} \sin(90+\alpha) = \frac{EF^2}{4}\cos\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{8}{15} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{85^{25}}{36_{12}} \cdot \frac{15^5}{17} = \frac{2125}{12}$

$\boxed{\text{Ответ: } r_\omega = \frac{136}{15},\ R_\Omega = \frac{85}{6};\ \angle AFE = arctg\frac{5}{3};\ S_{AEF} = \frac{2125}{12}}$

$\frac{3}{4}$ 0 $f(\frac{3}{4}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$

$f(3)=0$ $-18x$

$2\cdot t^{\frac{1}{2}\log_{12} 60} \geq t^{\log_{12} 13}$

$f(3)=0$ $f(7)=1$ $f(11)=2$

$f(5)=1$ $f(9)=2$

$5^{\log_{12} t} + \cancel{t} \geq t^{\log_{12} 13}$

$f(5)=t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} + t \geq 0$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq 2\sqrt{t^{\log_{12} 60}}$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12}(5^2+12^2)^{\frac{1}{2}}}$

$x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$2\cdot t^{\frac{1}{2}\log_{12} 60}$

$x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$t^{\log_{12} 12} + t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13}$

$(x-2)-2y \neq 2$

$t + t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13}$ x^2-18x+

$(x-2)-2(y-1) = \sqrt{x-2}$

$x^2-4x+11$

$x^2-4x+4+$

$2=\log$

$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$a^2-4ab+4b^2 = ab$

$x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2 \geq \cancel{(x-2)}\, 6(x-2)(y-1)$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$6(x-2)(y-1) \leq 25$

$25-16=9$

$\sqrt{(x-2)(y-1)} \leq \frac{5}{\sqrt{6}}$

$\frac{5+3}{2}$ $\frac{5-3}{2}$

4 1

$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$ $a=2b$

$(a-4b)(a-b)=0$

$9a^2+16b^2+144+2(12ab-36a-48b)$

$16b^2+9b^2=25 \Rightarrow b=\pm 1$

$f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(5)=1$

$16b^2=25$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$12x+11 \geq 4ax^2+3ax+4bx+3b$

$4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11 \leq 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18$

$5^{\log_{12} 13}$ $\cancel{60}$ 120

$t^{\log_{12} 12} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

$12^2+5^2=160$

$g(x)+f(x)$

$5^{\log_{12} t}$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

$x^2+18x>0$

$t^{f(x)} + t^{g(x)}$

$f(11) \neq 0$ $t^{\log_{12}}$

f'

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

черновик чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

Найдем значение $f(x)$ при натуральных $x \leq$ ≤ 24. ~~Если x-просто~~ Для простых чисел:

$f(p)=[\frac{p}{4}] \Rightarrow f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$. Отсюда находим остальные значения:

$f(1)=0$; $f(4)=0$; $f(6)=0$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(12)=0$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(18)=0$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(24)=0$

~~Запишем в~~

Теперь обратим внимание на то, что:

$f(\frac{1}{y})=f(y)+f(\frac{1}{y^2})$. $f(\frac{1}{y^2})=f(\frac{1}{y})+f(\frac{1}{y})=2f(\frac{1}{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{y})=-f(y)$

Значит, чтобы $f(x/y)<0$, нужно, чтобы $f(x)+f(\frac{1}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(y)>f(x)$.

Для простоты подсчетов нарисуем таблицу, в которой значения функции расставлены по возрастанию

x	f(x)
1	0
2	0
3	0
4	0
6	0
8	0
9	0
12	0
16	0
18	0
24	0

x	f(x)
5	1
7	1
10	1
14	1
15	1
20	1
21	1
11	2
22	2

x	f(x)
13	3
17	4
19	4
23	5

№5

Если $f(x)=0$ (11 значений), то подходящих y всего 13, то есть возможно $11\cdot13$ пар

Если $f(x)=1$ (7 значений), то подходящих y всего 6, то есть всего пар $7\cdot6$

Если $f(x)=2$ (2 значения), то подходящих y всего 4, то есть возможно $2\cdot4$ пар

