МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1) $\qquad$ $\underline{tg\,\alpha - ?}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ (2)

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cancel{2\sin(2\alpha+2\beta)}$ $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac{8}{17}$

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{= -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow$ $\qquad$ $\underline{\cos2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

2) $\sin2\beta - ?$

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

3) 1 случай: Пусть $\sin2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$. Тогда

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{17}}\sin2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot(+\sqrt{17}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha \cancel{-1} = \cancel{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

Т.к. $tg\,\alpha$ определён (по усл), то $\cos\alpha \neq 0$. Тогда поделим данное ур-е на $\cos^2\alpha$:

$\Leftrightarrow 8\,tg\,\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{4}$

2 случай: Пусть $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Тогда

~~sin(2α+2β) = sin(2α+2β) = 8 sin α cos α~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin2\alpha - \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1 \Leftrightarrow$

№1 (продолжение)

$\Leftrightarrow$ $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1 \Rightarrow$ Т.к. $\cos\alpha \neq 0$, поделим данное ур-е на $\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 4\,tg\alpha - \cancel{1} = -tg^2\alpha - \cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \end{array}\right.$

Осн. тр. т.: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
если $\cos\alpha \neq 0$, то:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \,|: \cos^2\alpha$
$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Ответ: $-4;\ 0;\ \frac{1}{4}$

№2. $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & (2) \end{cases}$

(1): 1) $\sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

2) $3y - 2x = 3y - 2 - 2x + 2 = (3y-2) - 2(x-1)$

(2): $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \,\big|\cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 25$

Т.о. исходная система равносильна следующей системе:

$\begin{cases} (3y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 25 \end{cases}$

$\rceil$ $3y - 2 = u$; $x - 1 = v$; $uv \geq 0$. Тогда система примет вид

$\begin{cases} u - 2v = \sqrt{uv} & (3) \\ 9v^2 + u^2 = 25 & (4) \end{cases}$

(3): 1) $u - 2v = \sqrt{uv} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 4uv + 4v^2 = uv \\ u - 2v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 5uv + 4v^2 = 0 \\ u - 2v \geq 0 \end{cases}$

2) $u^2 - 5uv + 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{5v - 3|v|}{2} \\ u = \frac{5v + 3|v|}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = 4v \end{array}\right.$

$D = 25v^2 - 16v^2 = 9v^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$$\begin{cases} u-2v=\sqrt{uv} \\ 9v^2+u^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=4v \end{array}\right. \\ u\geq 2v \\ 9v^2+u^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ v=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} v=1 \\ u=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=1 \\ 3y-2=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{2}{3} \\ x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: 1) $y=-\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{2}{3}$; $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1$

2) $y=2$; $x=2$

№6 Найдите все пары чисел ~~(a, b)~~ $(a;b)$ — ?

