МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. (начало)
$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = 20 & (\mathrm{I}) \\ y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = -44 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

ОДЗ системы: $x, y \in \mathbb{R}$

Сложим уравнения I и II и вычтем из I уравнения уравнение II, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2-y^2} + y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = 20 + (-44) \\ 7x + \sqrt[3]{49x^2-y^2} - (y + \sqrt[3]{49x^2-y^2}) = 20 - (-44) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + y + 2\sqrt[3]{49x^2-y^2} = -24 \\ 7x - y = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+y + 2\sqrt[3]{(7x-y)(7x+y)} = -24 & (\mathrm{III}) \\ 7x - y = 64 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

Подставим $\boxed{\mathrm{IV}}$ в $\boxed{\mathrm{III}}$, получим уравнение

$$7x+y + 2\sqrt[3]{64(7x+y)} = -24$$

$$\left(\sqrt[3]{7x+y}\right)^3 + 8\sqrt[3]{7x+y} + 24 = 0$$

Сделаем замену: $t = \sqrt[3]{7x+y}$.

$$t^3 + 8t + 24 = 0$$

7. (продолжение)

$t^3 + 2t^2 - 2t^2 - 4t + 12t + 24 = 0$

$t^2(t+2) - 2t(t+2) + 12(t+2) = 0$

$(t+2)(t^2 - 2t + 12) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t^2 - 2t + 12 = 0 \quad (\underline{V}) \end{array}\right.$

Уравнение $\underline{V}$ корней не имеет, т.к. дискриминант D квадратного трёхчлена $t^2 - 2t + 12$ равен $D = (-2)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 4 - 48 = -44 < 0$, т.е. меньше 0. Значит, $t = -2$. Сделаем обратную замену:

$-2 = \sqrt[3]{7x + y}$

$7x + y = -8 \quad (\underline{VI})$

Сложим $\underline{IV}$ и $\underline{VI}$, получим:

$7x + y + 7x - y = 64 - 8$

$14x = 56$

$x = 4$

Подставим в $\underline{VI}$:

$7 \cdot 4 + y = -8$

$y = -36.$

Подставим в исходную систему и проверим:

$7 \cdot 4 + \sqrt[3]{49 \cdot 4^2 - (-36)^2} = 28 + \sqrt[3]{784 - 1296} = 28 + \sqrt[3]{-512} =$

$= 28 + (-8) = 20$ - верно

это минус

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

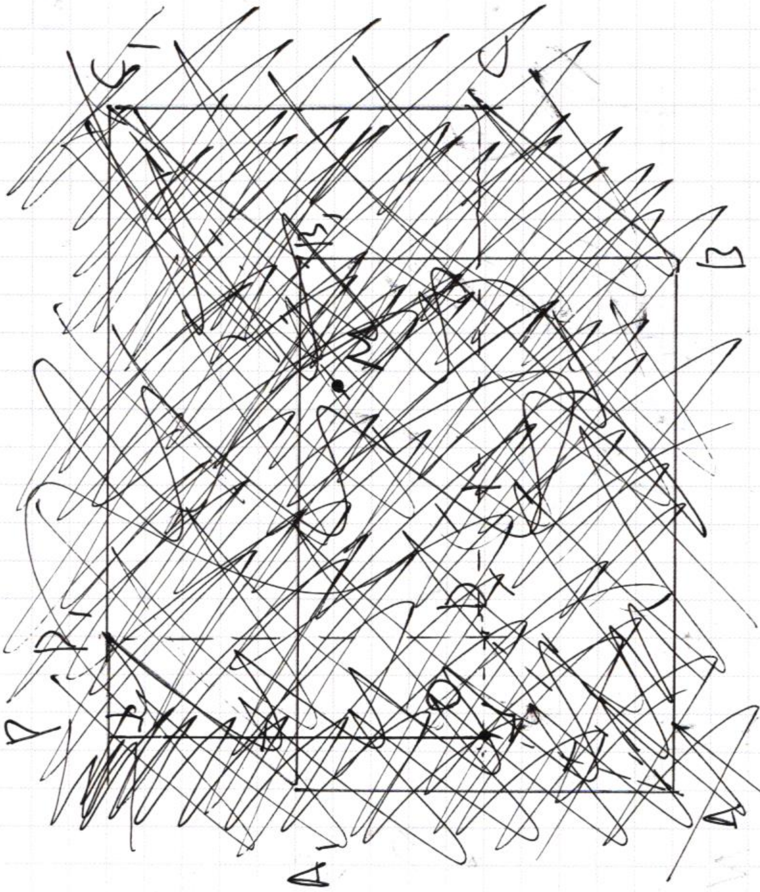
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. (окончание)

