МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, и получим $x-8y=216$. Теперь сложим первое и второе и получим.

$x+8y+2\sqrt[3]{x^2-64y^2}=32$, сделаем замену $x+8y=t$. И подставим $x-8y=216$. $\Rightarrow$ $t+2\sqrt[3]{216t}=32$ $\Rightarrow$

$t+12\sqrt[3]{t}=32$. В левой части у нас строго возрастающая функция, а значит, что если решение и будет, то будет одно. Это легко подобрать подбором $t=8$. $\begin{cases} x+8y=8 \\ x-8y=216 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x=112$, $y=-13$

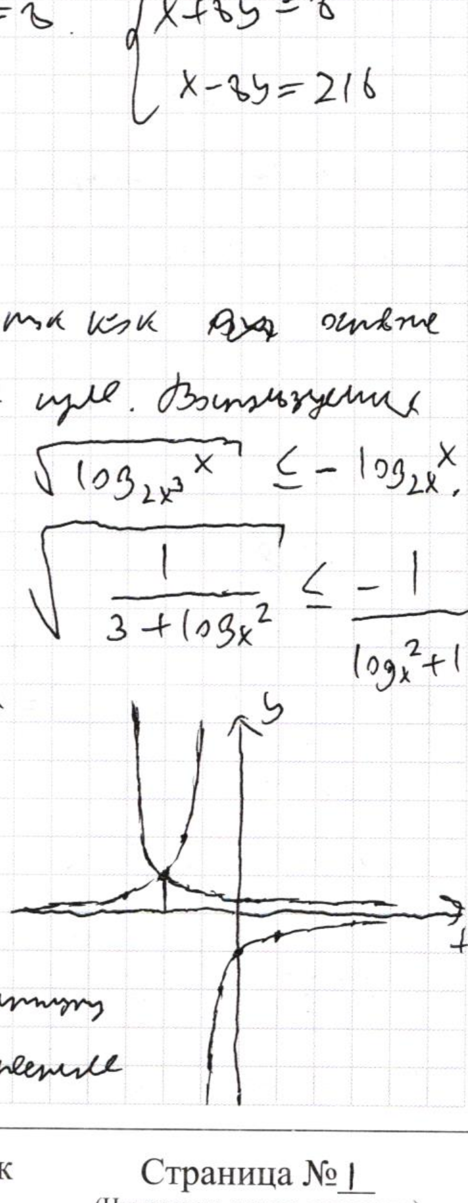
Ответ: $x=112$, $y=-13$.

№2.

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x}\frac{1}{x^3}$. $x>0$, так как и основание и аргумент могут быть строго больше нуля. Воспользуемся тем, что $\log_a b^n = n\cdot\log_a b$, $\Rightarrow$ $\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -\log_{2x} x$.

Как легко показать $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{1}{3+\log_x 2}} \le -\frac{1}{\log_x 2+1}$

Обозначим за $t=\log_x 2$. И решим неравенство. Для этого нарисуем графики и правой и левой части. Второй график можно построить примерно, заметив, что он всегда выше $y=0$, и проходит через точку $(-2;1)$. А также имеет асимптоту $t=-3$. Из графика видно, что неравенство выполняется



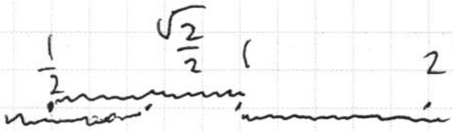
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

Тогда $-2 \le * < -1$, $-2 \le \log_x 2$ $-2 \le \frac{1}{\log_2 x}$, $1 \ge -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_2 x}$

Если $x \ge 1$, то $\log_2 x \ge -\frac{1}{2}$, $\Rightarrow x \ge 2^{-\frac{1}{2}}$, $\Rightarrow x \ge 1$. Если $x < 1$ то по аналогии получим $x \le 2^{-\frac{1}{2}}$. $\log_x 2 < -1$, $\Rightarrow$ ~~$\log_2 x$~~ $\frac{-1}{\log_2 x} > 1$, если $x \ge 1$, $-1 > \log_2 x$ $\frac{1}{2} > x$. $\Rightarrow$ $x \in \varnothing$. Если $x \le 1$. $\Rightarrow$ $x > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x \le 1$.

Пересечение этих множеств, дает нам решение.



$\boxed{\frac{1}{2} < x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\quad x = 1.}$

Ответ: $x = 1$. $\frac{1}{2} < x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

№3.