Если $f(x)=3$ (1 значение), то подходящих y всего 3, то есть возможно 3 пары

Если $f(x)=4$ (2 значения), то подходящих y всего 1, то есть возможно 2 пары

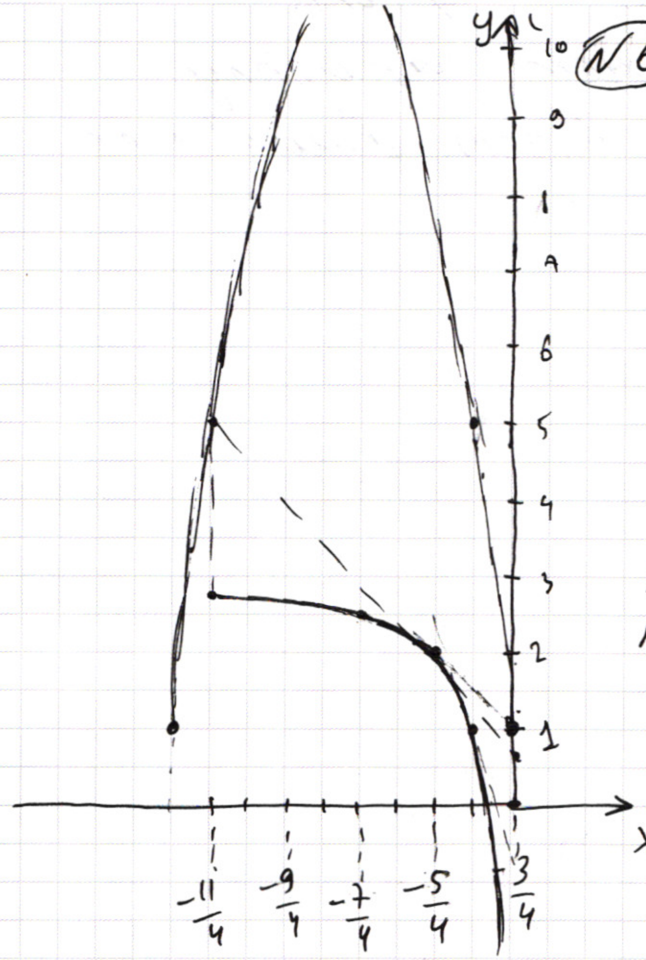
При $f(x)=5$ подходящих y нет.

Таким образом, ~~удо~~ кол-во удовлетворяющих условию пар равно $13\cdot11+7\cdot6+2\cdot4+3+2=$
$143+42+8+3+2=198$

$\boxed{\text{Ответ: } 198}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

По приведенному рисунку видно, что $b \le 1$

Нижняя граница b определяется касательной к гиперболе, которая проходит точку $(-\frac{11}{4}; 5)$

$$\left(3+\frac{2}{4x+3}\right)' = \frac{-2\cdot 4}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2}$$

$$\frac{5-3-\frac{2}{4x+3}}{x+\frac{11}{4}} = -\frac{8}{(4x+3)^2} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{4x+3}}{4x+11} = \frac{1}{(4x+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+2}{4x+11} = \frac{1}{4x+3} \Leftrightarrow 4x+11 = 16x^2+12x+8x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2+16x-5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4} \Rightarrow b_{min} = \frac{2-b_{min}}{1} =$$

$= \frac{1}{(-5+3)^2} = \frac{8}{4} \Rightarrow 2-b_{min} = b_{min} = 1$ $a=\left(\frac{-8}{(-5+3)^2}\right)$ — сущ. единственное значение $b=1$, при этом $a=-2$. При др. значениях b и a ~~прямая будет пересекать~~ неравенство не будет выполняться,

№6

поскольку если b будет меньше единицы, то даже в самом лучшем случае, когда прямая касается гиперболы, она в итоге пересечет параболу в точке $x_0 < -\frac{11}{4}$ и будет „выше" нее на отрезке $\left[x_0; -\frac{11}{4}\right]$

$\boxed{\text{Ответ: } (\underset{a}{-2}; \underset{b}{1})}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\underset{x}{2\alpha+2\beta})=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(x)\cos2\beta+\cos(x)\sin2\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x)\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+t\geq|t|^{\log_{12}13}$

$x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)=25$

$t>0$

$(x-2)^2+\cancel{81}\ 9(y^2-1)^2=25$

$c^{a^{\log_c b}}=c^{b^{\log_c a}}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$a^{\log_c b}\geq b^{\log_c a}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\log_c b\ \log_c a=$

$\frac{12x+13}{4x+13}$

$(x-2)(y-1)=(x-2y)^2$ $\boxed{x\geq2y}$

$3+\frac{2}{4x+13}$

$(x-2+3y-3)^2=25+(x-2y)^2$

$5^{\log_{12}t}+t\geq13^{\log_{12}t}$

$0\quad\frac{2}{3}\quad-\frac{3}{4}$

$\cancel{x^2}(x+3y-5)^2=$ $\frac{11}{3}$

$3+\frac{2}{4x+3}$ $t\geq13^{\log_{12}t}-5^{\log_{12}t}$

$(x-3y+1)^2=(5-x+2y)(5+x-2y)$ $-\frac{3}{4}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$3+\frac{1}{2x+\frac{3}{2}}$ $t^{\log_{12}5}$ $4x+13>0$ $x>-\frac{3}{4}$