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$$

Рассмотрим функции: $y=\frac{4x-3}{2x-2}$

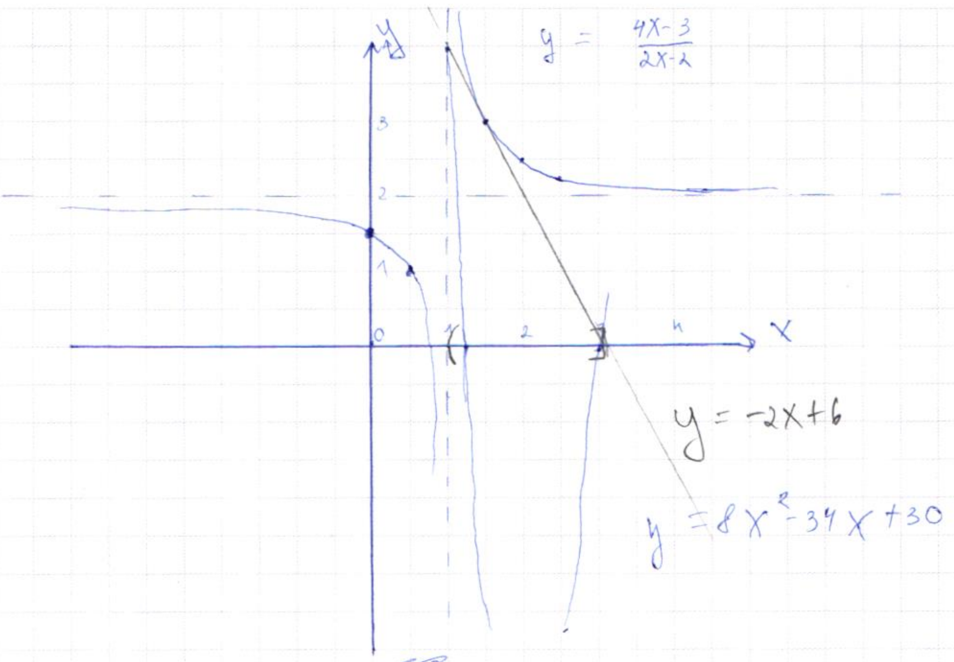
$y=ax+b$

$y=8x^2-34x+30$ ~~парабола~~

Нарисуем их графики: $y=\frac{4x-3}{2x-2}$ — гр. ф-ции — ~~гипер~~ гипербола

$y=ax+b$ — гр. ф-ции — прямая

$y=8x^2-34x+30$ — гр. ф-ции — парабола



$$8x^2 - 34x + 30 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

$$D = 17^2 \cdot 4 - 4 \cdot 8 \cdot 30 = 4(289 - 240) = 14^2$$

Данное в условии нер-во означает, что график функции $y = ax + b$ должен располагаться „между" графиками функций $y = \frac{4x-3}{2x-2}$ и $y = 8x^2 - 34x + 30$ на полуинтервале $(1;3]$

~~Заметим, что график функции $y = ax+b$ должен пересекать ось „икс" в точке $(3;0)$, в противном случае найдется такая точка x_0 на промежутке $(1;3]$, что $ax_0 + b < 8x_0^2 - 34x_0 + 30$.~~

~~Для того чтобы~~ Заметим, что если гр. ф. $y = ax+b$ пересекает ось „икс" в точке, чья абсцисса лежит на полуинтервале $(1;3]$, то он должен пересечь ось икс в точке $(3;0)$, в противном случае найдется на данном пром-ке такая точка x_0, что $ax_0 + b < 8x_0^2 - 34x_0 + 30$.

Также рассмотрим случай касания прямой $y = ax+b$ содержащей точку $(3;0)$ и $y = \frac{4x-3}{2x-2}$. Пусть x_0 - абсцисса точки кас. Тогда

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \iff y_{кас} = ax + b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f'(x_0) = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}$

$y_{кас} = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Точка $(3;0)$ принадлежит данной прямой, след-но

$0 = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}\cdot 3 + \frac{1}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2x_0-2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$

$a = f'(\frac{3}{2}) = -2$

$3a+b=0 \Leftrightarrow b = 6$

Заметим, что ~~прямая~~ y $-2x+6 \geq 8x^2-34x+30$ на пром-ке $(1;3]$

Значит, пара $(-2;6)$ удовл. условию задачи.

Других пар, удовл. условию задачи, не существует, т.к. при $a > -2$ ~~$ax+b$~~ прямая $ax+b$ пересекает либо гр. ф-ции $\frac{4x-3}{2x-2}$ ~~в~~, либо гр. ф-и $8x^2-34x+30$ в точках, чьи абсциссы принадл. пром-ку $(1;3]$

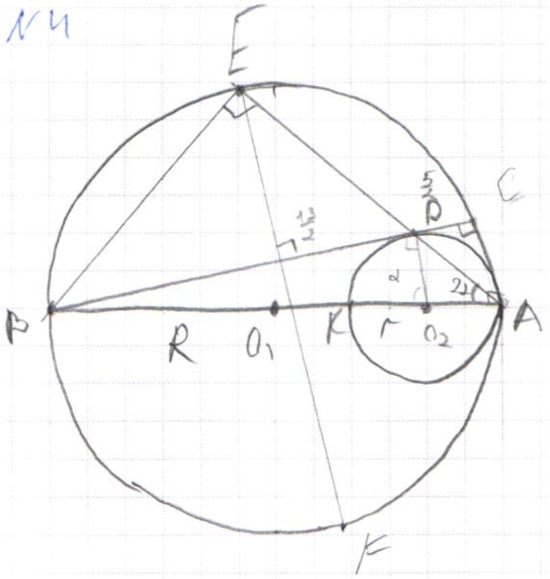
Ответ: $(-2;6)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№4



R - ? ; r - ?

