МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Для начала определим некоторые свойства этой функции:

Пусть m - составное целое число и $m = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, где q_i - простое число, тогда $f(m) = f(q_1 \cdot \ldots \cdot q_{n-1}) + f(q_n) = f(q_1 \cdot \ldots \cdot q_{n-2}) + f(q_{n-1}) + f(q) = \ldots =$

$= f(q_1) + f(q_2) + \ldots + f(q_n) = \left[\frac{q_1}{4}\right] + \left[\frac{q_2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{q_n}{4}\right]$ (то есть мы $n-1$ раз применили свойство $f(ab) = f(a) + f(b)$) (1)

Найдём $f(1)$:

$f(1) = f(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) = 5 \cdot f(1)$

Тогда $4 \cdot f(1) = 0$ или $f(1) = 0$. (2)

Найдём $f\left(\frac{1}{m}\right)$: ($m \geq 1$, целое)

$f(1) = f\left(m \cdot \frac{1}{m}\right) = f(m) + f\left(\frac{1}{m}\right) \overset{(2)}{=} 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{m}\right) = -f(m)$ (3)

Пользуясь (1) найдём $f(n)$ для всех $n \in [2; 25]$:

n	$f(n)$
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
13	0
19	4
20	1
21	1
22	2

Продолжение

23	5
24	0
25	2

Переформулируем условие:

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x) < f(y)$

Несложным подсчётом из таблицы получаем, что пар всего 206 штук

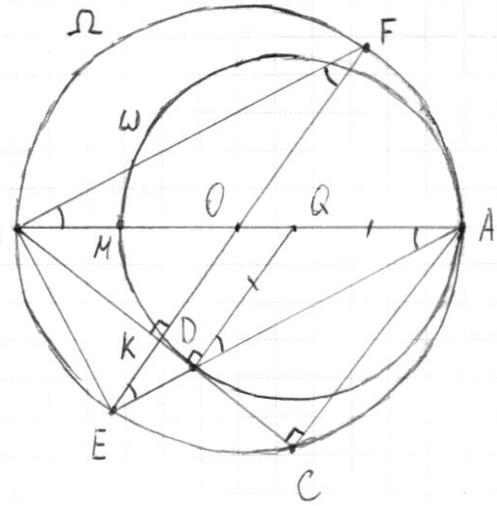
$(14 \cdot 10 + 7 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 206)$

Ответ: 206

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

№4



I. Пусть O - центр Ω, Q - центр ω

Как известно, при внутреннем касании центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, отсюда $Q \in AB$.

$\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр), по той же причине $\angle AFB = 90^\circ$; Пусть $AB \cap FE = \tilde{O}$

$\angle \tilde{O}KB = \angle QDB = \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel QD \parallel \tilde{O}K$ (соответственные углы равны), оттуда же $\triangle B\tilde{O}K \sim \triangle BQD \sim \triangle BAC$ (по двум углам); $\angle B$ - общий

Из того, что $FE \parallel QD$ следует, что $\angle \tilde{O}EA = \angle QDA$; но $\angle QDA = \angle QAD$ (углы при основании в р/б тр.)

$\angle QAD = \angle BFE$ (опираются на одну дугу BE)

$\angle \tilde{O}EA = \angle FBA$ (опираются на одну дугу FA)

$\angle BEA = \angle BE\tilde{O} + \angle \tilde{O}EA = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

$\angle FBE = 180^\circ - \angle BFE - \angle FEB = 180^\circ - \angle FEA - \angle FEB = 180^\circ - \angle BEA = 90^\circ$, отсюда FE-диаметр, а значит $\tilde{O} = O$.

$AB \cdot BM = BD^2$ (теорема о касательной и секущей); пусть $AB = 2R$, $AM = 2r$.

