МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\cancel{2\alpha = x}$

$\sin(x+y) = \cancel{-\frac{1}{...}}$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cancel{\sin}\quad -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \qquad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\alpha+2\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$2\alpha+2\beta = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\pi n$

$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625 \end{array}$

1) $2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

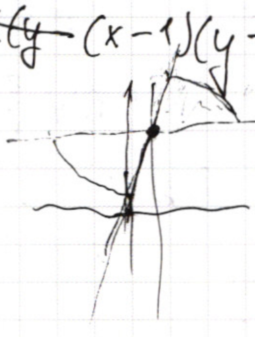
2) ~~наверное~~ $\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\pi}{2}$

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{\cancel{x(y}\,(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-18x\overset{+9}{}+y^2-12y\overset{+36}{} = 45 \end{cases}$$

$9(x-1)^2+(y-6)^2 = 90$

$y \geq 6x \qquad \frac{(x-1)^2}{10}+\frac{(y-6)^2}{90} = 1$



$\frac{13^2\cdot 5^3}{2^3\cdot 13} = \frac{13\cdot 125}{8}$

$y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$

$y^2 \cancel{-13xy} -(13x-1)y+36x^2+6x-6 = 0$

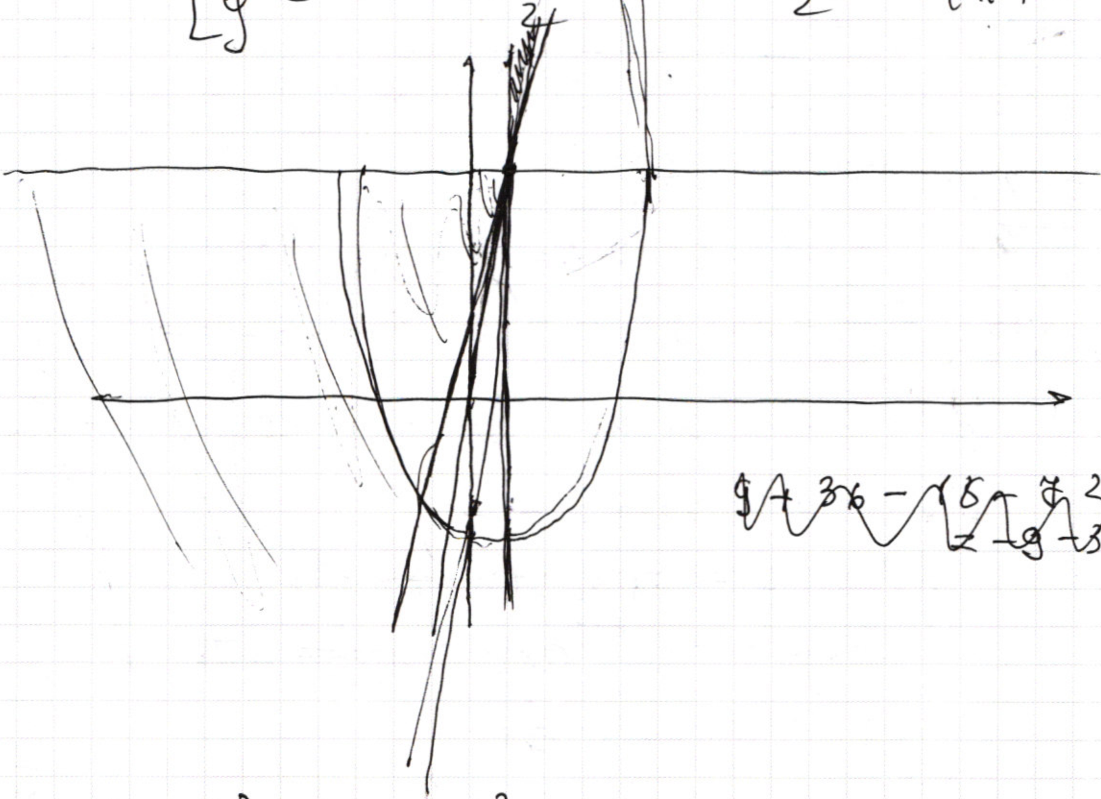
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$D = 169x^2 - 26x + 1 - 144x^2 - 24x + 24 =$