$$-36+\sqrt[3]{49\cdot 4^2-(-36)^2} = -36+\sqrt[3]{-512} = -36-8=-44$$

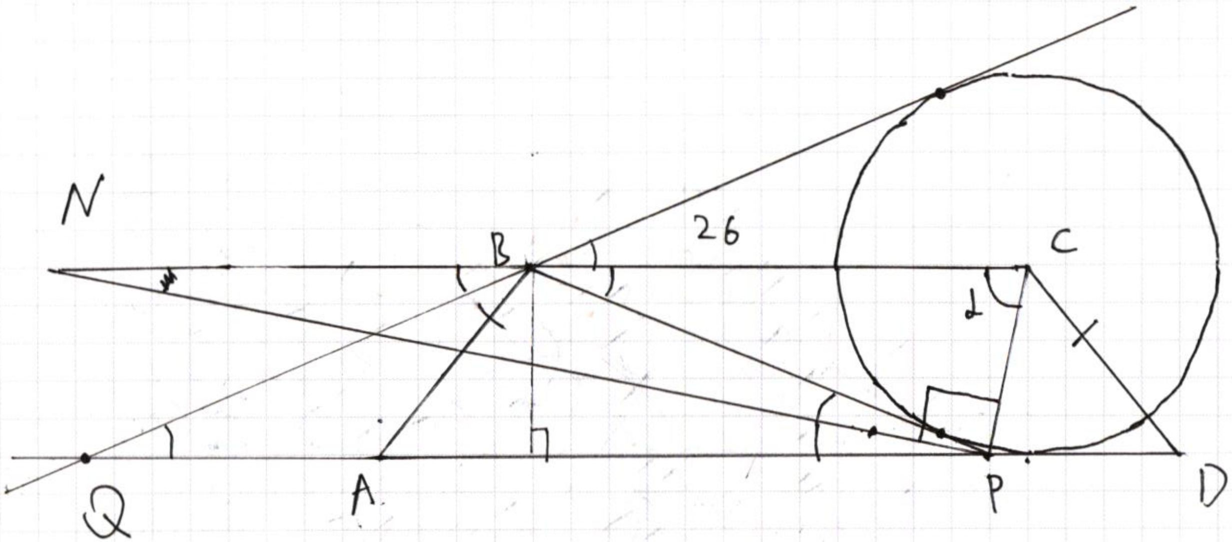
верно.

<u>Ответ:</u> $\begin{cases} x=4 \\ y=-36. \end{cases}$



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$

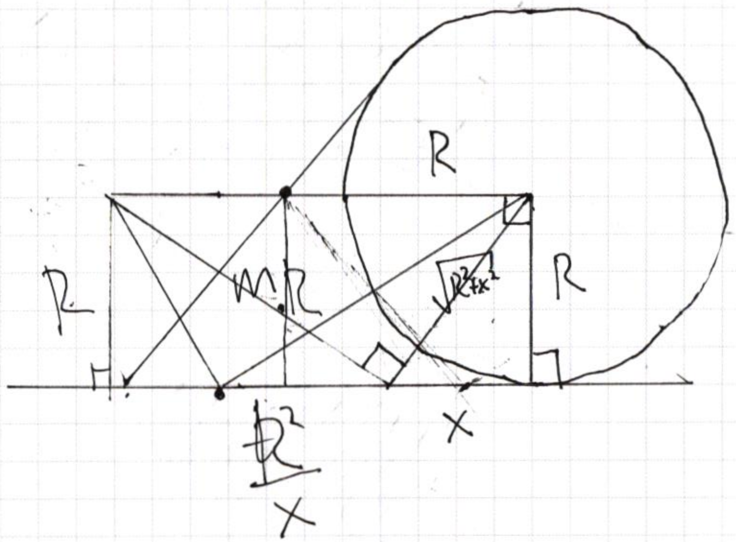
$AP = 13, \quad NC = 26$

$m = \dfrac{\sqrt{R^2+x^2}\, R}{x}$

$x > R$

$\dfrac{R}{x} = \dfrac{m}{\sqrt{R^2+x^2}}$

$\dfrac{R}{x} = \dfrac{t}{R}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② (начало) $\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$ (**)

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^4 > 0 \\ 5x > 0 \\ 5x \neq 1 \\ \log_{5x} x^4 \geq 0 \\ 125x \neq 1 \\ 125x > 0 \\ \frac{1}{x^2} > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ \log_{5x} x^4 \geq \log_{5x} 1 \\ x \neq \frac{1}{125} \\ x > 0 \\ x \cancel{>} 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \\ x > 0 \\ \log_{5x} x^4 - \log_{5x} 1 \geq 0 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\text{метод рационализации}} \begin{cases} x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \\ x > 0 \\ (5x-1)(x^4-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \\ x > 0 \\ (5x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1) \geq 0 \quad (I) \end{cases} \text{ — система } (*)$$

Решим нер-во I

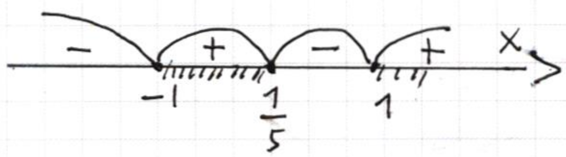
(2) $(5x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1) \geq 0$.

