МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1) $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ (2)

Воспользуемся формулой суммы синусов во (2):

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$ Подставим (1):

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Имеем 2 случая:

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}}$

Применим синус суммы в (1):

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |\cdot\sqrt{5}$$

~~$2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 1\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$~~

$+2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$. Применим формулы двойных углов и осн. тригонометрич. тождество:

$$+2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cancel{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$$

$$+2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$$

$$+2tg^2\alpha + 1 = 0$$

$$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

2) $\sin 2\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos 2\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Аналогично 1) случаю:

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad / \cdot \sqrt{5}$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0 \quad /: \cos^2\alpha$$

$$2\,tg\,\alpha + tg^2\alpha = 0$$

4

$$tg\,\alpha = -2; \quad tg\,\alpha = 0$$

$$\boxed{\text{Ответ: } tg\,\alpha = -\frac{1}{2};\ tg\,\alpha = -2;\ tg\,\alpha = 0}$$

№2

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2) \end{cases}$$

(1): $x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ (x - 2y)^2 = xy - x - 2y + 2 & (3) \end{cases}$$

(3): $x^2 - 4xy + 4y^2 - xy + x + 2y - 2 = 0$

$$x^2 + (1 - 5y)x + 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

Решим отн. x:

$$D = (1-5y)^2 - 4(4y^2 + 2y - 2) = 1 - 10y + 25y^2 -$$

$$-16y^2 - 8y + 8 = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y^2 - 2y + 1) = 9(y-1)^2$$

$$x = \frac{5y - 1 \pm 3(y-1)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4y - 2 \\ x = y + 1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = x - 1 \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2): $x^2+9y^2-4x-18y=12$

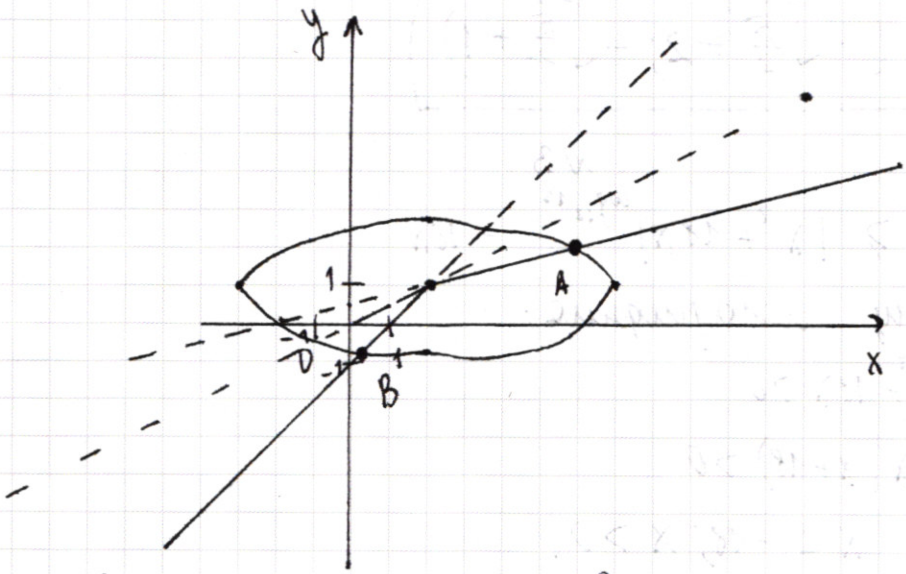
$$(x^2-4x+4)-4+(9y^2-18y+9)-9=12$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$ – „сплюснутая" окружность

Итого имеем систему:

$$\begin{cases} y \le \frac{1}{2}x \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \ (4) \\ y=x-1 \ (5) \end{array}\right. \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \ (6) \end{cases}$$

Построим график каждого уравнение:



Из графика т A имеет координаты: $(6;2)$.
Подставим в нашу систему.

$$\begin{cases} 2 \le \frac{1}{2}\cdot 6 \\ \left[\begin{array}{l} 2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2} \\ 2=6-1 \end{array}\right. \\ 4^2+9=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} 2=2 \\ 2=5 \end{array}\right. \\ 25=25 \end{cases}$$ – верно