$= 25x^2 - 50x + 25 = 25(x-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = \frac{18x-6}{2} = 9x - 3 \\ y = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = \frac{8x+4}{2} = 4x + 2 \end{array}\right.$$



$9 + 36 - 18 - 7^2 =$

$= -9 + 36$

$9(x-1)^2 + (9x-9)^2 = 90$

$(x-1)^2 + (3x-3)^2 = 10$

$\cancel{10(x-1)^2 = 10}$

$(x-1)^2 = 1$

$x = 2$ $\quad$ $x = 0$ ~~не под~~

$y = 15$ $\quad$ $y = -3$ – не подх.

$x = 1 \quad y = 6$

$9(x-1)^2 + 16(x-1)^2 = 90$

$25(x-1)^2 = 90$

$(x-1)^2 = \frac{18}{5}$

$x = 1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$y = 6 \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$6 + 12\sqrt{\frac{2}{5}} \geq 6 + 18\sqrt{\frac{2}{5}}$ – неверно

$\varnothing$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

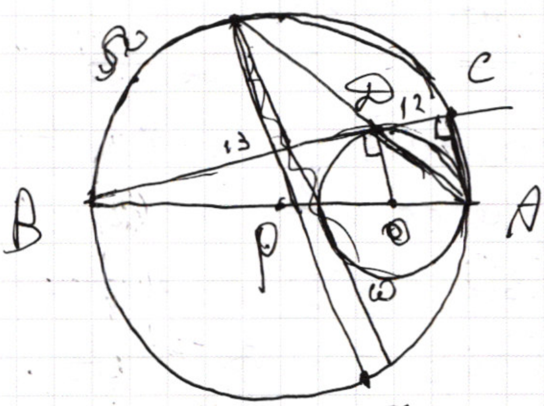
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



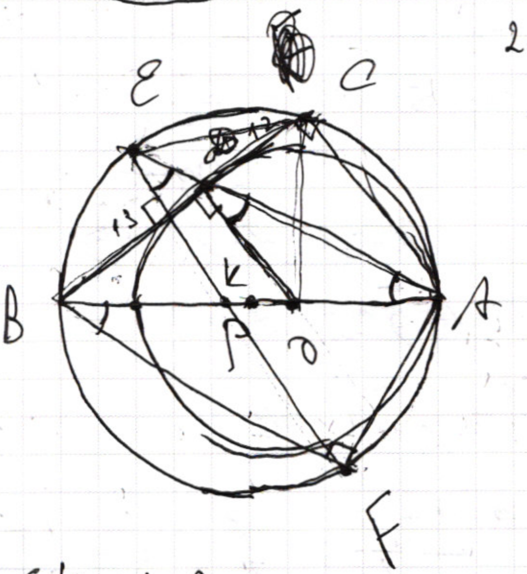
~~AE~~ $AC \parallel OD$

$AD \cdot DE = CD \cdot BD = 12 \cdot 13$

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$ $\frac{r}{R} = \frac{24}{25}$

$\frac{2R}{25} = \frac{2R-r}{13}$ $\frac{2r}{R} = \frac{48}{25}$

$25r = 12 \cdot 2R$



$EF \parallel AC \parallel OD$

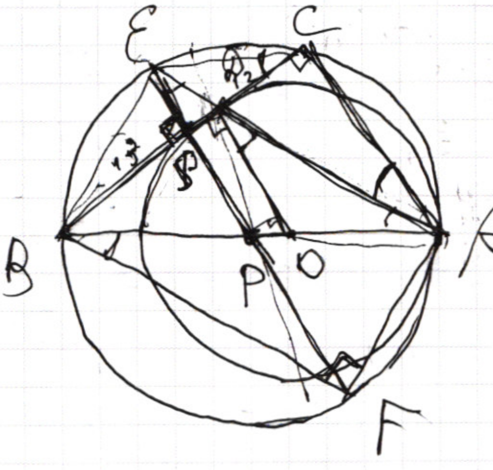
$\frac{ED}{BD} = CD$

$13^2 = 2(R-r) \cdot 2R = \frac{65}{2} = 4R \cdot \frac{1}{25} R = \frac{4}{25} R^2$