(продолжение) Т.к. $x^2+1>0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, то

$(5x-1)(x-1)(x+1) \geq 0$

$(x-\frac{1}{5})(x-1)(x+1) \geq 0$.

Метод интервалов:



$x \in [-1; \frac{1}{5}] \cup [1; +\infty)$

Подставим в (*)

$$\begin{cases} x>0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \\ x \in [-1; \frac{1}{5}] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad x \in (0; \frac{1}{125}) \cup (\frac{1}{125}; \frac{1}{5}) \cup [1; +\infty)$.

Вернёмся к неравенству (**)

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2} \quad \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4\log_{5x} x} \leq -2\log_{125x} x \quad \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{\log_5 x}{\log_5 5x}} \leq \frac{-2\log_5 x}{\log_5 125x} \quad \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_5 x}{\log_5 5+\log_5 x}} \leq \frac{-\log_5 x}{\log_5 125+\log_5 x} \quad (\text{II})$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② Сделаем замену $t = \log_5 x$

(продолжение)

$$\sqrt{\frac{t}{1+t}} \le \frac{-t}{3+t} \quad (\text{III}) \qquad \text{ОДЗ III}: \frac{t}{t+1} \ge 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t \ge 0 \end{array}\right.$$

При $-\frac{t}{3+t} < 0$ нер-во (III) решений не имеет,

т.к. левая часть ≥ 0 и не может быть меньше или равна отрицательного числа. При $-\frac{t}{3+t} \ge 0$ обе части неотрицательны, их можно возвести в квадрат.

III равносильно с учётом ОДЗ:

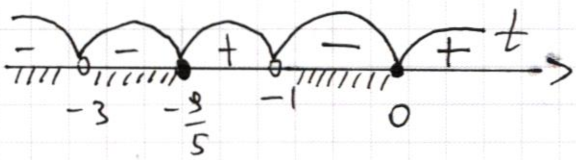
$$\begin{cases} \frac{t}{t+1} \le \left(\frac{-t}{t+3}\right)^2 \\ -\frac{t}{t+3} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{t}{t+1} \le \frac{t^2}{(t+3)^2} \\ \frac{t}{t+3} \le 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{t^2(t+1) - t(t+3)^2}{(t+1)(t+3)^2} \ge 0 \\ t \in (-3; 0] \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{t^3+t^2-t^3-6t^2-9t}{(t+1)(t+3)^2} \ge 0 \\ t \in (-3; 0] \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{-5t^2-9t}{(t+3)^2(t+1)} \ge 0 \\ t \in (-3; 0] \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{(5t+9)t}{(t+3)^2(t+1)} \le 0 \\ t \in (-3; 0] \end{cases}$$

② (окончание)

$$\begin{cases} \dfrac{\left(t+\frac{9}{5}\right)t}{(t+3)^2(t+1)} \leq 0 \\ t \in (-3;0] \end{cases}$$ – решим методом интервалов



$$\begin{cases} t \in (-\infty;-3) \cup \left(-3;-\frac{9}{5}\right] \cup (-1;0] \\ t \in (-3;0] \end{cases}$$