$\Downarrow$

$(6;2)$ – решение

т. A лежит на (4), а т. B на (5) $\Rightarrow$ для определения её координат подставим (5) в (6):

$$(x-2)^2 + 9(x-2)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{10}_{2}} = \frac{5}{2}$$

$$|x-2| = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{5}{2}} + 2 \\ x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 2 \end{array}\right.$$

Судя по графику, можно сказать о том, что $x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 2$. Подставим в (5):

$$y = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 2 - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}} + 2;\ -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1\right) \text{ — решение.}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (6; 2);\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}} + 2;\ -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1\right)}$$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$$

Условие сущ. логарифма:

$$x^2 + 18x > 0$$

$$x(x+18) > 0$$

$$x < -18;\ x > 0.$$

Отсюда следует, что модуль можно раскрыть со знаком „+".

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2 + 18x) \geqslant |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$$

Заменим $x^2 + 18x = a$:

$$5^{\log_{12} a} + a \geqslant a^{\log_{12} 13}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

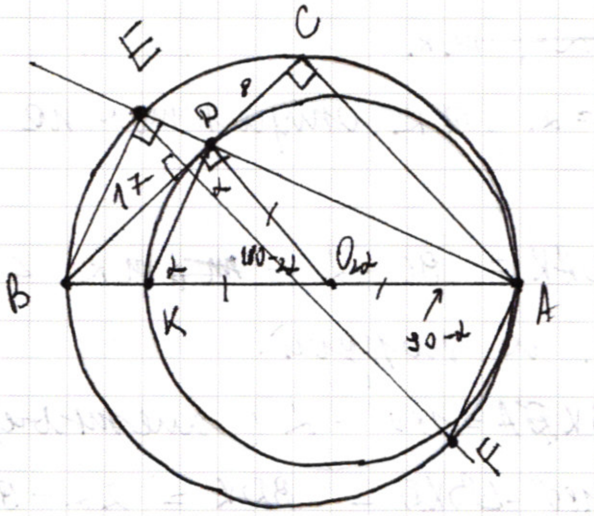
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} 2} \geq 2^{\log_{12} 13} + 2$ Воспользуемся методом рационализации. в п. 7.

$$5^{\log_{12} 12} \geq (2-1)(\log_{12} 13 - 1)$$

~~Прологарифмируем обе части по осно~~

№4.



1) O – центр. ω
2) OD ⊥ BC – радиус в т. касания. ∠BCA = 90°, т.к. опир. на диаметр.
3) △BDO ∼ △BCA – по двум углам. (∠CBA – общий; ∠ODB = ∠ACB = 90°)
4) Пусть R – радиус Ω; r – радиус ω
5) Из подобия △BDO и △BCA:

$$\frac{OB}{AB} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{r + (2R-2r)}{2R} = \frac{17}{17+8} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{16}{25} \quad (1)$$

6) По т. о касательной и секущей

$BD^2 = BA \cdot BK.$

$17^2 = 2R \cdot (2R - 2r)$ Подставим (1)

$17^2 = 2 \cdot 2R(\cancel{2}R - \frac{16}{25}R)$

$17^2 = 4R^2 \cdot \frac{9}{25}$

$$17 = 2R \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow R = \frac{85}{6}$$

Тогда $r = \frac{16}{25} R = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15}$

7) Пусть $\angle OKD = \alpha$. Т.к. $\angle OKD$ – р/б ($OK = OD = r$), то $\angle ODK = \alpha$; $\angle DOK = 180^\circ - 2\alpha$

8) $\angle DOK + \angle DOA = 180^\circ$ – смежные углы.

$\angle DOA = 180^\circ - \angle DOK = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha$

9) $\triangle DOA$ – р/б ($DO = OA = r$) $\Rightarrow$ $\angle DAO = 90^\circ - \alpha$.

10) $\angle BEA = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBA = \alpha$

~~11) $\angle EBA = \angle EBF = \alpha$, т.к.~~

11) $\angle EBA = \angle EFA = \alpha$, т.к. опираются на одну дугу.

12) $\angle BDK = \frac{1}{2} \cup KD = \angle DAK = 90 - \alpha$ – т.к. $\angle BDK$ – угол между кас. и хордой.