$R = \frac{5 \cdot 13}{2}$ $r = $ ~~...~~

$EK = KA$

$EA \parallel BF \Rightarrow EF$ - диам



~~$\frac{EA}{EC} = \sin\alpha = ED$~~

$AC = 60$

$\sin(90 - 2\alpha) = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$

$\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$

$2\cos^2\alpha = \frac{25}{26}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\frac{\cancel{65}^{13} \cdot \cancel{24}^{12}}{2 \cdot \cancel{25}_{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \overbrace{2\sin(2\alpha+2\beta)}^{-\frac{2}{\sqrt{17}}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

$\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\underset{\operatorname{arctg} 4}{\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}} - \underset{\operatorname{arctg}\frac{1}{4}}{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}})$

α

$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}})$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{17} + \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\alpha = \arcsin\frac{15}{17}$

~~$\alpha = \arcsin$~~

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \pm\operatorname{tg}(\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg}\frac{1}{4})) =$

$\operatorname{tg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4-\frac{1}{4}}{1+\frac{4}{4}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} = 3 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$D/4 = \sqrt{10}$

1) $2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2}(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) \end{array}\right.$

2) $2\alpha+2\beta = \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} = \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

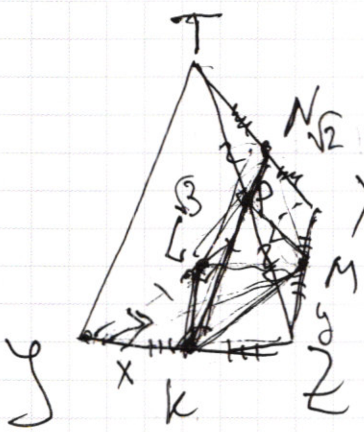
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

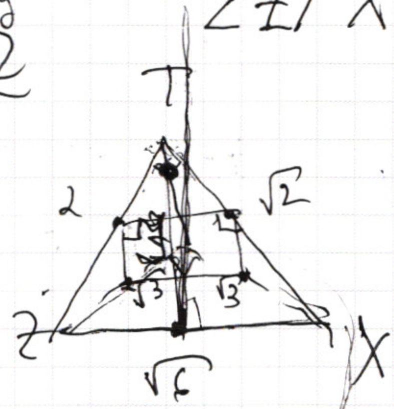


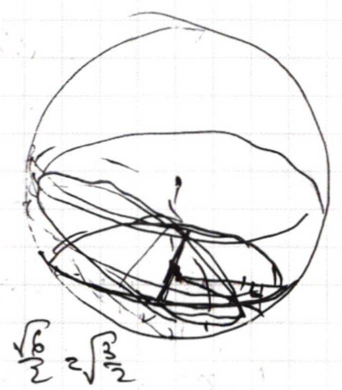
∃ LM и JZ ⇒ LM ∥ JK

JLMK – впис ~~ромб~~ паралл. ⇒

⇒ JLMK – прямоуг.

$\angle ZTX = 90^\circ$





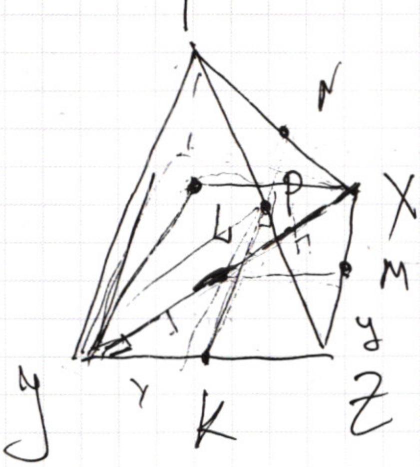
$\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