$2R(2R - 2r) = BD^2$ (1)

$\triangle ABC \sim \triangle QBD \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{BC}{BD}$ или $\frac{2R}{2R - r} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow 2R \cdot BD = 2R \cdot BD - r \cdot BD - r \cdot CD + 2R \cdot CD$

$r \cdot BC = 2R \cdot CD \Rightarrow r = 2R\frac{CD}{BC} = 2R \cdot \frac{\frac{15}{2}}{\frac{15}{2} + \frac{17}{2}} = \frac{15}{16}R$

(1): $\frac{1}{4}R^2 = BD^2 \Rightarrow R = 2 \cdot BD = 17$; $r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

II. ~~Пусть~~ $\triangle AQD \sim \triangle AOE$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AQ}{AO} = \frac{AD}{AE}$ или $\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE}$

$\Downarrow$

$BD \cdot CD = AD \cdot DE$ (т. о пересечении хорд)

$\frac{r}{R}AD + \frac{r}{R} \cdot ED = AD \Rightarrow ED = \frac{R - r}{r} \cdot AD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BD \cdot CD = AD^2 \cdot \frac{R-r}{r}$

$AD = \sqrt{\frac{r}{R-r} \cdot BD \cdot CD} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$ED = \frac{17 - \frac{15 \cdot 17}{16}}{\frac{15 \cdot 17}{16}} \cdot \frac{15\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$AE = 8\sqrt{17}$; $AF = \sqrt{FE^2 - AE^2} = \sqrt{34^2 - 64 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$ ($\angle FAE = 90°$, т.к. опир. на диаметр)

$\sin \angle AFE = \frac{AE}{FE} = \frac{8\sqrt{17}}{2 \cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\sqrt{\frac{16}{17}}\right)$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 136$

Ответ: радиус большей – 17 ; радиус меньшей – $\frac{15 \cdot 17}{16}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\sqrt{\frac{16}{17}}\right)$;

$S_{AEF} = 136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Начертим эскизы графиков $f(x)=-32x^2+36x-3$ и $g(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$ в области $x\in[\frac{1}{4};1]$.

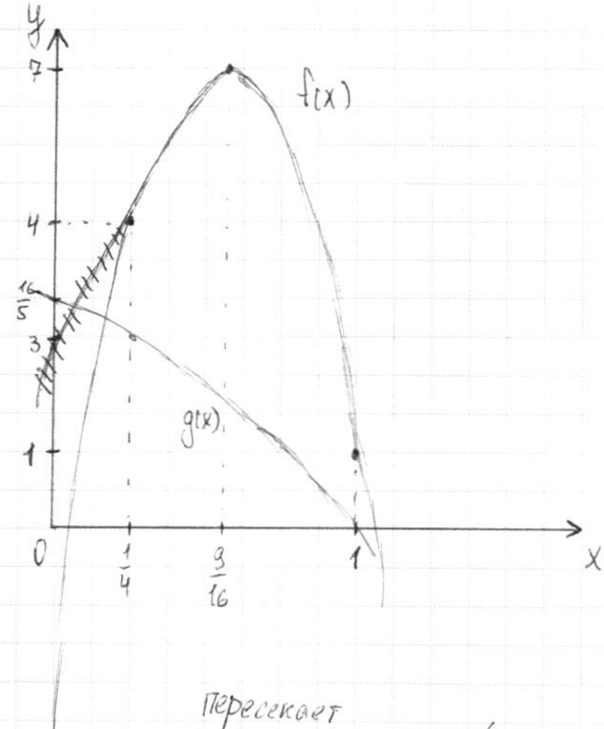
$(\frac{9}{16};7)$ - вершина параболы $f(x)$

$f(0)=-3$; $f(\frac{1}{4})=4$; $f(1)=1$

$f\uparrow$ на $x\in[\frac{1}{4};\frac{9}{16}]$; $f\downarrow$ на $x\in(\frac{9}{16};1]$

$g\downarrow$ на $x\in[\frac{1}{4};1]$

$g(0)=\frac{16}{5}$; $g(\frac{1}{4})=3$; $g(1)=0$



Уравнением $ax+b=y$ можно задать любую прямую.

Двойное неравенство выполняется на $x\in[\frac{1}{4};1]$, если прямая зажата между графиками $f(x)$ и $g(x)$.

Значит, $3\le \underbrace{a\cdot\frac{1}{4}+b}_{h(\frac{1}{4})=a\cdot\frac{1}{4}+b}\le 4$; $0\le \underbrace{a+b}_{h(1)=a+b}\le 1$ и прямая не ~~касается~~ пересекает гиперболу.