13) $\angle BKD = 180^\circ - \angle DKA = 180^\circ - \alpha$ (смежные)

14) $\triangle BKD$: $\angle DBK = 180^\circ - \angle BKD - \angle BDK = 2\alpha - 90^\circ$

15) Из п/у $\triangle BCA$:

$$\cos\angle DBK = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos(2\alpha - 90^\circ) = \frac{25}{2 \cdot \frac{85}{6}} = \frac{15}{17}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$$

$$2\alpha = \arcsin\frac{15}{17}$$

~~$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$~~

$$\angle EFA = \alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}$$

$\boxed{\text{Ответ: } R = \frac{85}{6};\ r = \frac{136}{15};\ \angle EFA = \frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$x^2+(-5y+1)x+4y^2+2y-2=0$

$D=(1-5y)^2-4\cdot1(4y^2+2y-2)=1-10y+25y^2-16y^2-$

$-8y+8=9y^2-18y+9=9(y^2-2y+1)=9(y-1)^2$

$x=\frac{5y-1\pm3(y-1)}{2}=\left[\begin{array}{l}x=\frac{5y-1+3y-3}{2}\\ x=\frac{5y-1-3y+3}{2}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=4y-2\\ x=y+1\end{array}\right.$

$\begin{cases}(x-4y+2)(x-y-1)=0\\ y\le\frac{1}{2}x\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\\ y=x-1\end{array}\right.\\ y\le\frac{1}{2}x\end{cases}$

$x=6:\quad y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$

$6;2$

При $x=6$:

$16+9(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=1$

$\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-1\end{array}\right.$

$(x-2)^2+9(x-2)^2=25$

$(x-2)^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$|x-2|=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2$

$x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2$

$\sqrt{\frac{5}{2}}\vee2$

$\frac{5}{2}\ \cancel{<}\ 4$

$y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2-1=$

$=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1$

$-\sqrt{\frac{5}{2}}+2;\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

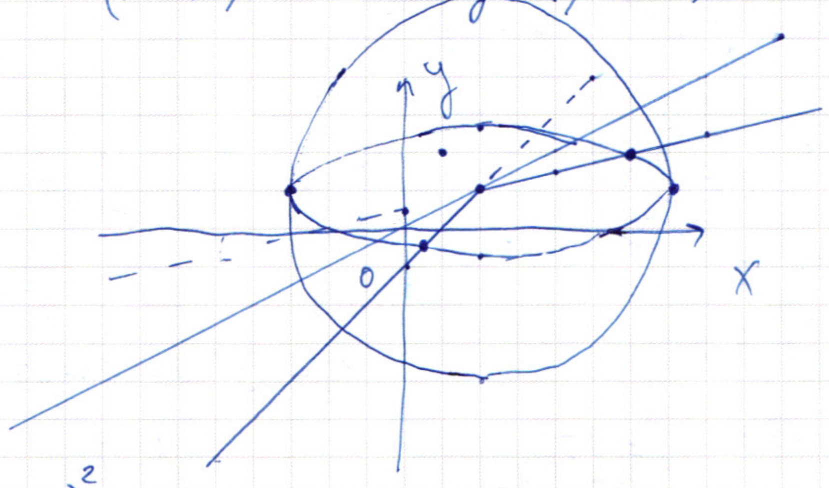
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(2): $(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)-9-4=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$



$|y-1|=\frac{5}{3}$

$\left[\begin{array}{l} y-1=\frac{5}{3} \\ y-1=-\frac{5}{3} \end{array}\right.$

$y=\frac{8}{3}$

$y=-\frac{2}{3}$

(1) $(x-2y)^2=xy-x-2y+2$ $\qquad x-2y\geq 0$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$ $\qquad y\leq\frac{1}{2}x$

$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$(x-2y)^2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

$x^2-5xy+4y^2$

$(x-4y)(x-y)+x+2y-2=0$

~~$x^2-2xy+\frac{1}{4}$~~

$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(4y^2+2y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-2-5xy=0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}-5xy=0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(1)=0.\quad f(3)=0\quad f(5)=1.\quad f(7)=1\quad f(11)=2;$