$t \in \left(-3;-\frac{9}{5}\right] \cup (-1;0]$

С учётом ОДЗ

$t \in \left(-3;-\frac{9}{5}\right] \cup \{0\}$

Обратная замена

$-3 < \log_5 x \leq -\frac{9}{5}$ или $\log_5 x = 0$

$5^{-3} < x \leq 5^{-\frac{9}{5}}$ или $x=1$

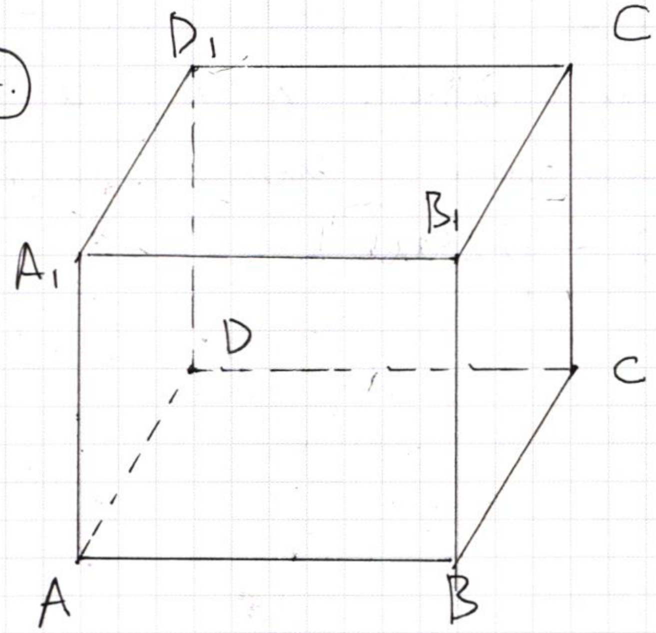
$\frac{1}{125} < x \leq \frac{1}{\sqrt[5]{5^9}} = 5^{-1,8}$ или $x=1$

т.к. $5^{-1,8} < 5^{-1} = \frac{1}{5}$, то все решения удовлетворяют ОДЗ

<u>Ответ</u>: $x \in \left(\frac{1}{125}; 5^{-1,8}\right] \cup \{1\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.



Т.к. S касается и плоскости BB_1C_1 и прямой CC_1, то центр O сферы S лежит в плоскости α, проходящей через CC_1 перпендикулярно к BB_1C_1.

Т.к. S касается ABB_1 в точке A, то O лежит на прямой, проходящей через A перпендикулярно к ABB_1.

Проведём прямую l в плоскости ABC перпендикулярно к AB через A.

Т.к. ABB_1A_1 и BCC_1B_1 – прямоугольники, то $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = 90^\circ \Rightarrow BB_1 \perp BC, AB \Rightarrow$
$\Rightarrow BB_1 \perp ABC \Rightarrow BB_1 \perp l$.

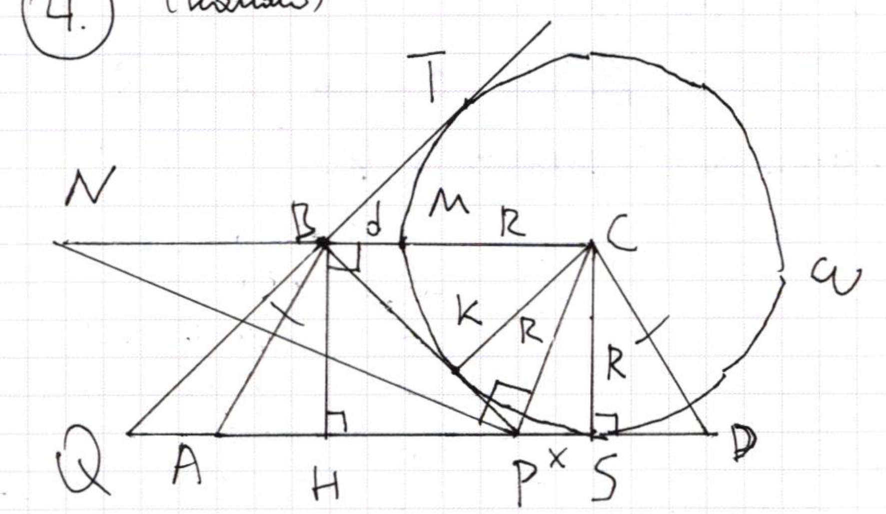
т.к $l \in ABC$

Т.к. $l \perp BB_1$ и $l \perp AB$, то $l \perp ABB_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow O \in l \Rightarrow O \in ABC$.

Т.к. O лежит и в плоскости ABC, и в плоскости α, то O – лежит в их пересечении, т.е. на прямой m, проходящей через C перпендикулярно к BC в плоскости ABC. Значит, C - точка касания S и BB_1C

$OA = OC$ как радиусы S, $\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$, $OB = OB$ => прямоугольные $\triangle OAB$ и $\triangle OCB$ равны по катету и гипотенузе => => $AB = BC$ => $ABCD$ – ромб.