Обозначим наше число как $\overline{abcdEFG}$. Очевидно, что $9999 + 999 + 99 < 12414$. Отсюда становится понятно, что мы не можем взять $n < 5$, где n – это максимальная степень десятки на которую мы делим. Рассмотрим $n = 5$. Тогда мы получим, что остатки будут равны $\overline{cDEFG}$ $\overline{DEFG}$ и $\overline{EFG}$. $\overline{cDEFG} + \overline{DEFG} + \overline{EFG} = 12414$. У нас есть два варианта либо $c = 1$, либо $c = 0$. Рассмотрим первый. Если $c = 1$, то $D = 1$, А значит $3\overline{EFG} = 414 \Rightarrow \overline{EFG} = 118$. Тогда наше число может записываться как $\overline{ab11118}$, так как $a \ne 0$. Данное число может занимать 90 различных вариантов. Рассмотрим второй вариант. Если $c = 0$, $\Rightarrow D = 6$, $\Rightarrow \overline{EFG} = 118$. Также будет число записано как $\overline{ab06118}$, значит опять допустимо 90 вариантов. Но есть случай который мы упустили, а именно ~~...~~. $b = 0$. Тогда мы можем поделить на 10^6 и остатки будут $\overline{cDEFG}$, $\overline{cDEFG}$, $\overline{DEFG}$, $\Rightarrow c = 0$, $D = 4$, $\overline{EFG} = 118$. Число записывается как $\overline{a004118}$, это ещё 9 вариантов.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

А значит таких шашек можно занять 179 штук.

$\boxed{\text{Ответ: 179 штук.}}$

№6.

$6+\frac{4}{2x-3} \le ax+b \le 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$. Легко заметить, что в правой части неравенства находится окружность с радиусом 5 и центром в $(-\frac{7}{2}; 2)$. Нарисуем тогда график этих двух функций. Теперь нам осталось расположить прямую функцию, так чтобы она находилась между двумя этими функциями. Найдем для начала такую прямую которая проходит через точку $(\frac{3}{2}; 2)$. А так же эта прямая должна касаться где-то нижней гиперболы. $6+\frac{4}{2x-3}=ax+b$

$6(2x-3)+4=2ax^2+x(2b-3a)-3b$. Из первого условия можно сказать, что $2=\frac{3}{2}a+b$, $b=2-\frac{3}{2}a \Rightarrow$

$6(2x-3)+4=2ax^2+x(4-6a)-6+\frac{9}{2}a$.

$\cancel{2ax^2+4x}$ $2ax^2+x(4-6a-12)+8+\frac{9}{2}a=0 \;|\cdot 2$.

$4ax^2-4x(4+3a)+16+9a=0$. a должно быть таким, чтобы прямая касалась, то есть дискриминант равен 0.

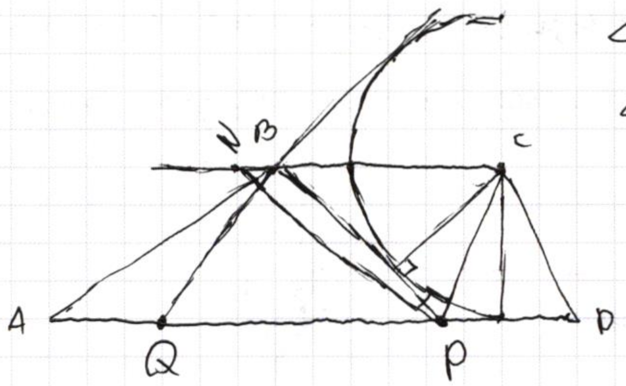
$D=16(4+3a)^2-4(16+9a)\cdot 4a=0$, $\Rightarrow 9a^2+16+24a-16a-9a^2=0$. $8a=-16$, $a=-2$. $b=5$.

В точке $x=-\frac{1}{2}$ $y=6$. А значит эта прямая удовлетворяет данным условием. Если мы будем изменять a и b так, что они все еще будут проходить через точку $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, то будут меняться корни, то легко увидеть, что как бы мы не меняли, условие будет нарушаться. Также изменив точку, мы вообще не добьемся, так как условие будет не удовлетворено.

$\boxed{\text{Ответ: } a=-2,\ b=5}$

№4.

Нарисуем картинку к нашей задаче.



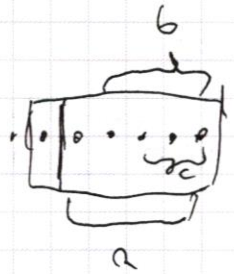
$\angle CPN = 90^\circ$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$

$AP = \frac{17}{2}$

$NC = 17.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{X}{10^n}+\frac{X}{10^{n+1}}+\frac{X}{10^{n+2}}$$

11

12414.

100000

$\overline{abcdEFG}$

$\overline{CPEFG}+\overline{PEFG}+\overline{E\cancel{F}G}$

~~EFG·3~~

$b=0.$

$\overline{CPEFG}+\overline{CPEFG}+\overline{PEFG}$

$C=0$, $3\overline{PEFG}=12414$

$\boxed{\overline{n004118}}$

$C=1$ $P=1$ $EFG=118$ $b=n$	$C=0.$ $b=n!$ $P=6$ $3\cdot\overline{EFG}=414$ $EFG=118$

11118

90

$\boxed{\text{189 штук}}$

06118

10, 11, ...