Д.п. BE; $\angle BEA$ опирается на диаметр $\to$ $\angle BEA = 90°$

По т-ме ~~о с~~ о секущей и кас-ой: $BD^2 = BK \cdot AB$

$BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2r$

По т-ме о пересечении хорд: $AD \cdot ED = BD \cdot DC = \frac{13 \cdot 5}{4}$

По т-ме Пифагора для $\triangle BDO_2$: $r^2 + BD^2 = (2R - r)^2$

$$\begin{cases} BD^2 = 4R \cdot r - 4r^2 \\ BD^2 = 4R^2 - 4R \cdot r + \cancel{r^2} - \cancel{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow 4R^2 - 2 \cdot 2R \cdot 2r + 4r^2 = 0 \Leftrightarrow (2R - 2r) = 0 \Rightarrow R = r,$$

но $R > r$

№5

$x^2 + 6x > 0$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$\Leftrightarrow |x^2+6x|^{\log_4 3} - |x^2+6x|^{\log_4 5} \geq -x^2 - 6x$$

Пусть $t = x^2 + 6x$, $t > 0$. Тогда нер-во примет вид:

$$|t|^{\log_4 3} - |t|^{\log_4 5} \geq -t$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$\begin{cases} a, b, p \in R \\ a, b, p > 0 \end{cases}$

Отв: таких чисел нет

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

~~$u - 2v = \sqrt{uv}$~~

$$\begin{cases} u - 2v = \sqrt{uv} \\ 9v^2 + u^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = 4v \end{array}\right. \\ u - 2v \geq 0 \\ 9v^2 + u^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 10u^2 = 25 \\ 25v^2 = 25 \end{array}\right. \\ u - 2v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = \frac{5\sqrt{10}}{10} \\ v = \frac{5\sqrt{10}}{10} \end{cases} \\ \begin{cases} u = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ v = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ u = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} v = -1 \\ u = -4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y - 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ x - 1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 3y - 2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x - 1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = 1 \\ 3y - 2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = -1 \\ 3y - 2 = -4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1$

$x_0 = \frac{5-1}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{10}}{6} + \frac{2}{3} \\ x = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{10}}{6} + \frac{2}{3} \\ x = -\frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$6 - 4 = \sqrt{12 - 4 - 6 + 2}$

~~$2 = \sqrt{4} = 2$~~

~~$12 + 2x - 12 - 8 = 4$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|t|^{\frac{1}{2}\log_2 3} + t \ge |t|^{\frac{1}{2}\log_2 5}$

$t > 0$

$t^{\log_4 3} + t \ge t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 \frac{3}{5}} + \frac{t}{\dots} \ge 0$

$\cancel{3^{\log_4 t}}$ $\quad t^{\log_4 \frac{3}{5}}$ $\quad t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \ge t$

$\cancel{\log_4 3}$

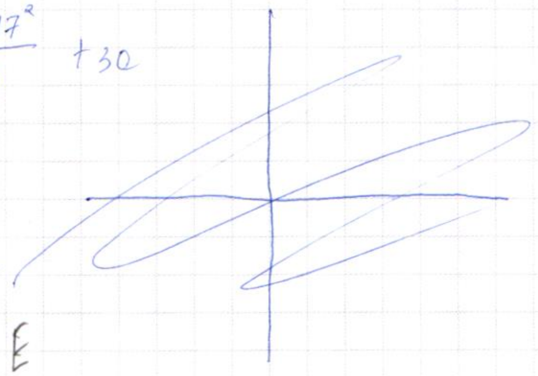
$\frac{17^2}{8} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 30$