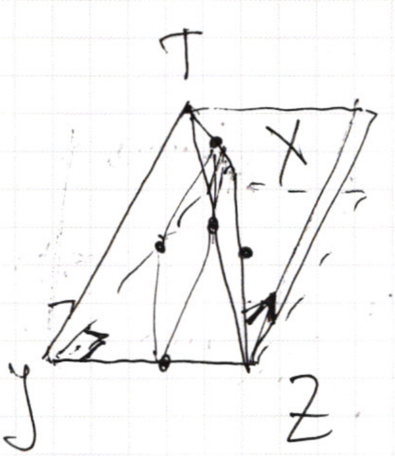
$x^2 + \frac{3}{4} = y^2$

$f(1) = 0$

$f(p_1 p_2) = f(p_1) + f(p_2) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_2}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$





☑ черновик ☐ чистовик

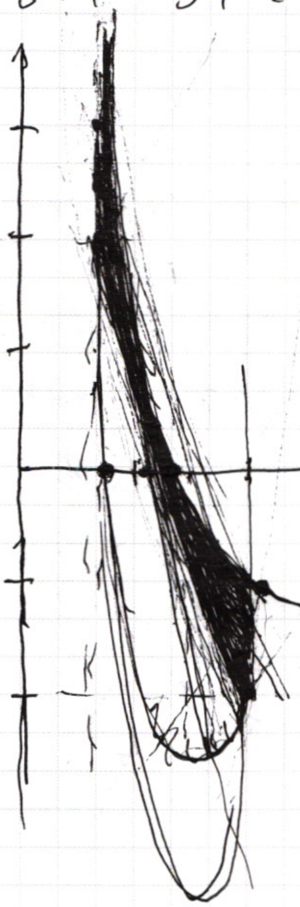
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$ $\quad \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = 72 - 102 + 28 = -2$



$y = ax + b$

$\frac{2}{3}a + b \geq 2 \quad y\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$

$-2 \leq 2a + b \leq -1 \quad -2 \leq y(2) \leq -1$

$b \geq 2 - \frac{2}{3}a \quad < -\frac{b}{a} < \frac{4}{3}$

$b \leq -1 - 2a$

$b > -\frac{4}{3}a$

$-1-2a \geq b \geq 2 - \frac{2}{3}a$

$-\frac{2}{3}a \geq 1 \quad b > \frac{2}{...}$

$a \leq -\frac{3}{2}$

$-\frac{4}{3}a \geq 3$

$-1-2a \geq b \geq -2-2a$

$b \geq 2 - \frac{2}{3}a$

$a \leq -\frac{9}{4}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2} = a}$

$8 - 6x = (ax+b)(3x-2)$ $\quad$ 1 или 0 реш.

$3ax^2 + (3b-2a)x - 2b = -6x + 8$

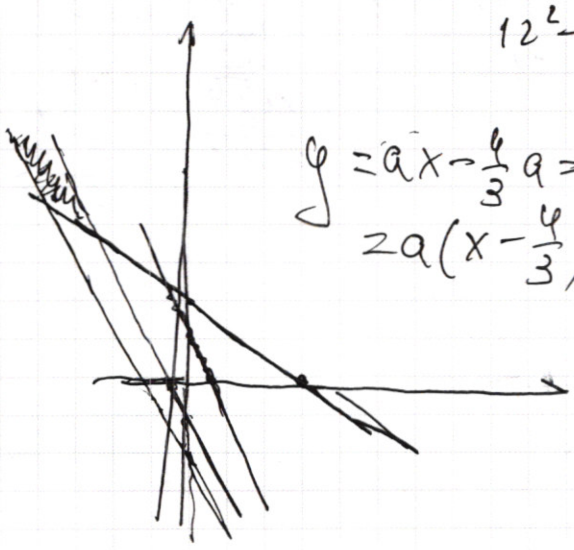
$3ax^2 + (3b - 2a + 6)x - 2b - 8 = 0$

$D = 9b^2 + 4a^2 + 36 - 24a + 36b - 12ab + 24ab + 96a =$

$(51+a)^2 - 72(18-b) \geq 0$ $= 9b^2 + 4a^2 + 36 + 72a + 36b + 12ab \geq 0$

$9\left(b + \frac{2}{3}a + 2\right)^2 + 48a \geq 0$

$12^2 - 12^2 = 0$



$y = ax - \frac{4}{3}a =$

$= a\left(x - \frac{4}{3}\right)$

$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ \frac{2}{3}a + b = 2 \end{cases}$