$f(13)=3;\quad f(17)=4;\quad f(19)=4.\quad f(23)=5.$

$\frac{1}{24}\le\frac{x}{y}\le\frac{5}{2}24$

$f(15)=f(3)+f(5)=0+1=1.$

$f(21)=1.$

10:15

11:45 – 12:45

$\log_{12}5\cdot\log_{12}a \geqslant \log_{12}(a-1)+\log_{12}\left(\log_{12}\frac{13}{12}\right)$

$\log_{12}(5^{\log_{12}a}+a)\geqslant \log_{12}a^{\log_{12}13}$

$\log_{12}\frac{5^{\log_{12}a}+a}{a^{\log_{12}13}}\geqslant 0$

$\frac{5^{\log_{12}a}+a-a^{\log_{12}13}}{a^{\log_{12}13}}\geqslant 0$

$5^{\log_{5}a}$

$a\geqslant a^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}a}$

$1\geqslant$

$\frac{5^{\log_{12}a}}{\log_{12}\frac{13}{12}}\geqslant a-1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2\alpha - 90) = \frac{15}{17}$

$\cos(90 - 2\alpha) = \frac{15}{17}$

$$\begin{array}{r} 289 \\ -225 \\ \hline 64 \end{array}$$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$

$\cancel{\cos^2\alpha}$ $\cancel{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

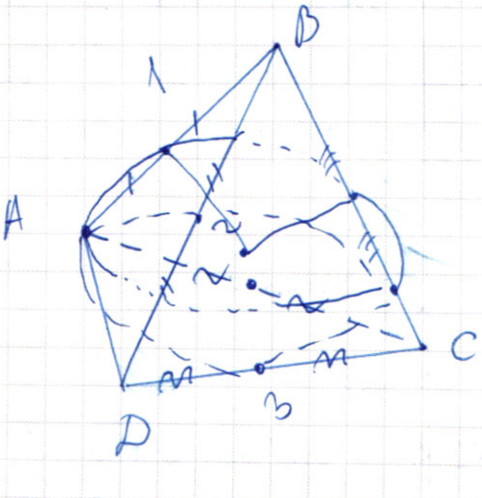
$\cos 2\alpha = \cancel{1 - \cos}\ 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\angle AEE = \arccos \frac{5}{\sqrt{34}}$

№ 6

$$\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \\ ax + b \le -8x^2 - 30x - 17 \end{cases}$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$P(x) = (-8x^2-30x-17)(4x+3) - 12x - 11 =$$

$$= -32x^3 - 24x^2 - 120x^2 - 90x - 68x - 51 - 12x - 11 =$$

$$= -32x^3 - 144x^2 - 158x - 62 - 12x =$$

$$= -32x^3 - 144x^2 - 170x - 62 = -2(16x^3 + 72x^2 + 85x + 31) =$$

$$= \qquad -16 + 72 - 85 + 31 = 2$$

N1.

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cancel{2}^{1} \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{\cancel{4}^{2}}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2} = \frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+5}{2}$$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cancel{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$$

$$2\,tg\,\alpha + 1 = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

2)

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$$

$$2\,tg\,\alpha + tg^2\alpha = 0 \qquad tg\,\alpha(tg\,\alpha + 2) = 0$$

$$tg\,\alpha = 0;\ tg\,\alpha = -2$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

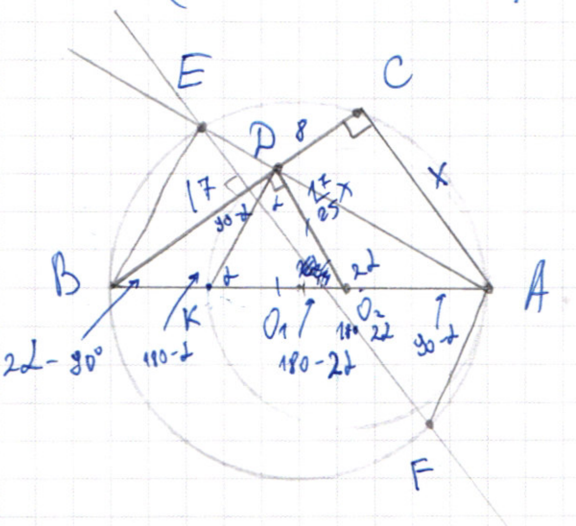
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13} - a = a\left(a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$$

$$\log_{12} a \cdot \log_5 12 \geq \cancel{\log_{12} a + \log_{12} a}.$$

$$\left(-\infty; -9-\sqrt{82}\right) \cup \left(-9+\sqrt{82}; +\infty\right)$$

№4.