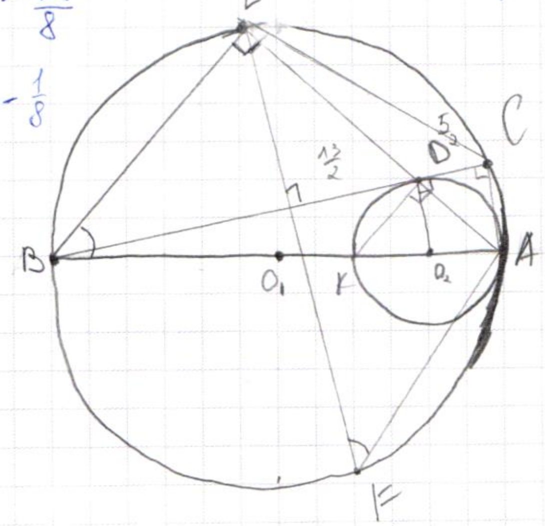
$-\frac{17^2}{8} + 30$

$\frac{-289+240}{8}$

$-\frac{49}{8}$

$-6-\frac{1}{8}$





$BD^2 = (2R-2r)(2r)$

$4Rr - 4r^2$

$\frac{BE}{KD} = \frac{2R}{r}$

$BD^2 + r^2 = (2R-2r)^2$

$4R^2 - 8Rr + 4r^2$

$BD^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$BD^2 = 2(R-2r)\cdot 2r$

$BD^2 + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4R\cdot r + \cancel{r^2}$

$BD^2 = 4Rr - 4r^2$

$2BD^2 = 4R^2 - 4Rr^2$

$2\frac{13^2}{16} = R^2 - r^2$

$8x^2 - 34x + 30$

$D = 17^2\cdot 4 - 4\cdot 8\cdot 30 =$

$8\cdot 9 = 72 - 34\cdot 3 + 3 \quad 4(289-240) = 4\cdot 49 = (2\cdot 7)^2$

$\cancel{102} - 102 \quad x = \frac{34-14}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ $\quad 8 - 34 + 30$

$x = \frac{48}{16} = \frac{12}{4} = 3$ $\quad 8 - 4$

$\frac{17}{8}(1-34) - \frac{17^2\cdot 2}{8} + \frac{17}{8}$ $\quad \frac{17}{8} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 30 + \frac{17\cdot 2}{2\cdot 8} = 2\frac{1}{8}$

$-\frac{33\cdot 17}{8} + 30$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3u-2v=\sqrt{3uv} \\ v^2+u^2=\frac{16}{9} \end{cases}$$

$344+5$

$7+5=12$

$\cancel{-5v^2-15uv+16=0}$

$\cancel{D=45^2+4\cdot 16\cdot 5}=\cancel{5(45+64)=5\cdot 109}$

$5^2\cdot 9$

$(3u-2v)^2=3uv$

$\cancel{(v^2+2uv+u^2)+uv=\frac{16}{9}+(3u-2v)^2}$

$\cancel{(v+u)^2+uv=\frac{16}{9}(3u-2v)^2}$

$9u^2-12uv+4v^2=3uv$

$5u^2-15uv+\frac{16}{9}=0$

$D=15^2-4\cdot\frac{16}{9}=15^2-\frac{8^2}{9}=15^2-\frac{8^2}{3^2}=$

$=\left(15-\frac{8}{3}\right)\left(15+\frac{8}{3}\right)=$

$\cancel{D=\frac{1}{9}(45-8)(45+8)=\frac{1}{9}\cdot 37\cdot 53}$

$\cancel{15}$

$$\begin{cases} 3u-2v=\sqrt{3uv} \\ v^2+u^2=\frac{16}{9} \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

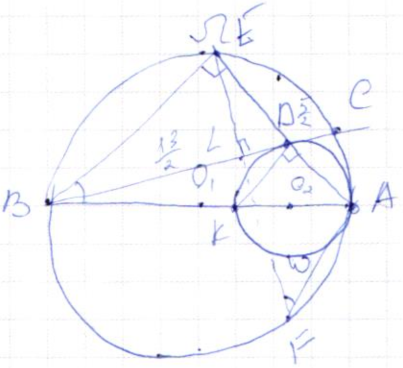
(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$|x^2+6x|^{\log_4 3} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