Заметим, что если прямая проходит через высшие точки $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$, то она имеет вид $y=-4x+5$. Проверим, пересекает ли она гиперболу:

$$\frac{16x-16}{4x-5}=-4x+5$$

$$\frac{16x-16+16x^2-20x-20x+25}{4x-5}=0$$

На $x\ne\frac{5}{4}$: $16x^2-24x+9=0$

$$(4x-3)^2=0$$

$$x=\frac{3}{4}$$

Оказалось, она касается гиперболы в $x=\frac{3}{4}$.

Гипербола на $x\in[\frac{1}{4};1]$ выпукла вверх, тогда если мы сместим какую-либо из точек, через которые проходит прямая в $x=\frac{1}{4}$ или $x=1$, то прямая начнёт ~~параболу~~ гиперболу пересекать, отсюда единственный вариант: $a=-4; b=5$

Ответ: $(-4;5)$

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ:

$10x-x^2>0$

$x\in[0;10]$

Пусть $a=10x-x^2$

$$a+|-a|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}$$

На ОДЗ $|-a|=a$

$$a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}$$

$\frac{16x-16}{4x-5} = ax+b$

$(-20ab+64a)4$

$-4ax^2 + x(5a-4b+16) + (5b-16) = 0$

$25a^2 - 20ab + 80a - 20ab + 16b^2 - 64b + 80a - 64b + 256 - 80ab + 256a = 0$

$25a^2 + 16b^2 - 120ab + 160a - 128b + 256 = 0$

$+128(2-b)$

$(5a \pm 4b)^2 = 25a^2 \pm 40ab + 16b^2$

$+80a(2-b)$

$(5a-4b)^2 + (80a+128)(2-b) = 0$

$10x - x^2 = a$

25

$\downarrow$

$-\infty$

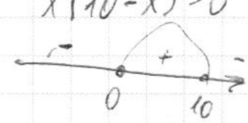
$t<0$

$x^2 - 10x = t$

$10x - x^2 > 0$

$x(10-x) > 0$

$|t|^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3(-t)}$



$(-t)^{\log_3 4}$

$x \in (0;10)$

$a + |-a|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$

$16x - 16 + 16x^2 - 20x - 20x + 25 = 0$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$(4x-3)^2 = 0$

$x = \frac{3}{4}$

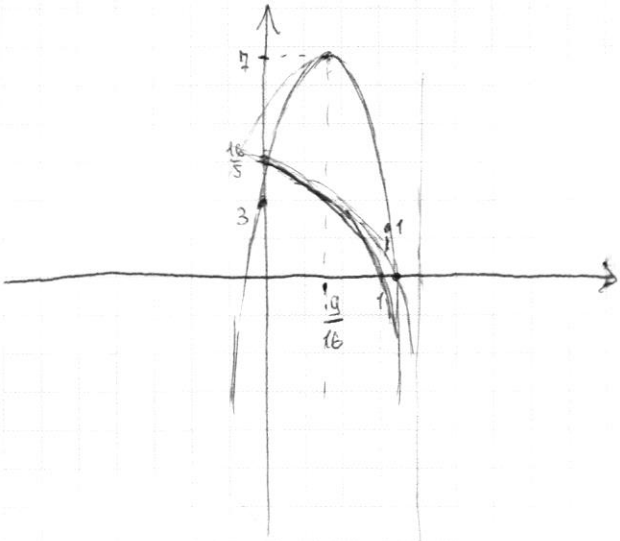
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

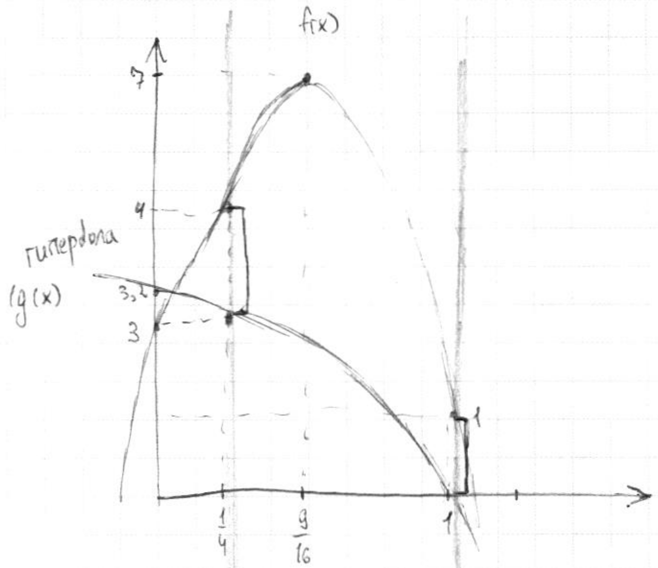
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$f(\frac{1}{4}) = -2+9-3=4$