$$17^2 = AB \cdot BK$$

$$17^2 = 2R \cdot (2R - 2r)$$

$$289 = 4R^2 - 4Rr$$

$$4R^2 - 4Rr - 289 = 0$$

$$R = 4r \pm \sqrt{16r^2}$$

$$4Rr = 4R^2 - 289$$

$$4Rr = (2R-17)(2R+17)$$

$$r = \frac{(2R-17)(2R+17)}{4R}$$

$$90 - \alpha + \cancel{180} - \alpha + x = \cancel{180}$$

$$\frac{16}{25}R = \frac{(2R-17)(2R+17)}{4R} \qquad x = 2\alpha - 90$$

$$\cancel{4\alpha = 180} \Rightarrow$$

$$4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25}R - 289 = 0 \qquad 25^2 + x^2 = 4R^2$$

$$100R^2 - 64R^2 - 289 \cdot 25 = 0 \qquad \left(\frac{17}{25}x\right)^2 + 17^2 = (2R - r)^2$$

80
56
136

$$36R^2 = 289 \cdot 25$$

$$6R = 17 \cdot 5 \qquad \frac{r + (2R - 2r)}{2R} = \frac{17}{25}$$

$$R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$r = \frac{16}{25} \cdot \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{136 \cdot 5}{75} = \frac{136}{15} \qquad \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{25}$$

$$\angle AFE = \angle ABE$$

$$\angle ABE = 90 - \angle EAB = \qquad 1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25}$$

$$= 90 - 90 + \alpha = \alpha$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$$

Из $\triangle ABC$: $\cos(2\alpha - 90) = \dfrac{25}{2 \cdot \frac{85}{6}}$

$$\frac{r}{R} = \frac{16}{25}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x=a$ $\qquad$ $x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}a}+a \geqslant |a|^{\log_{12}13}$ $\qquad$ $x(x+18)>0$

$\cancel{\log_{12}a\cdot\log_a 5}$ $\qquad$ $x<-18;$

$x>0$

$$5^{\log_{12}a} \geqslant a^{\log_{12}13}-a^1$$

$$5^{\log_{12}a} \geqslant (a-1)(\log_{12}13-1)$$

$$5^{\log_{12}a} \geqslant (a-1)\cdot\log_{12}\frac{13}{12}$$

$$\cancel{\log_{12}a \geqslant \log_5\left((a-1)\cdot\log_{12}\frac{13}{12}\right)}$$

$$\log_{12}a\cdot\log_{12}5 \geqslant (a-1)\cdot\log_{12}\frac{13}{12}$$

$$(12-1)(a-1)(12-1)(5-1) \geqslant (a-1)\log_{12}\frac{13}{12}$$

$$(a-1)-(a-1)\log_{12}\frac{13}{12} \geqslant 0$$

$$\begin{array}{r|l} 328 & 4 \\ \hline 32 & 82 \\ 08 & \\ 8 & \\ 0 & \end{array}$$

$1 \vee \log_{12}\frac{13}{12}$ $\qquad$ $(a-1)\left(1-\log_{12}\frac{13}{12}\right) \geqslant 0$

$12 > \frac{13}{12}$ $\qquad$ $(a-1)\left(\log_{12}12-\log_{12}\frac{13}{12}\right) \geqslant 0$

$-9-\sqrt{82} < -18$

$\cancel{9 \vee \sqrt{82}}$ $\qquad$ $a-1 \geqslant 0$

$81 \vee 82$ $\qquad$ $x^2+18x-1 \geqslant 0$

$-\sqrt{82} \vee -9 \mid \cdot(-1)$ $\qquad$ $x=\frac{-18\pm\sqrt{324+4}}{2}=\frac{-18\pm\sqrt{328}}{2}=$

$82>81$ $\qquad$ $=-9\pm\sqrt{82}$

$-9-\sqrt{82}$ $\quad$ -18 $\quad$ 0 $\quad$ $-9+\sqrt{82}$

$-9-\cancel{\sqrt{82}}; \cup ($

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)