4. (начало)



Пусть S - точка касания ω и AD, K - точка касания ω и BP, M - точка пересечения отрезка BC с окружностью ω (т.к. из B можно провести касательные к ω, то ω пересекает отрезок BC), T - точка касания BQ и ω. $CS \perp AD$, $CK \perp BP$ (радиусы к касательным)
т.к. $AD > BC$, то H, S лежат на отрезке AD.
Окружность ω вписана в угол $\angle TBK$, а значит, прямая BC - биссектриса $\angle TBK$. Значит, перпендикулярная ей прямая BH - биссектриса смежного $\angle QBP$. BH - биссектриса и высота ΔQBP => BH - ось симметрии ΔQBP. Если Q лежит по ту же сторону от H, что и D, то P не лежит между Q и D. Значит P лежит по ту же сторону

(продолжение)

(4) от H, что и D. Если P лежит на продолжении ~~HS~~ HS за S, то $\angle CPN <$ $< \angle CPS \le 90^\circ$. значит, P лежит на отрезке HS.

т.к. в $\triangle CPS$ $\angle CSP = 90^\circ$.

Пусть $BM = d$, ~~...~~ Радиус $\omega = R$

По теореме Пифагора для $\triangle BCK$:

$BC^2 = BK^2 + KC^2$

$(d+R)^2 = BK^2 + R^2$

$BK = \sqrt{d^2+2dR}$

Пусть $SP = x$. $PK = SP = x$ как отрезки касательных к окружности из одной точки.

$BH = CS = R$ (высоты ABCD)

Т.к. $BH \perp HS$ ~~...~~, $HS \perp CS$, $BH \perp BC$, то

BHSC - прямоугольник $\Rightarrow HP = HS - PS =$

$= BC - PS = d + R - x$

По теореме Пифагора для $\triangle BHP$:

$BH^2 + HP^2 = BP^2$

$R^2 + (d+R-x)^2 = (\sqrt{d^2+2dR} + x)^2$

$R^2 + d^2 + R^2 + x^2 + 2dR - 2dx - 2Rx = d^2 + 2dR + x^2 +$

$+ 2x\sqrt{d^2+2dR}$

$2R^2 - 2dx - 2Rx = 2x\sqrt{d^2+2dR}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 (окончание)

$R^2 = (d + R + \sqrt{d^2+2dR})x \geq Rx$

$R \geq x.$

$\angle PCS = \angle SCB - \angle NCP = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$\angle CPS = 90^\circ - \angle PCS = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$\operatorname{tg}\angle CPS = \frac{CS}{PS}$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{5}{12}) = \frac{R}{x}$

$\frac{5}{12} = \frac{R}{x}$

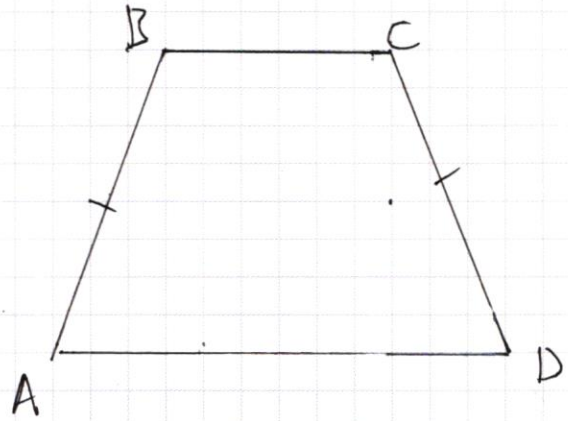
$\frac{R}{x} < 1$

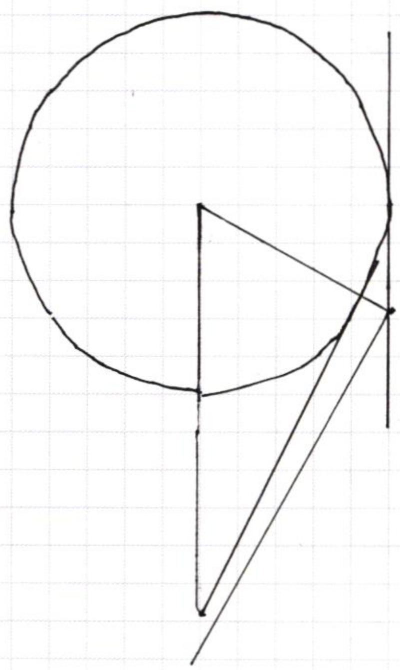
$R < x.$

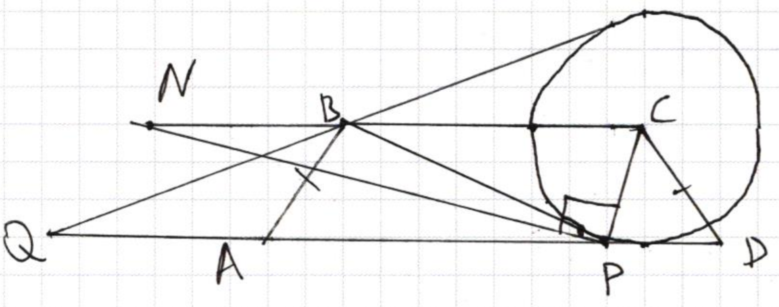
но мы знаем, что $R \geq x$. Противоречие. Описанной в условии задачи конструкции не существует.

