

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$

$$2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$2\beta = \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2} (\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2} (\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\alpha_4 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\gamma = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \gamma = \varphi \Rightarrow \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = 0, \quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = 2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = -\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_3 \in \mathbb{Q}$$

$$\alpha_4 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{\sin \alpha_4}{\cos \alpha_4} =$$

~~$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}})}{\cos(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}})}$~~

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}})} = \frac{\cos(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}})}{-\sin(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}})} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$

Обер: $\tan \alpha = 0$, $\tan \beta = -2$; $\tan \lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{x^2 - 4x - 2y + 2} & \sqrt{2} \quad x \geq 2 \quad x-2y \geq 0 \Rightarrow x \geq 2y \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 = 12$$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$ — эллипс с центром в точке $(2; 1)$ большим радиусом

$R = 5$ и меньшим радиусом $a = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

$$xy - x - 2y + 2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(y-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ и } y \geq 1 \text{ или } x \leq 2 \text{ и } y \leq 1$$

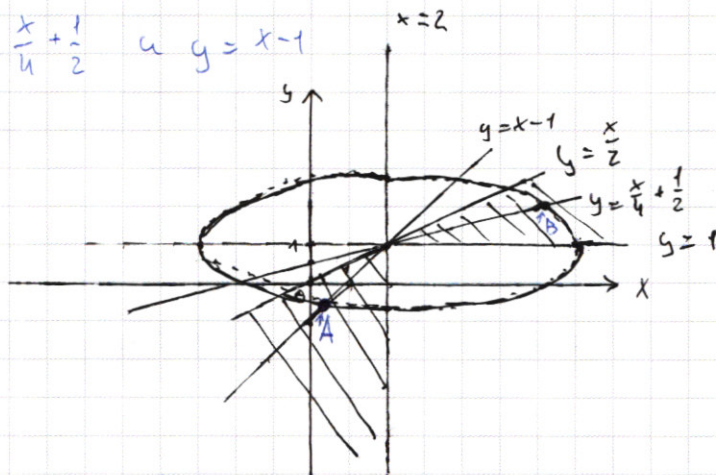
$$(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 4x - 2y + 2$$

$$x^2 + 4y^2 - 5x + x + 2y - 2 = 0$$

$$(4y - x - 2)(y - x + 1) = 0$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ и } y = x - 1$$



из графика видно, что система имеет ровно 2 решения (в точках A и B)

$$(y+1-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$$

$$10y^2 - 20y - 15 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$D = 16 + 24 = 40 \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{10}$$

$$y_1 = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \text{не } y_1 \text{ (на рисунке } y < 0) \quad y_2 = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y + 1 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \quad A(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{2}$ (предель)

$$(4y - 2 - 2)^2 + (3y - 3)^2 = 25$$

$$16(y - 1)^2 + 9(y - 1)^2 = 25$$

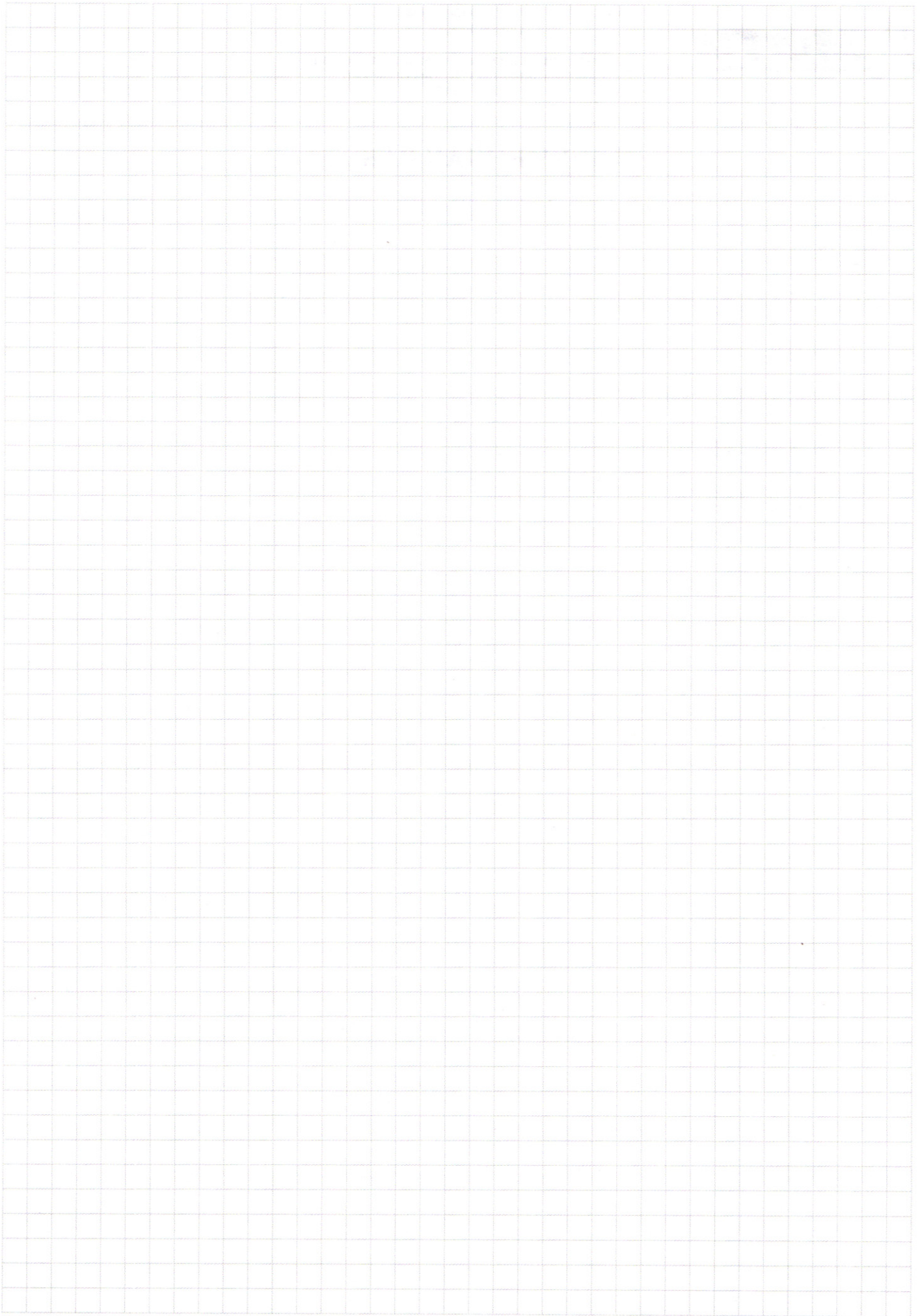
$$(y - 1)^2 = 1$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow \text{не годится (на графике } y > 0)$$