99.

90.

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 3\sin(\frac{\pi}{3} + x) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$= \sin(\frac{\pi}{3})\cdot\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{3})\cdot\sin(x)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cos(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(x)\cdot\sin(\frac{\pi}{6})$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\cos(\frac{\pi}{6} - x - 2y)$ $\cancel{2\sin(x+2y+\frac{\pi}{3}) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

$x+2y=\frac{\pi}{6}$

$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

$\cancel{\sin(x+y)\cdot\cos(y) + \sin(y)\cos(x+y) + \sqrt{3}\cos(x+y)\cos(y)}$

$\cancel{2\cos(x+2y}$

$\frac{8}{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(x+y) = \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cdot\cos(x+2y)$

$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1 - tg(x)\cdot tg(y)}$

$2\cos(x+2y)$

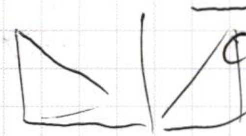
$ctg(x+y) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(y) - \sin\ldots}{\sin(x)\cdot\cos(y) + \sin(y)\cdot\cos(y)}$

$\cancel{2\cos(x+2y + \frac{\pi}{6})}$

$\cancel{2\cos(x+2y + \frac{\pi}{3})}$

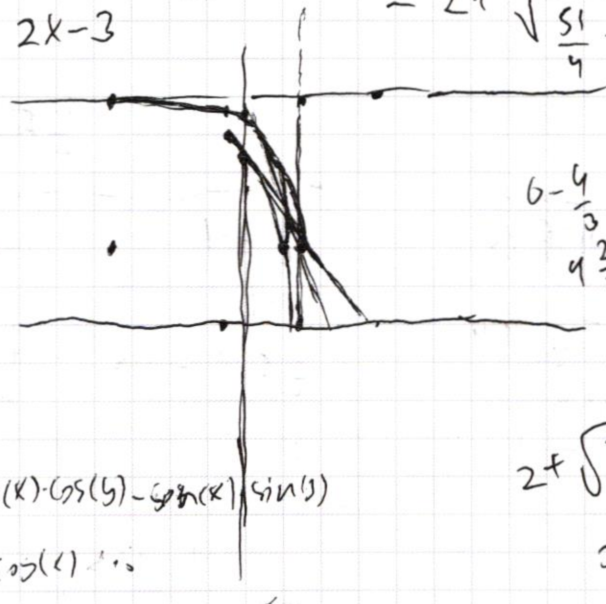
$\cancel{2\cos(x+2y - \frac{2\pi}{3})}$

$\frac{ctg(x)\cdot ctg(y) - 1}{ctg(x) + ctg(y)}$



$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

$$6 + \frac{4}{2x-3} \le ax + 6 \le 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$



$\frac{6}{4} - 3$

$6 - \frac{4}{3}$

$4\frac{2}{3}$

$\cancel{x}=\frac{1}{2}$

$-\frac{7}{2} - \frac{1}{4}$

$x = \frac{7}{2}$

$\frac{14}{4} - \frac{1}{4}$

$\frac{13}{4} \cdot \frac{51}{4}$

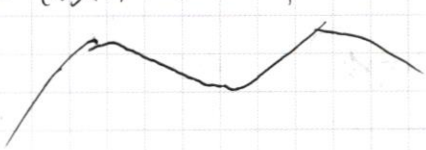
$2 + \sqrt{\frac{51}{4}}$

$3\frac{1}{2}$

$5\frac{1}{2}$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$

$\cos(x-y) = \cos(x)\ldots$



$y = 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$

$(y-2)^2 = \frac{51}{4} - 7x - x^2$

$(y-2)^2 + x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 25$

$(y-2)^2 + (x+\frac{7}{2})^2 = 5.$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cdot\cos(y)$

$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cdot\cos(\frac{x-y}{2})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\frac{7}{5}\sqrt{3}\cdot\cos(x+y) = 2\cos}$

$\cancel{\frac{4\sqrt{3}}{5}\cos(x+y) = \cos(\frac{\pi}{6}-x-2y)}$

$$ctg(x+y) = \frac{ctg(x)\cdot ctg(y)-1}{ctg(x)+ctg(y)}$$

$\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

$\sqrt{3}\cos(2x+y)+\sin(x+2y) = 3\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

$\cos(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin(x)}{2}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124$