$t\geq$

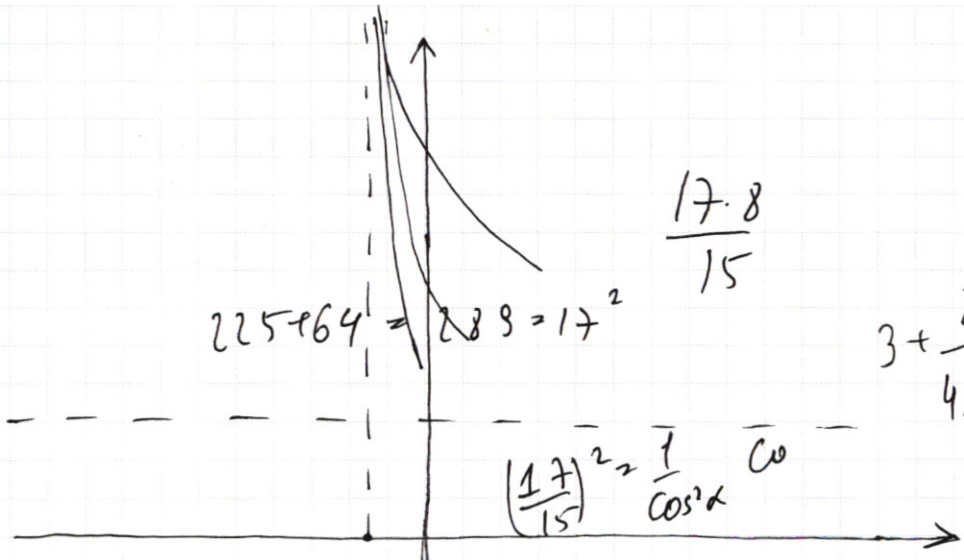
$\begin{cases}\sin(x+y)=a \\ \sin(x+2y)+\sin x=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\cos^2(2\alpha+2\beta)-1$