$$y_2 = 2 \Rightarrow x = 4y - 2 = 8 - 2 = 6$$

$$B(6; 2)$$

$$\text{Взбер: } (6; 2) \text{ и } \left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\sum \log_{12}(x^2+18x) + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13} - 18x$$

$$x^2 + 18x > 0 \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \Rightarrow (x^2+18x) = x^2+18x$$

$$x^2 + 18x = t \quad t > 0$$

$$t^{\log_{12} 5} + (x^2+18x)^{\log_{12} 5} + x^2 + 18x - (x^2+18x)^{\log_{12} 13} \geq 0$$

$$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$$

$$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12} t} \geq 0$$

$$\log_{12} t = q$$

$$5^q + 12^q - 13^q \geq 0$$

$$5^q + 12^q - 13^q = 0$$

$$q = 2$$

$$25 + 144 - 169 = 0$$

$$\log_{12} t = 2 \Rightarrow t = 144 \Rightarrow x^2 + 18x = 144$$

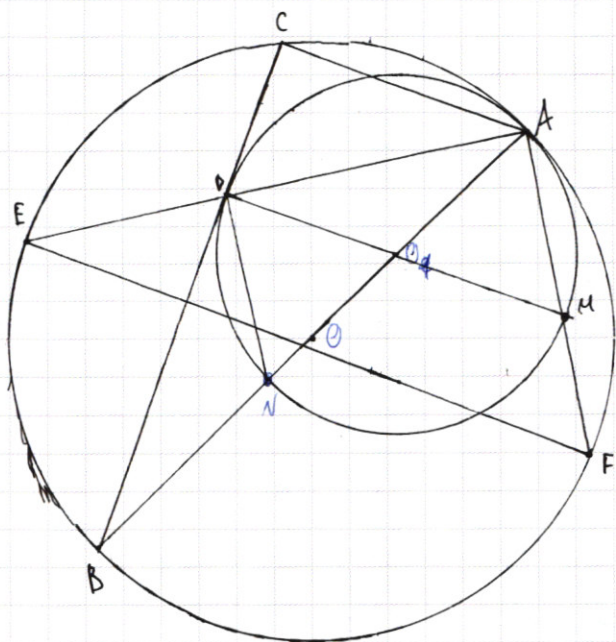
$$x^2 + 18x - 144 = 0$$

$$x_1 = -24 \quad x_2 = 6$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \quad + \quad \rightarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ -24 \quad 6 \end{array} \Rightarrow x \in [-24; 6] \Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6] \quad (\text{с учётом ОДЗ})$$

$$\text{Ответ: } x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$$

✓ 4



$$DC \cdot BP = ED \cdot AD = 14 \cdot 8$$

$$BN \cdot AB = BD^2 \Rightarrow 2R(2R-2u) = BD^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4R(R-u) = BD^2 = 14^2$$

$$2R - BN = 2u$$

$B_1D \parallel EF$, т.к. $B_1D \perp BC$ и $EF \perp BC$

$\triangle ABC$ - прямоугол. т.к. AC - диаметр и $\angle C$ - диаметр.