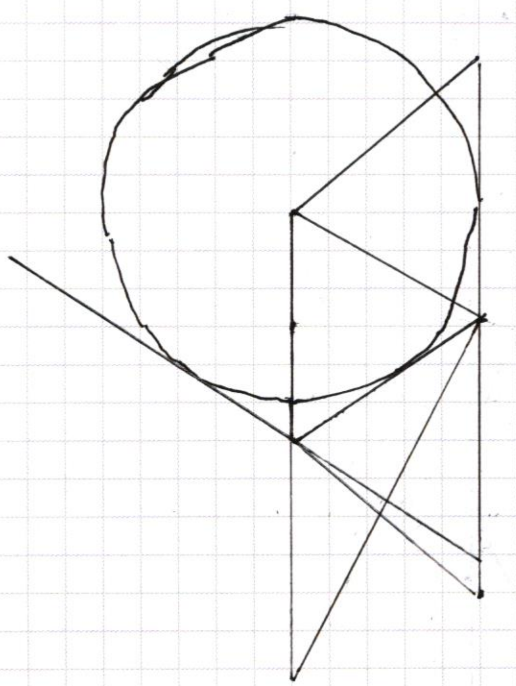
Ответ: Описанной в условии задачи конструкции не существует. Никакого ответа вычислить нельзя.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА









☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

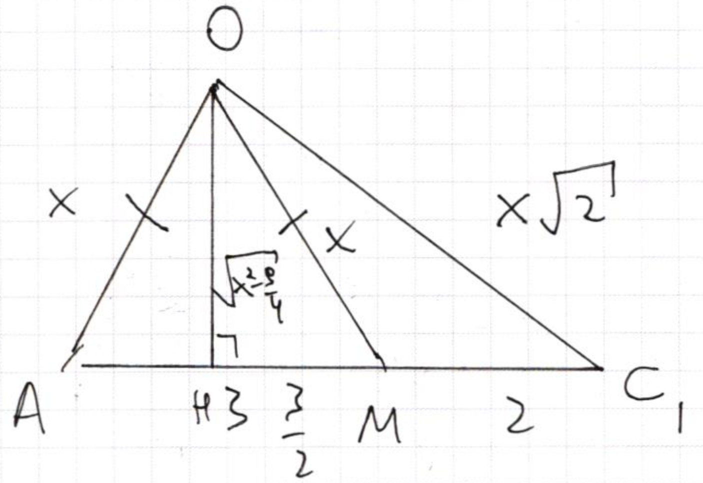
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

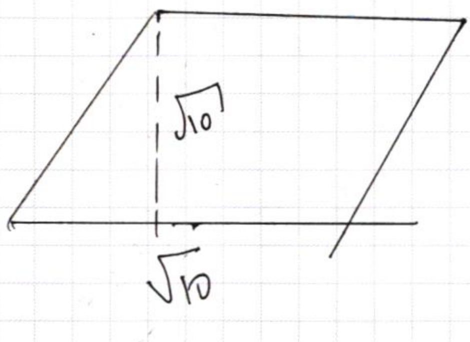
(заполняется секретарём)

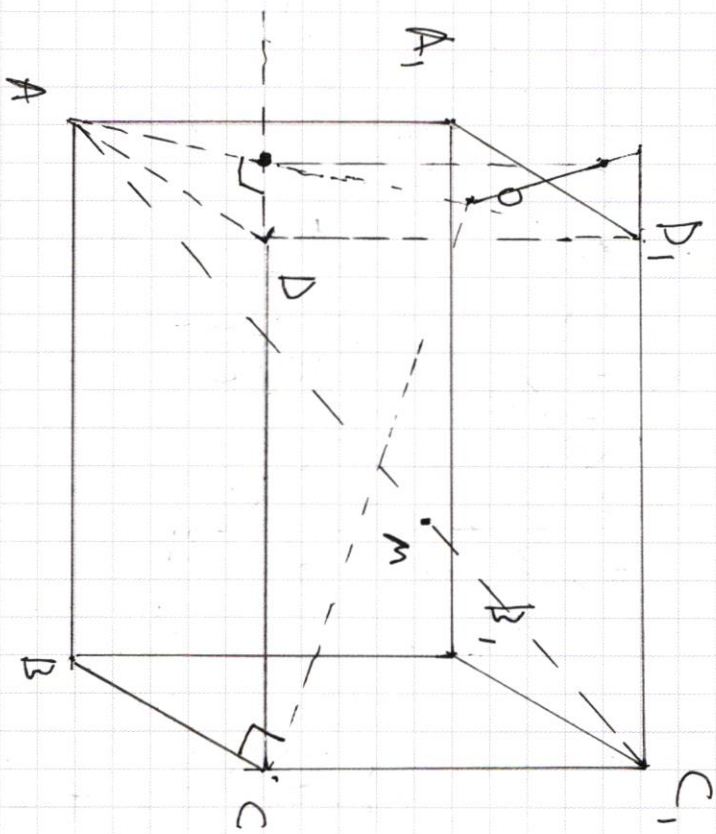
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