$\frac{4}{3}a = -4$

$\boxed{\begin{matrix} a = -3 \\ b = 4 \end{matrix}}$

$48a \geq -9(\dots) \geq -36$

$a \geq -\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

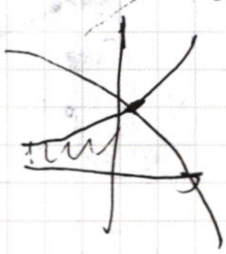
$26x-x^2>0 \quad x\in(0;26) \quad |x^2-26x|=26x-x^2$

$26-x^2=t$

$\cancel{12^{\log_5 t}+t\geq 13^{\log_5}}$ $\quad \log_5(26x-x^2)=t$

$f(t)12^t+5^t\geq 13^t=g(t)$

$\cancel{f'(t)=12^t\ln 12}$



$\cancel{\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t\geq 1}$

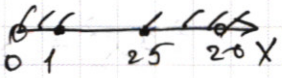
$1+\left(\frac{5}{12}\right)^t\geq\left(\frac{13}{12}\right)^t$

$t\in(-\infty;2]$

$t\leq 2$

$26x-x^2\leq 25$

$x^2-26x+25\geq 0 \quad (x-25)(x-1)\geq 0$



№ 6

$\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2$ $\quad \frac{2}{4}-2=-\frac{3}{2}$

$18x^2-51x+28=0 \quad D=51^2+4\cdot 28\cdot 18$

$18\left(x^2-2\cdot\frac{17}{12}\cdot x+\frac{289}{144}\right)+28-\frac{289}{144}\cdot 18=$

$=18\left(x-\frac{17}{12}\right)^2-\frac{45}{8}$

$51\cdot 51 = 51 + 255 = 2601$

$28\cdot 72 = 56 + 196 = 2016$

2617

$28\cdot 8 = 224$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

1) $2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi(n+k) = -\frac{\pi}{4}+\pi(n+k),\ n,k\in\mathbb{Z} \\ \alpha = -\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi(n+k);\ n,k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

2) $2\alpha+2\beta = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi(n+k) = \frac{3\pi}{4}+\pi(n+k),\ n,k\in\mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi(n+k),\ n,k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\cancel{tg}\ tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = tg\frac{3\pi}{4} = -1$$

$$tg\left(-\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = tg\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$$

$$= \cancel{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right.\right.}$$

$$= tg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-1}{1+4} = \frac{4}{5}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = tg\left(\frac{3\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$$

$$= tg\left(-\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,4\right) = -\frac{1+4}{1-4} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $-1;\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{3}$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} & (1) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 & (2) \end{cases}$$

Из ур-ия (1): $\begin{cases} y\geq 6x \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 6 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$ (*)

$$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$$

$$y^2-(13x-1)y+36x^2+6x-6=0$$

$$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$$

$$=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3 \\ y=\frac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2 \end{array}\right.$$

1) $y=9x-3$: $9(x-1)^2+81(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

пара $(0;-3)$ – не удовл. условию (*)

2) $y=4x+2$: $9(x-1)^2+16(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{18}{5} \Rightarrow x=1\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=6+12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$, пара $\left(1+3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6+12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ – не удовл. условию (*)

Ответ: $(2;15)$, $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Ограничения: $26x-x^2>0 \Rightarrow x \in (0;26) \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} = 12^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть ~~26x~~ $\log_5(26x-x^2)=t$.