$$AC^2 = 4R^2 - BC^2$$

$$\angle DNA = \angle CDA = \frac{1}{2} \angle A \Rightarrow \triangle ADN \sim \triangle ANP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2u}{AD} \Rightarrow AC = \frac{AD^2}{2u}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle P, DB \Rightarrow \frac{2R-u}{2R} = \frac{BP}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 \cdot 2 \cdot R = 25 \cdot 2 \cdot R - 25u \Rightarrow 25u = 16R \Rightarrow u = \frac{16R}{25}$$

$$4R - \frac{16R}{25} = \frac{14^2}{25} \Rightarrow \frac{4 \cdot 9}{25} R^2 = 14^2 \Rightarrow R = \frac{14 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{85}{6} = 14 \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{16 \cdot 85}{25 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 14}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15} = 9 \frac{1}{15}$$

$$AP^2 = AB^2 - BC^2 = \frac{85^2}{9} - 25^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\left(\frac{85-45}{3}\right)\left(\frac{85+45}{3}\right)} = \sqrt{\frac{10 \cdot 160}{9}} = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

$$AP = \sqrt{CA^2 + DC^2} = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{1744}{9}}$$

$$5^x + 12^x - 13^x = 0$$

$$5^x + 5^{x \log_5 12} - 5^{x \log_5 13} = 0$$

$$-b + b \log_5 12 - b \log_5 13 \geq 0$$

$$a^b - a^c \geq a$$

$$a^b - a^c \geq a$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - 1 - 2y + 2$$

$$x^2 + 4y^2 = 5xy - 1 - 2y + 2$$

$$(x - 2y)^2 = (x - 2)(y - 1)$$

$$(x - 2y)^2 = (x - 2)(y - 1)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 3xy - 3y^2 - x - 2y + 2$$

$$(x - y)^2$$

$$x^2 + 4y^2 - 5xy + x + 2y - 2 = 0$$

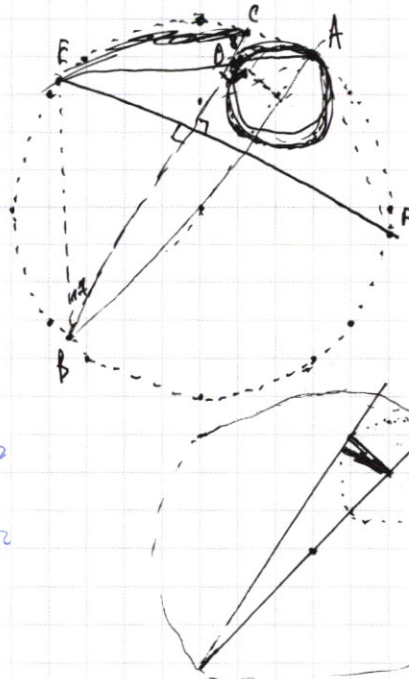
$$x^2 - xy + x + 4y^2 - 4xy + 4 + 6$$

$$x(x - y + 1) - 4y(x - y + 1) + 6$$

$$(4y - x - 2)(y - x + 1) = x^2 - 4xy + 4y^2 - 4xy + 4y - xy + x^2 - x - 2y + 2x - 2$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ +69 \\ \hline 9 \\ 546 \\ \hline 2146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3^2 \\ x46 \\ 46 \\ \hline 246 \\ 184 \\ \hline 2146 \end{array}$$



$$AD \cdot ED = BC \cdot BP = 3 + 4$$

$$BD^2 = 2R(2R - 2r) = 4R(R - r)$$

$$(2R - r)^2 = r^2 + BD^2$$

$$\frac{2R}{CE} = \frac{AD}{DC} = \frac{DB}{ED}$$

$$x^2 + 4y^2 - 5xy + x + 2y - 2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos 0 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos 0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin -\frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$x^2 + 9y^2 = 25$$

$$(x-2)(y-1) = xy - 2y - x + 2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$$

$$y = 4 - 2y \Rightarrow y = 3$$

$$\frac{x}{y} = 5 \quad \frac{y}{x} = 5$$

$$5^a + 12 - 13 \geq 0$$

$$1 + 2y = 2,6$$

$$121 = 11^2 \quad 12 = 1,2$$

$$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$$

$$x^2 + 4y^2 = 5xy - x - 2y + 2$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4y^2 + 12y + 9 = 5xy + x + 10 + 12$$

$$(x+1)^2 + (2y+3)^2 = 5xy + x + 10 + 12$$

$$x^2 + 3,5x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \dots$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = a+b$$

$$a-b=1$$

$$21,6 \quad 2 \quad 8 \quad 1$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ___
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)