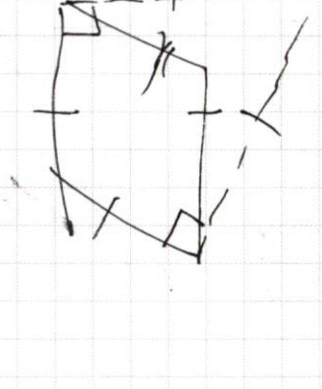


$$2x^2 = x^2 - \frac{9}{4} + \frac{49}{4} = x^2 + 10$$

$$x = \sqrt{10}$$







☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

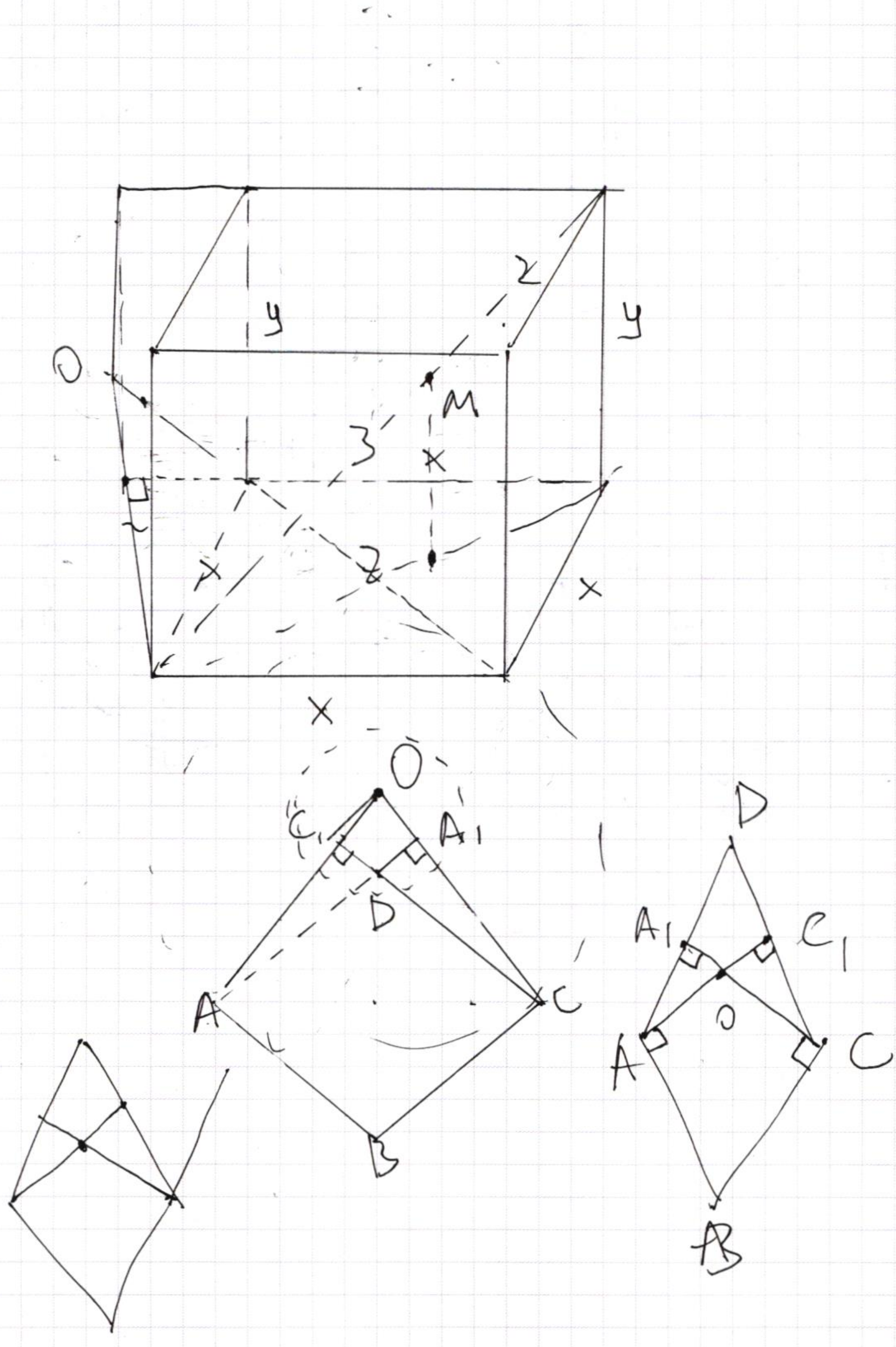
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