$\sin(2\alpha+4\beta)$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)-1$



$\frac{17\cdot 8}{15}$

$225+64=289=17^2$

$\times\frac{17}{8}$ 136

$17\cdot 50$

$\frac{50+36}{85}$

$3+\frac{2}{4x+3}$ $tg\alpha=\frac{7}{17}=\frac{6}{15}$

$\left(\frac{17}{15}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ co

$\frac{2}{-7+3}$ $2=\frac{17\cdot 6}{15}$

$3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$-\frac{9}{16}$ 8

$1+\frac{64}{225}$

$25\cdot 8$ $-\frac{9}{2}-\frac{30\cdot -3}{4}$

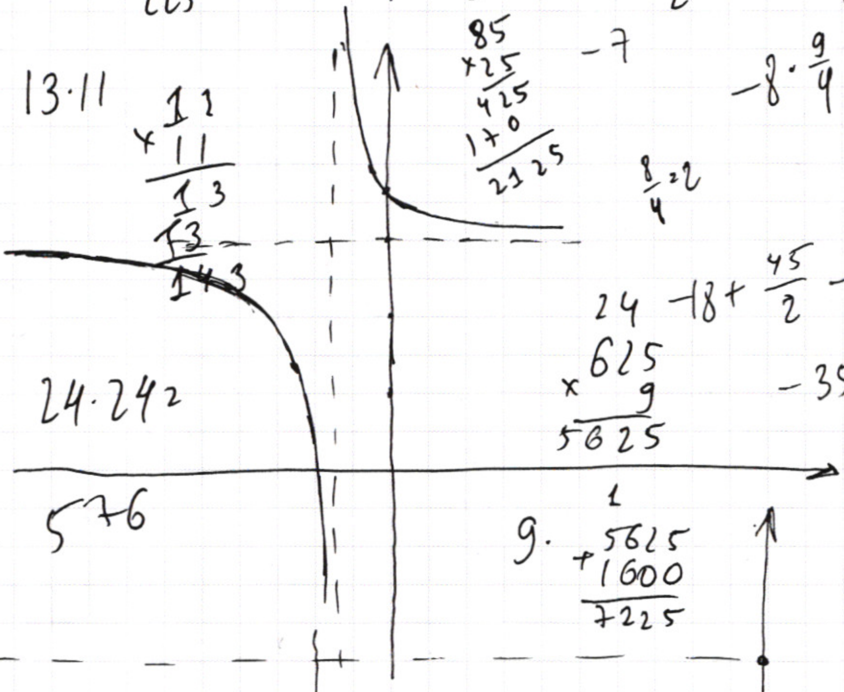
$\times\frac{85}{25}$ 425 170 2125 -7

$-8\cdot\frac{9}{4}+\frac{30\cdot 3}{4}-17-1=2$

$13\cdot 11$

$\times\frac{11}{11}$ 11 11 121

$\frac{8}{4}=2$ $\frac{2}{-11+3}=$ $3-\frac{1}{4}$



$24\cdot 24=$ 576

24 $-18+\frac{45}{2}-17$ -3 $-\frac{4}{4}$ -1

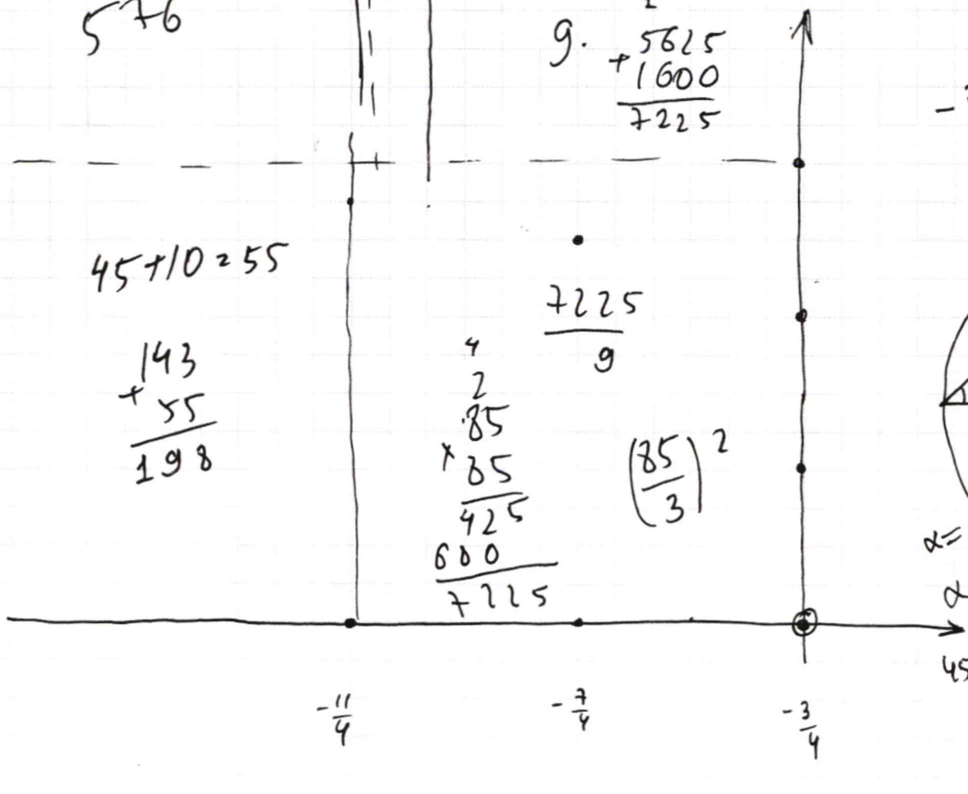
$\times\frac{625}{9}$ 5625

$-35+\frac{45}{2}$

$\frac{-70+45}{2}=-\frac{25}{2}$

$9\cdot$ $+\frac{5625}{1600}$ 7225

$-8+30-17$



$45+10=55$

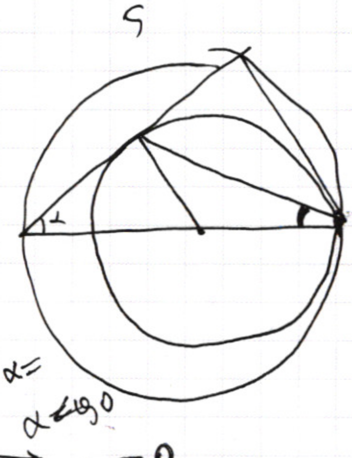
$+\frac{143}{55}$ 198

$\frac{7225}{9}$

$\times\frac{85}{85}$ 425 680 7225

$\left(\frac{85}{3}\right)^2$

$-\frac{11}{4}$ $-\frac{7}{4}$ $-\frac{3}{4}$



$\alpha=$

$\alpha<90$

$45-\frac{\alpha}{2}$ 70

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)