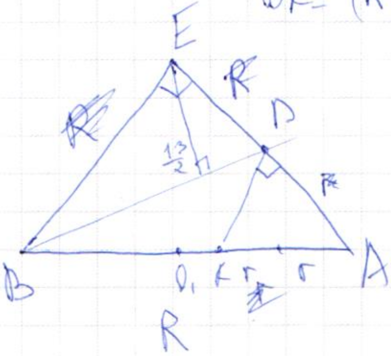
$x^2+6x = t$

$|t|^{\log_4 3} + t \geq |t|^{\log_4 5}$



$BD^2 = BK \cdot BA$

$BK = (R-2r)\,2R = \frac{13^2}{4}$



$\geq 0\ ;\ \in R$ $\quad f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$3 \leq x,y \leq 27$

$f(x/y) < 0$

3 5 7 11 13 17 19 23 29

$f(2) = 0 \quad f(3) = 0 \quad f(5) = 1 \quad f(7) = 1$

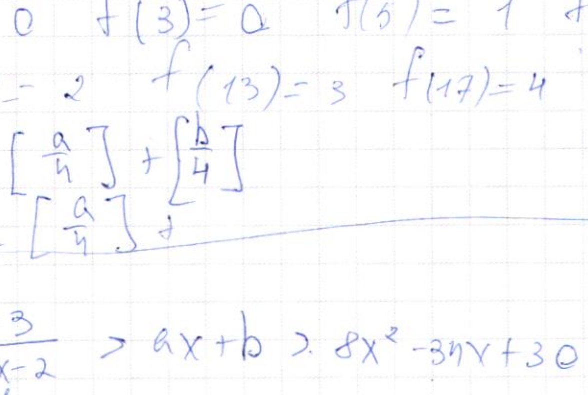
$f(11) = 2 \quad f(13) = 3 \quad f(17) = 4 \quad f(19) = 4 \quad f(23) = 5$

$f(ab) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$

$f(x/y) = \left[\frac{a}{4}\right] +$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$y = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ - ?

$2\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\underset{\frac{2}{17}}{\cos 2\beta} + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$ $=$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{17^2}} = \pm\frac{\sqrt{285}}{17}$

$17\cdot 17$: 49, 7, 17, 289

$289-4=285 = 6\cdot 9\cdot 5 =$ ~~3~~ ~~30~~ $19\cdot 3\cdot 5$

$285 : 5 = 57$; $57 : 3 = 19$

$=$ $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{17} \pm \frac{\sqrt{285}}{17}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ $\cdot 17$

$= 2\sin 2\alpha \pm \sqrt{285}\cdot\cos 2\alpha = -\sqrt{17}$

$= 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm 2\sqrt{285}\cos^2\alpha - \sqrt{285} + \sqrt{17} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \ (2) \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

(2)

$\cancel{3y-2x}=\sqrt{}$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |\cdot 3 \end{cases}$$

$\cancel{9y^2}-\cancel{9y^2}-15xy+4x^2-9x^2+2x-18x+3y-12y=-10$

$3(x^2-2x+1)$

$3(x-1)^2+1+3y^2-4y=8$

$\cancel{(x-1)^2}+ \quad x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}=\frac{12}{9}$

$=\frac{16}{9}$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$3y-2-2x+2=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3\left(y-\frac{2}{3}\right)-2(x-1)=\sqrt{3\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1)}$

$uv\geq 0$

I $y-\frac{2}{3}=u$; $x-1=v$:

$$\begin{cases} 3u-2v=\sqrt{3uv} \\ v^2+u^2=\frac{16}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9u^2-15uv+4v^2=\cancel{3uv}=0 \\ v^2+u^2=\frac{16}{9} \quad |\cdot 9 \end{cases}$$

$9v^2+9u^2=16$

$-5v^2-15uv+16=0$

$-5v^2-15uv=-16$

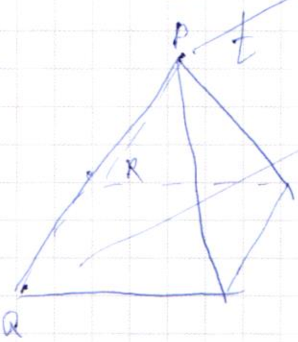
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