$g(\frac{1}{4}) = \frac{-12}{-4} = 3$

$h(x) = ax+b$

$\begin{cases} 3 \le h(\frac{1}{4}) \le 4 \\ 0 \le h(1) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$a+b=1$

$\frac{a}{4}+b=4$

$a+4b=16$

$1+3b=16$

$b=5$

$a=-4$

$-4x+5$

$\frac{9}{4}-5 = \frac{-11}{4}$

$\frac{-7}{\frac{-11}{4}} = \frac{28}{11}$

①④

$0 \ge 11-3b$

$b \ge \frac{11}{3}$

$\begin{cases} 3 \le \frac{a}{4}+b \quad ; \quad \frac{a}{4}+b \le 4 \\ 0 \le a+b \quad\quad a+b \le 1 \end{cases}$

①② $0 \ge 12-3b$ $2a \ge 12-5b$

$b \ge 3$

$\begin{cases} a+4b \ge 12 \\ a+b \ge 0 \\ a+4b \le 16 \\ a+b \le 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a \ge 12-4b & ① \\ a \ge -b & ② \\ a \le 16-4b & ③ \\ a \le 1-b & ④ \end{cases}$

②③ $0 \ge -16+3b$

$b \le \frac{16}{3}$

③④ $0 \le 15-3b$

$b \le$

$-b$

$-\frac{18}{16}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE}$; $AD \cdot DE = BD \cdot CD$

$17 \times 8 = 136$

$\frac{\frac{15\cdot17}{16}}{\frac{17\cdot16 - 15\cdot17}{16}} = \frac{15}{1} = 15$

$\frac{r}{R}AD + \frac{r}{R}ED = AD$

$\frac{15^2\cdot17}{4} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$ED = \frac{R}{r}\cdot AD\left(1-\frac{r}{R}\right) = \frac{R-r}{r}\cdot AD$

$AD^2 = \frac{r}{R-r}BD\cdot CD$

$17^2\cdot4 - 64\cdot17$

$17\cdot4(17-16) =$

$AD = \sqrt{\frac{r}{R-r}BD\cdot CD}$

$68 = 2\cdot34\cdot4\cdot17^2$

$AE = \sqrt{\frac{r}{R-r}BD\cdot CD}\left(1+\frac{R-r}{r}\right) = \frac{R}{r}\sqrt{\frac{R^2}{(R-r)r}\cdot BD\cdot CD}$

$AF = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{(R-r)r}\cdot BD\cdot CD}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{BD\cdot CD}}{2\sqrt{(R-r)r}} = \frac{2}{\sqrt{(R-r)r}}$

$f(x)\in[0;5]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$\underline{f(x) < f(y)}$

$14\cdot10$ – нулевые x
$7\cdot7$ – единичные
$4\cdot3$
$3\cdot1$
$1\cdot2$
Θ

$140+49+12+3+2$

$= 189 + 17 = \boxed{206}$

$189 + 17 = 206$

x	f(x)
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

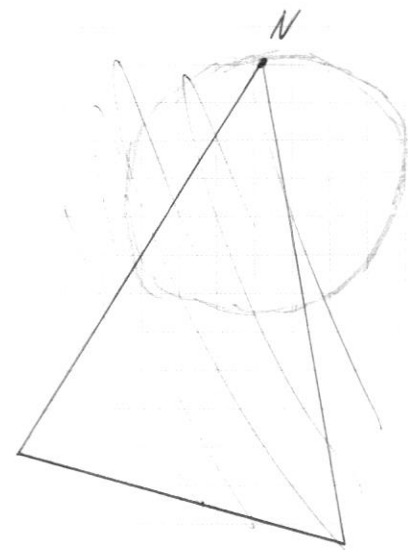
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

24^2 всего

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p - простое

$$\begin{cases} 2 \le x, y \le 25 \quad \in \mathbb{N} \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$$



$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(q_1 q_2 \dots q_n) = f(q_1) + f(q_2) + \dots + f(q_n) =$