$12^t+5^t \geq 13^t \quad |:12^t>0$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^t \geq \left(\frac{13}{12}\right)^t$

Пусть $f(x)=1+\left(\frac{5}{12}\right)^t$, т.к. $\frac{5}{12}<1$, то $f(x)$ монотонно убывает.

Пусть $g(x)=\left(\frac{13}{12}\right)^t$, т.к. $\frac{13}{12}>1$, то $g(x)$ монотонно возрастает $\Rightarrow$

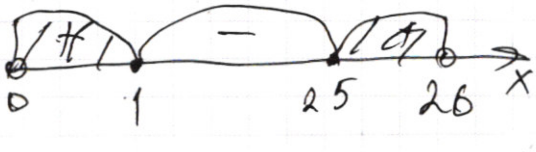
$\Rightarrow t \leq t_0$, где t_0 - реш. уравнения $f(t)=g(t)$, причём это решение только одно в силу монотонности ф-ий.

Заметим, что $5^2+12^2=13^2 \Rightarrow 1+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_0=2 \Rightarrow t\leq 2 \Rightarrow \log_5(26x-x^2)\leq 2$

$26x-x^2 \leq 25 \Rightarrow x^2-26x+25\geq 0 \Rightarrow$

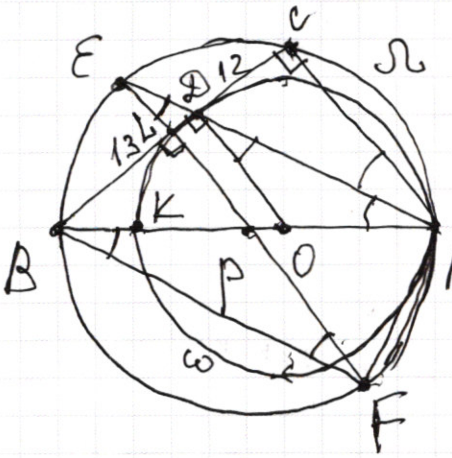
$\Rightarrow (x-25)(x-1)\geq 0$



Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



Т.к. AB - диаметр Ω, то $\angle ACB = 90°$

Т.к. D - точка касания ω и CB, то $OD \perp BC$, где т. O - центр. ω. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{25}{13}$

Пусть r - радиус ω, R - радиус Ω:

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{13} \Rightarrow -12 \cdot 2R = -25r \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{24}{25}$

Т.к. $OD \perp BC$, $EF \perp BC$, то $EF \parallel OD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODA = \angle FEA$ (соотв. при $EF \parallel OD$ и EA - сек.)

$\angle FBA = \angle FEA$ (вписанные, оп. на AF)

$\triangle ODA$ - равнобедр., т.к. $OD = OA = r \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODA = \angle OAD$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA = \angle FEA = \angle FBA \Rightarrow$

$\Rightarrow BF \parallel AE$ ($\angle OAD$ и $\angle FBA$ - накрест леж.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow EAFB$ - прямоуг. $\Rightarrow EF$ - диам.

$BD^2 = AB \cdot Ak$, где K - т. пересеч. AB и $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^2 = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R \cdot \frac{1}{25} R \Rightarrow R = \frac{65}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{156}{5}$

~~$\triangle BPF$ - равнобедр., т.к. $BP = PF$ (P - центр. Ω) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \angle PBF = \angle PFB$~~

(прод. на след. листе)

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (прод.)

$\angle EDL = \angle ADC$ (верт., L – т. пересеч. EF и BC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle LED + \angle EDL = 90^\circ$, то

$\angle DAC = \angle LED$.