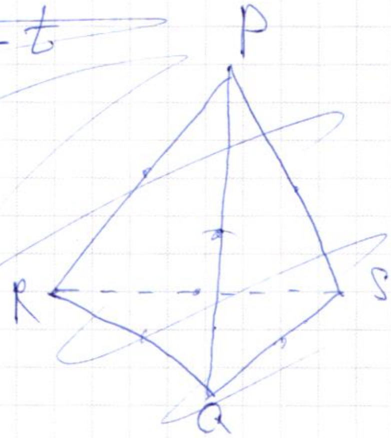
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{t^{\log_4 3} + t = t^{\log_4 5}}$

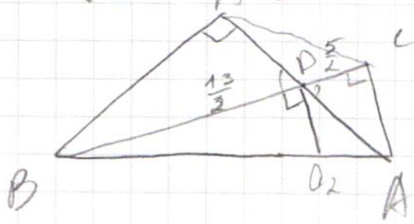
$\cancel{t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5}} = -t$





$CL\cdot(CL+9) = BD^2 = BE^2$

$CL^2 + 9CL = AC^2$



$\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}$

$\frac{AD}{\frac{13}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{ED}$

$\log_4 3 = \log_6(-t + t^{\log_4 5})$ $AD\cdot ED = \frac{13\cdot 5}{4}$

$\cancel{r^2} + BD^2 = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$BD^2 = 4R\cdot r - 4r^2$

$4R^2 - 4r^2 = 2\cdot\frac{13^2}{42}$

$4R^2 - 2\cdot 4\cdot R\cdot r + 4r^2 = 0$

$(2R - 2r) = 0$

$R = r$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{-\frac{2\sqrt{17}}{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sqrt{17}\cos 2\beta = 4$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

~~$\sin 2\alpha + \sin 2\beta$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot -\sqrt{17}$

$-4\sin 2\alpha \mp \cos 2\alpha = 1$

~~8~~ 1) „–": ~~$-8\sin\alpha\cos\alpha - 2 + 2\sin^2\alpha = 1$~~

$-8\sin\alpha\cdot\cos\alpha \mp 2\cos^2\alpha + 1 = 1$

$-8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha = 0 \,|:\cos^2\alpha$ ~~$-2\cos\alpha(4\sin\alpha-1)=0$~~

~~$2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0$~~

$-8\,tg\,\alpha - 2 = 0$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

2) „+" $-4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$

$-8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 1 \,|:2$

$-4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 \,|:\cos^2\alpha$

$-4\,tg + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$tg^2\alpha - 4\,tg\,\alpha = 0$

$tg\,\alpha(tg\,\alpha - 4) = 0$

$u - 2v \geq 0$

$u \geq 2v$

$-v > 0$

$v = 0$

$-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq -2\frac{\sqrt{10}}{2}$

$3y = \sqrt{-3y+2}$

$x^2 - 9y = 9$

$9(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 25$

$9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 - 12y + 4 = 12 + 13 = 25$