$= \left[\frac{q_1}{4}\right] + \left[\frac{q_2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{q_n}{4}\right]$

$MN = \sqrt{2}$

$KL = 3$

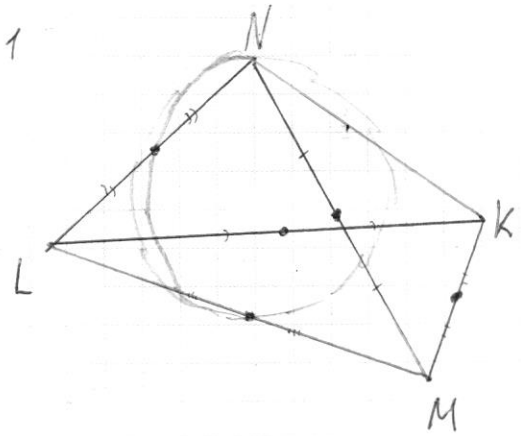
$KM = 1$

LM - ?

$\min(R)$ - ? опис.

$f(1) = 0$

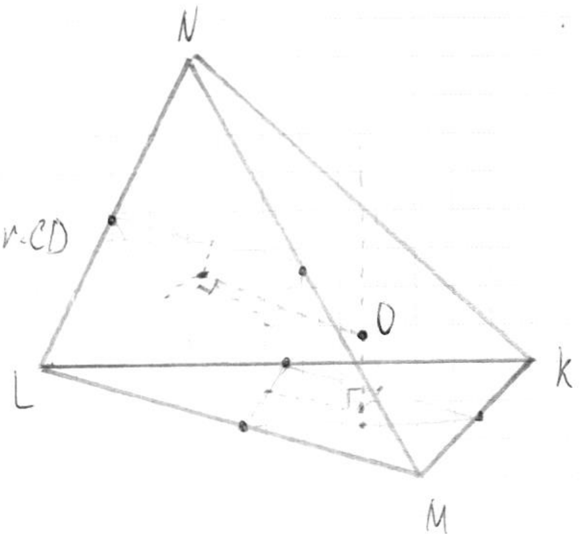
$f(1) = f\left(p \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 0$



$f\left(\frac{1}{m}\right) = -f(m)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$\frac{2R}{2R - r} = \frac{BC}{BD}$



$2R \cdot BD = 2R \cdot BD - r \cdot BD + 2R \cdot CD - r \cdot CD$

$r(BC) = 2R \cdot CD$

$r = 2R \cdot \frac{CD}{BC} = 2R \frac{\frac{15}{2}}{16} = \frac{15}{16} R$

$2r = \cancel{\frac{30}{16}} \quad \frac{15}{8} R$

$2R \cdot \frac{1}{8} R = BD^2$

$R^2 = 4 \cdot BD^2$

$R = 2 \cdot BD = \boxed{17} \qquad r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

☐ черновик ☐ чистовик

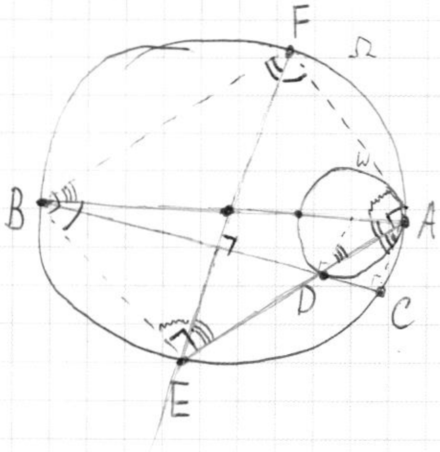
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$CD = \frac{15}{2}$ $\quad$ $R, r, \angle AFE, S_{AEF} - ?$ $\quad$ $BC = 16$

$BD = \frac{17}{2}$



$2R\cdot(2R-2r) = BD^2$

$4R^2 - 4Rr = BD^2 = \frac{17^2}{4}$

$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC}$; $4R^2 = AC^2 + BC^2$

$AC = \frac{BC}{BD}\cdot r$ | $4R^2 = \frac{BC^2}{BD^2}\cdot r^2 + BC^2$

$4R^2 = \frac{16^2\cdot 4}{17^2} r^2 + 16^2$

$4R^2 - 4Rr = \frac{17^2}{4}$

$r = \frac{4R^2 - BD^2}{4R}$

$4R^2 = \frac{BC^2(4R^2-BD^2)^2}{BD^2\cdot 16R^2} + BC^2$

$4R^2 = \frac{16^2(4R^2 - \frac{17^2}{4})^2}{\frac{17^2}{4}\cdot \cancel{16}R^2} + 16^2$