По т. Пифагора для $\triangle ABC$: $(2R)^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{40 \cdot 90} = 60$

$tg\angle DAC = tg\angle AEF = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF = arctg\frac{1}{5} = arcctg\, 5$

Т.к. EF – диам., то $\angle AFE = 90^\circ - \angle AEF =$

$= 90^\circ - arcctg\, 5 = arctg\, 5 = arccos\frac{1}{\sqrt{26}} = arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot EF^2 \cos\angle AFE \sin\angle AEF =$

$= \frac{1}{2} \cdot 65^2 \cdot \frac{5}{26} = \frac{1625}{8}$

Ответ: $\angle AFE = arctg\, 5$, $r = \frac{156}{5}$, $R = \frac{65}{2}$,

$S_{AEF} = \frac{1625}{8}$

№6

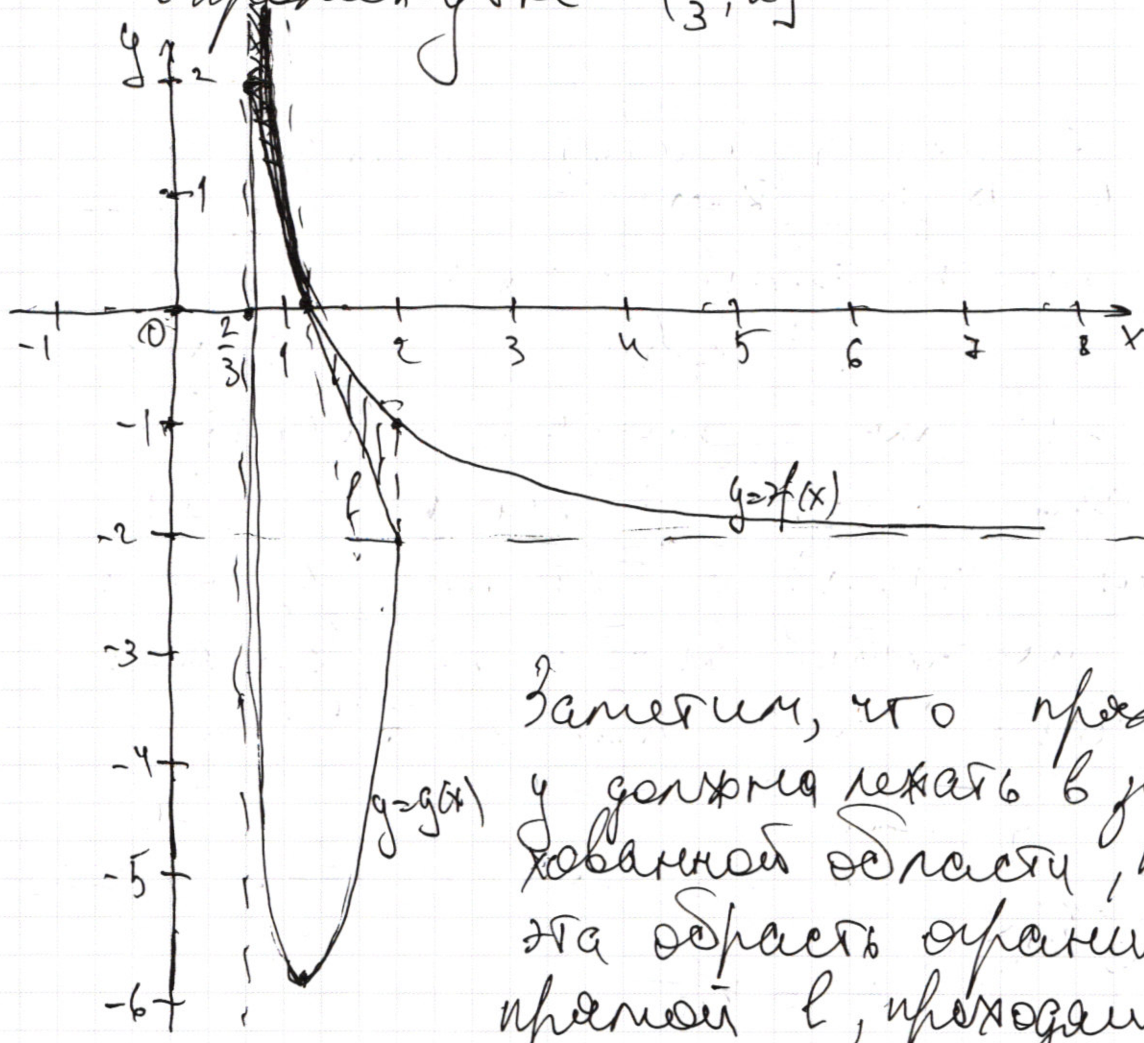
Пусть $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$, $g(x) = 18x^2 - 51x + 28 =$

$= 18(x - \frac{17}{12})^2 - \frac{145}{8}$, $y = ax + b$

(прод. на след. листе)

№5 (прод.)