$(3y-2)^2 = 9y^2 - 12y + 4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

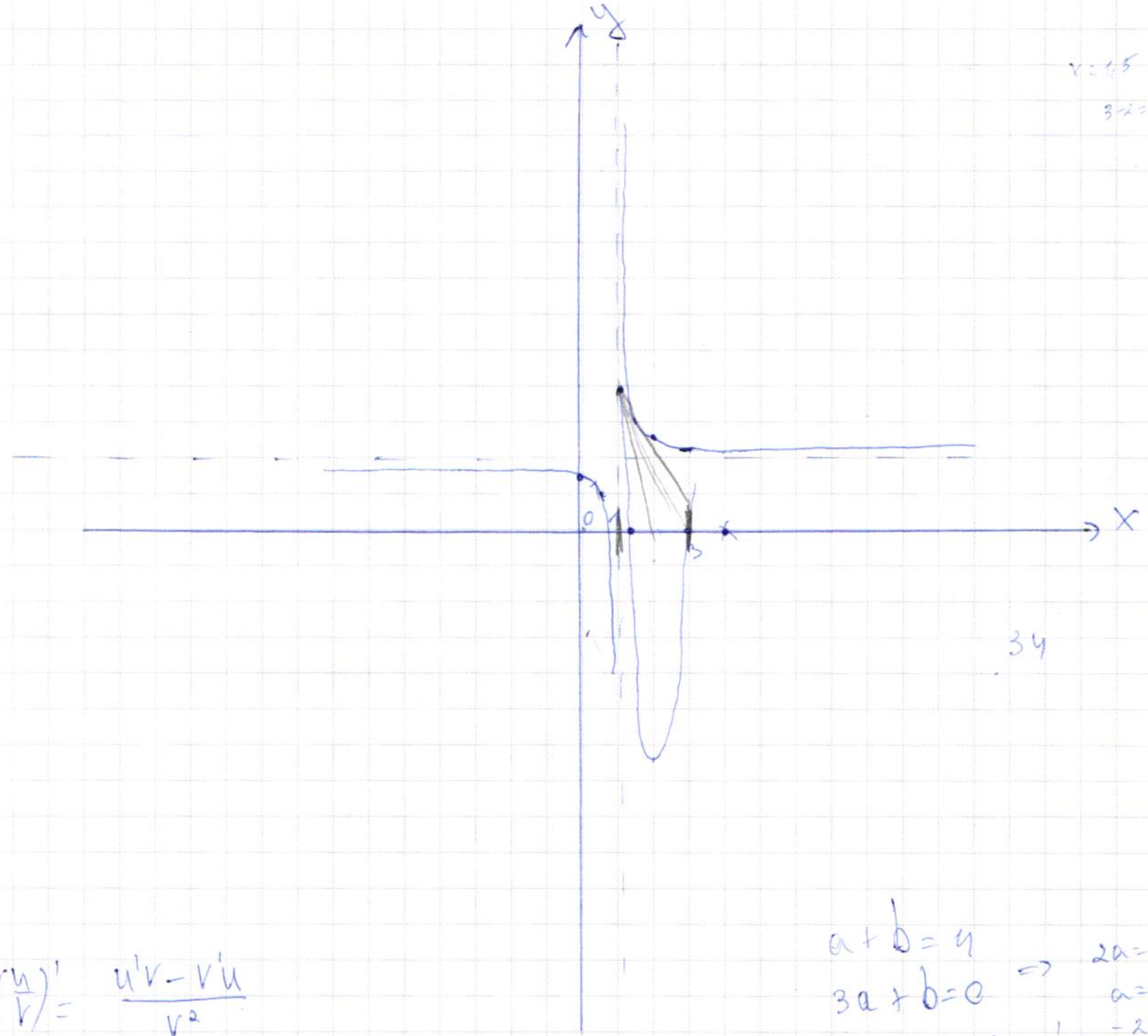
$$y = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$$

$x = 1$

$2 + \frac{1}{1-2} = 2 + \frac{1}{-1}$

$x = 1{,}5$

$3-2=$



34

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$a + b = 4$

$3a + b = 0 \Rightarrow 2a = -4$

$a = -2$

$-2+6=4$

$-6+6=0$

Касание: $\left(\frac{1}{2x-2}\right)' = 2(x-1)^{-1} =$

$= -2\frac{1}{4(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$a + b = 4$

$$y = \left(2 + \frac{1}{2x-2}\right)' = \left(\frac{1}{2x-2}\right)' =$$

$$= \frac{-2}{4(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$2 + \frac{1}{1} \quad 3$

$-2 < a <$

$$y_{кас} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$a = f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}$

$f\left(f'\left(\frac{3}{2}\right)\right) - 2$

$$y_{кас} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x_0-1)^2}\cdot x + \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2x_0-2}$$

$$4 = -\frac{1}{2(x_0-1)^2} + \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} \quad \Big| \cdot 2(x_0-1)^2$$

$y = -2 + b = 4$

$b = 6$

$$4(x_0-1)^2 = -1 + x_0 + x_0 - 1$$

$y = -2x + 6 \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad 2(x_0^2 - 2x_0 + 1) = x_0 - 1 \qquad 2x_0^2 - 5x_0 + 3 = 0$

$x_0 = \frac{3}{2}$