$4R^4 = \frac{16\cdot 4}{17^2}\left(16R^4 - 2\cdot 17^2 R^2 + \frac{17^4}{16}\right) + 16^2 R^2$

$\frac{16^2\cdot 4}{17^2} R^4 - 4R^4 - 16\cdot 8 R^2 + 17^2\cdot 4 + 16^2 R^2 = 0$

$R^4\left(\frac{16^2\cdot 4 - 4\cdot 17^2}{17^2}\right) + R^2(16^2 - 16\cdot 8) + 17^2\cdot 4 = 0$

$-33\cdot 4$ $\quad$ -33 $\quad$ $66\times 66 = 4356$ $\quad$ $66+66 = 132$ $\quad$ $8\cdot 16\cdot 17^2$

$t^2(16^2-17^2)4 + t(16-8)16\cdot 17^2 + 17^4\cdot 4 = 0$

$-\cancel{132}^{66} t^2 + 17^2\cdot 16\cdot \cancel{8}^{2} t + 17^4\cdot \cancel{4}$

$-66t^2 + 17^2\cdot 32t + 17^4 = 0$

$D = 17^4\cdot 32^2 + 17^4\cdot 66\cdot 4 = 17^4(32^2 + 66\cdot 4)$

$t = \frac{-17^2\cdot \overset{16}{32} \pm 17^2\cdot 2\sqrt{322}}{-\cancel{132}\,66}$ $\quad$ $322 = 3\cdot 11\cdot 2$

$32\times 32 = 1024$ $\quad$ $66\times 4 = 264$ $\quad$ $1024 + 264 = 1288 = 644\cdot 2$

$= 17^2\cdot\frac{16 \mp \sqrt{322}}{66}$

$322\cdot 4$

$161\cdot 8$

$23\cdot 7\cdot 8$

$\boxed{\sqrt{\frac{17^2}{66}\cdot(16+\sqrt{322})} = R}$

$r = \frac{\frac{2\cdot 17^2}{33}(16+\sqrt{322}) - \frac{17^2}{4}}{4\sqrt{\ldots}} = \frac{8\cdot 17^2(16+\sqrt{322}) - 17^2\cdot 33}{16\cdot 33\sqrt{\ldots}} =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad 2\alpha + 2\beta = x$ $\quad \sin x = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos x = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(x+2\beta) + \sin 2\alpha = \sin x \cdot \cos 2\beta + \cos x \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta$

$- \sin 2\alpha \cdot \sin^2 2\beta + \sin 2\alpha$

$\parallel$

$-\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta$

$2(\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = -\frac{1}{5}$ $\quad 4-$

$\parallel$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{5}{4}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\quad \frac{36}{32 \cdot 2} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$ $\quad \frac{9}{16}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad -\frac{32 \cdot \cancel{81}^{9^2}}{\cancel{256}\,16^2} + \frac{36 \cdot 9 \cdot 16}{16^2} - \frac{3 \cdot 16^2}{16^2} =$

$\frac{1824}{256} = 912 \cdot 2 = 456 \cdot 4 = 228 \cdot 8$
$\quad \parallel \; 114 \cdot 16$

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = 2 \cdot \cos^2\beta - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1280

$\frac{114}{16} = \frac{57}{8} \approx 7 \ldots$

$\cos^2\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$; $\sin^2\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

$\frac{-4ax^2 + x(5a - 4b + 16) + (5b - 16)}{4x - 5} \le 0$

$\frac{16(x-1)}{4x-5} - ax - b \le 0$

$\frac{16x - 16 - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b}{4x - 5} \le 0$

$$\begin{array}{r} 2592 \\ +\ 768 \\ \hline 3360 \end{array} \quad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 32 \\ \hline 162 \\ 243 \\ \hline 2592 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144 \\ \times\ 36 \\ \hline 864 \\ 432 \\ \hline 5184 \end{array} \quad \begin{array}{r} 256 \\ \times\ 3 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5184 \\ -\ 3360 \\ \hline 1824 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)