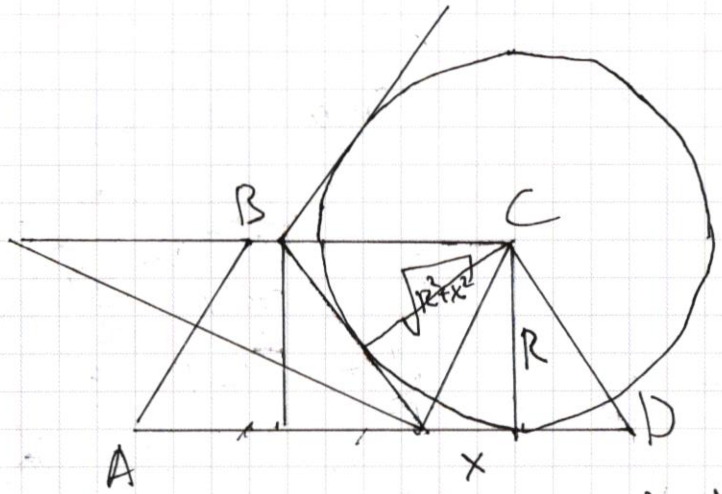


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

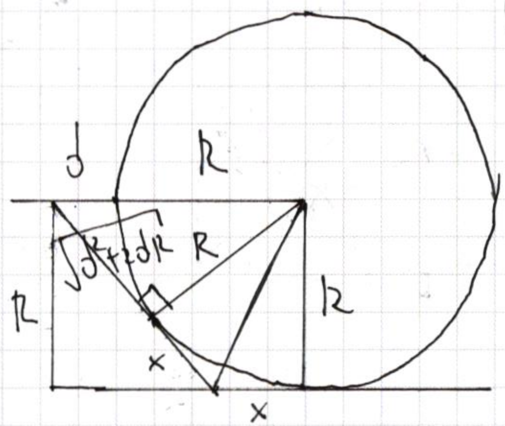


$R > d + R + \sqrt{\ }$

$x > R$

$$\frac{2d \cdot R^2}{d+R+\sqrt{d^2+2dR}} > R$$

d^2+2dR



$$\left(\sqrt{d^2+2dR}+x\right)^2 = R^2+(d+R-x)^2$$

$$\cancel{d^2}+2\cancel{dR}+\cancel{x^2}+2x\sqrt{d^2+2dR} =$$

$$= R^2+\cancel{d^2}+R^2+\cancel{x^2}+$$

$$+\cancel{2dR}-2dx-2Rx$$

$$x\sqrt{d^2+2dR} = R^2-2dx-2Rx$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$7x-y=64$

$t=\sqrt[3]{-2}$

$7x+y=$

$\cancel{(20-7x)^3 = 8000-1200x+60x^2-}$

$s^3+8s+24$

$7x+y+2\sqrt[3]{64(7x+y)}=-24$

$\sqrt[3]{-2}$

$t+8\sqrt[3]{t}+24=0.$

$t-8.$

$\cancel{s^3+4s}.$

$\sqrt{\dfrac{5^{-7,2}}{5^{-0,8}}}$

$t=s^3$

$s^3+8s+24=0$

$s^3-2s^2+12s+2s^2-4s+24$

$\dfrac{-7,2}{-0,8}\le$

$(-2)^3-16$

$(s+2)(s^2-2s+12)$

$\sqrt{9}\le$

$s^3+8s+24 \mid s+2$

$-\,s^3+2s^2 \qquad s^2-2s+12$

$-2s^2$

2^4-

$(-1,8)\cdot(-2)=$

$=3,6$

$3\ 3$

$1,2$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 36 \\ \hline +\ 216 \\ 108\ \ \\ \hline 1296 \\ -\ 784 \\ \hline 512 \end{array}$$

$x > 0$

$x \neq \frac{1}{125}$ $\quad x = \frac{1}{5}$

$$\frac{\ln x}{\ln 125x}$$

$$\log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

$$-2 \log_{125x} x$$

$$\frac{1}{\log}$$