$8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92.$

$\boxed{x - 8y = 216}$

$2\cdot 216\cdot 8y + 216^2$

$x = 8y + 216.$

$8y + 216 - \sqrt[3]{-2\cdot 216\cdot 8y - 216^2} = 124.$

$-\sqrt[3]{-2\cdot 216\cdot 8y - 216^2} - 8y - 92$

$x + 8y = z$

$-16\cdot 216\cdot y - 216^2 = (8y + 92)^3$

$z - 2\sqrt{}$

$z + 12\sqrt[3]{z^2} = 32.$

$z + 2\sqrt[3]{216\cdot z^2} = 32.$

$z + 12\sqrt[3]{z^2} = 32 - z$

$12^3 z^2 = 1024\cdot 32 - 3\cdot 1024\cdot z + 3\cdot 32\cdot z^2 - z^3$

$\cancel{12\cdot 72 - 4\cdot 3}$ $2^6\cdot 3^3$

$\frac{32}{3}$

$3\cdot 32 - \frac{32}{3}\cdot\frac{32}{3} - \frac{32^3}{3^3}$

$216 = 4\cdot 54$, $54 = 2\cdot 27$, $27 = 3\cdot 3\cdot 3$

32 · 27 = 224 + 64 = 764

3072 + 864 = 3936

$\frac{124 - x}{-92 - 8y}$

$t^3 + 12t = 32$

$t^3 + 12t - 32 \mid t - 2$

$t^3 - 2t^2$; $t^2 + 2t + 16$

$2t^2 + 12t$

$2t^2 - 4t$

$16t - 32$

$-2 \pm \sqrt{4}$

$(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$\begin{cases} x = 8y + 216 \\ x + 8y = 8. \end{cases}$

$16y = -208$

$\boxed{8}$

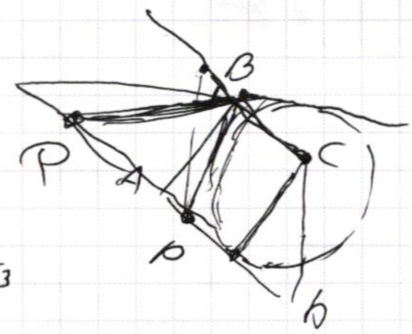
92 = 2 · 46, 46 = 23 · 2

$\boxed{\begin{array}{l} y = -13 \\ x = 112. \end{array}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{\log_{2x^3} x^5} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$



$x > 0.$

$3\sqrt{\log_{2x^3} x} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

$\log_{2x^3} x = \frac{\log_{2x} x}{\log_{2x} 2x^3}$ $x>2$ $\log_2 x > 1$

$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -$

$1 > \frac{1}{\log_2 x}$

$x=1$

$(\log_{2x^3} x)^{\frac{1}{2}} \le \log_{2x} \frac{1}{x}$

$1 > \log_x 2$

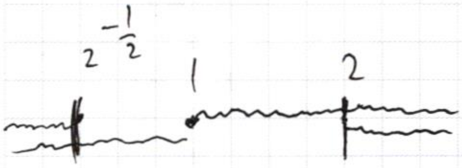
$x<2.$

$\boxed{\begin{matrix} x>2 & x=1 \\ x \le 2^{-\frac{1}{2}} \end{matrix}}$

$3\sqrt{\frac{1}{\log_x 2x^3}}$

$-2 \le \log_x 2$ $\boxed{\begin{matrix} x \ge 2 \\ x \le 1 \end{matrix}}$

-2



$\sqrt{\frac{1}{\log_x 2 + 3}} \le -\frac{1}{\log_x 2 + 1}$

$+$ $+$

$-2 \le \frac{1}{\log_2 x}$

$1 \ge \frac{-2}{-2\log_2 x}$

$\log_2 x \le 0.$

$x \le 2^{-2}$

$\sqrt{\frac{1}{t+3}} \le -\frac{1}{t+1}$

$-2 \le t < 1$

$\log_2 x > 0.$

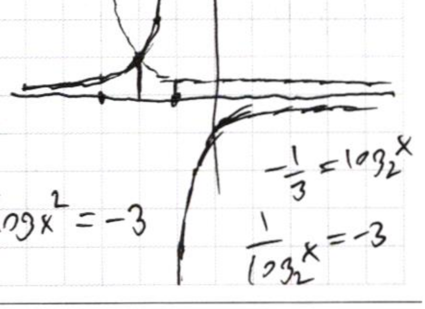
$x > 1$

$\log_2 x > 0.$ $x > 1$

$\log_2 x \ge -\frac{1}{2}.$

$\log_2 x \ge -2$

$x \ge 2^{-\frac{1}{2}}$ $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x \ge 2^{-2} =$

$\boxed{\begin{matrix} & x \ge 1 \\ x \le 2^{-\frac{1}{2}} \end{matrix}}$

$-\frac{1}{3} = \log_2 x$

$\log_x 2 = -3$

$\frac{1}{\log_2 x} = -3$

$x = 2^{-\frac{1}{3}}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)