Изобразим наше нер-во на ~~отрезке~~ промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$



Заметим, что прямая y должна лежать в заштрихованной области, причём эта область ограничена прямой l, проходящей через $(2;-2)$ и $\left(\frac{2}{3};2\right) \Rightarrow$

ур-ие l: $y=-3x+4$

Заметим, что l касается $f(x)$: $f'(x)=\frac{-12}{(3x-2)^2}$, решим ур-ие $f'(x)=-3$, получим $(3x-2)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{3} \\ x=0 \end{array}\right.$

$x=0 \notin \left(\frac{2}{3};2\right] \Rightarrow l$ касается $f(x)$ в точке $\left(\frac{4}{3};0\right) \Rightarrow$ т.к. ~~любая прямая~~ все точки прямой y на $\left(\frac{2}{3};2\right]$ должны лежать внутри заштрих. области,

(прод. на след. листе)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

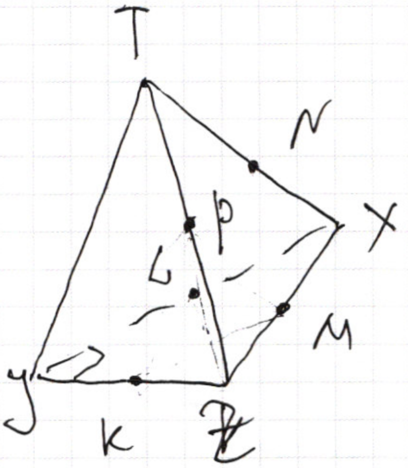
№6 (продолж.)

то y должна проходить через эту точку ~~...~~ $\Rightarrow$ ~~...~~ $0 = \frac{4}{3}a + b \Rightarrow b = -\frac{4}{3}a$

Таким образом, $y = a\left(x - \frac{4}{3}\right)$, то если y не совп. с ℓ, то при изменении ~~...~~ a прямая повернется вокруг т. $\left(\frac{4}{3}; 0\right) \Rightarrow$ она ~~...~~ пересечёт второй раз гиперболу $f(x)$, ~~...~~ но тогда исходное нер-во не будет выполняться при всех $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow y$ совп. с $\ell \Rightarrow a = -3,\ b = 4$

Ответ: $(-3; 4)$



№7

Пусть K, L, M, N, P – середины сторон YZ, ~~TZ~~, YX, XZ, TX, TZ соответственно.

Рассмотрим $\triangle YXZ$:

LM – средняя линия $\Rightarrow$

$\Rightarrow LM \parallel YZ$, $LM = \frac{1}{2} YZ = YK \Rightarrow$

$\Rightarrow YLMZ$ – параллелограмм. Т.к. Y, L, M, Z – лежат на одной сфере и в одной пл-ти, то $YLMZ$ – вписанный $\Rightarrow YLMZ$ – прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle XYZ$ – прямоуг., $\angle ZYX = 90°$. $\Rightarrow$

~~Аналогично в $\triangle ZTX$ PM средняя линия, $PM \parallel TX$, $PM = \frac{1}{2} TX = TN \Rightarrow$~~

$\Rightarrow$ M – центр. окр-ти, описанной около $\triangle XYZ \Rightarrow$ радиус описанной сферы $R \geq \frac{1}{2} XZ \Rightarrow R_{min} = \frac{1}{2} XZ$

Но $R = R_{min}$ ~~при~~ если $\triangle ZTX$ – прям. $\Rightarrow$ и $\angle ZTY = 90° \Rightarrow R_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $R_{min} = \frac{\sqrt{6}}{2}$